Programmation Linéaire - Cours 2

F. Clautiaux
francois.clautiaux@math.u-bordeaux1.fr

Université Bordeaux 1
Bât A33

Sommaire

Résumé des épisodes précédents

- On dispose d'un formalisme pour **modéliser** des problèmes réels : la programmation linéaire
- On a appris à résoudre le problème à la main en deux dimensions
- Intuition pour résoudre en dimension supérieure : se déplacer de sommet en sommet du polyèdre convexe formé par les contraintes linéaires

Objectif du cours

- Apprendre la méthode du simplex
- Comprendre son fonctionnement
- Savoir contourner les pièges pour l'algorithme
- Lien avec des notions de mathématiques connues, interprétation géomètrique

Sommaire

Rappel : forme standard

À partir de tout PL sous forme normale, on peut construire un PL sous forme standard

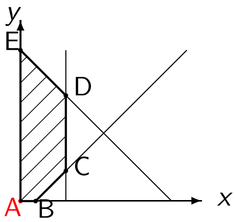
$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j (j = 1, \ldots, m)$$
$$x_i \geq 0 (i = 1, \ldots, n)$$

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + s_j = b_j (j = 1, \ldots, m)$$
$$x_i \geq 0 (i = 1, \ldots, n)$$
$$s_j \geq 0 (i = 1, \ldots, m)$$

Base initiale

Calculons une solution initiale simple.

$$\begin{aligned} \max z &= 5x + y \\ x + y + s_1 &= 10 \\ x - y + s_2 &= 1 \\ x + s_3 &= 3 \end{aligned}$$



Choix de la base initiale : annuler les variables de décision, ne garder que les variables d'écart.

Système obtenu

$$\begin{aligned} +s_1 &= 10 \\ +s_2 &= 1 \\ +s_3 &= 3 \end{aligned}$$

Solution

$s_1 = 10,\ s_2 = 1,\ s_3 = 3$

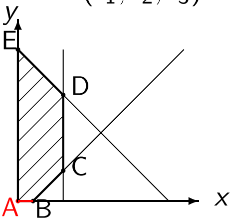
$x = 0, y = 0$

$z = 0 + 0 = 0$

Exemple pas à pas

Réécrivons notre problème en fonction de notre base (s_1, s_2, s_3).

$$\begin{array}{lllllll} z & & & & = 0 & +5x & +y \\ & s_1 & & & = 10 & -x & -y \\ & & s_2 & & = 1 & -x & +y \\ & & & s_3 & = 3 & -x & \end{array}$$



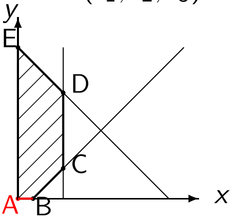
On parle de forme canonique.

- z et les éléments de la base sont chacun exprimés en fonction d'une constante et des variables hors base
- en affectant la valeur 0 aux variables hors base, le système se résout directement

Exemple pas à pas

Réécrivons notre problème en fonction de notre base (s_1, s_2, s_3).

$$
\begin{array}{llllllll}
z & & & & = 0 & +5x & +y \\
 & s_1 & & & = 10 & -x & -y \\
 & & s_2 & & = 1 & -x & +y \\
 & & & s_3 & = 3 & -x &
\end{array}
$$



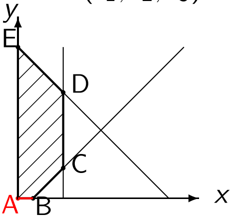
Comment améliorer la solution ?

En augmentant x ou y (on choisit x).

Exemple pas à pas

Réécrivons notre problème en fonction de notre base (s_1, s_2, s_3).

$$\begin{array}{llllllll} z & & & & = 0 & +5x & +y \\ & s_1 & & & = 10 & -x & -y \\ & & s_2 & & = 1 & -x & +y \\ & & & s_3 & = 3 & -x & \end{array}$$



Jusqu'où augmenter x ?

On sait que $s_1, s_2, s_3 \geq 0$

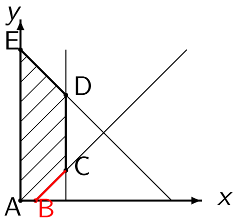
$$s_1 = 10 - x \implies x \leq 10$$
$$s_2 = 1 - x \implies x \leq 1$$
$$s_3 = 3 - x \implies x \leq 3$$

En posant $x = 1$, on annule s_2, qui sort de la base.

Exemple pas à pas

On remplace s_2 par x dans la base

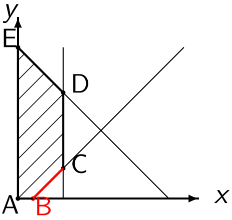
$$\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 0 & +5x & +y \\
& +s_1 & & & = 10 & -x & -y \\
& & +s_2 & & = 1 & -x & +y \\
& & & +s_3 & = 3 & -x &
\end{array}$$



Exemple pas à pas

On remplace s_2 par x dans la base

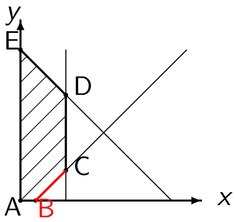
$$
\begin{array}{ccccccc}
z & & -5x & & = 0 & & +y \\
 & +s_1 & +x & & = 10 & & -y \\
 & & +x & & = 1 & -s_2 & +y \\
 & & +x & +s_3 & = 3 & &
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

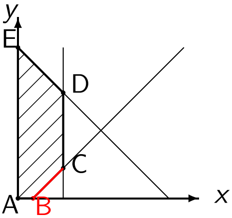
Puis on remet le PL sous forme canonique

$$
\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 5 & -5s_2 & +6y \\
& +s_1 & & & = 9 & +s_2 & -2y \\
& & +x & & = 1 & -s_2 & +y \\
& & & +s_3 & = 2 & +s_2 & -y
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

$$
\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 5 & -5s_2 & +6y \\
 & +s_1 & & & = 9 & +s_2 & -2y \\
 & & +x & & = 1 & -s_2 & +y \\
 & & & +s_3 & = 2 & +s_2 & -y
\end{array}
$$



Peut-on améliorer la solution ? Oui : y a un coefficient positif.

Jusqu'où augmenter y ?

On sait que $s_1, x, s_3 \geq 0$

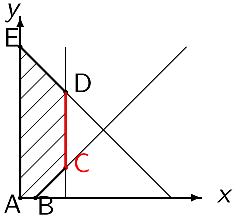
$$
\begin{aligned}
s_1 = 9 - 2y &\implies y \leq 9/2 \\
x = 1 + y &\implies y \geq -1 \\
s_3 = 2 - y &\implies y \leq 2
\end{aligned}
$$

En posant $y = 2$, on annule s_3, qui sort de la base.

Exemple pas à pas

On remplace s_3 par y en base

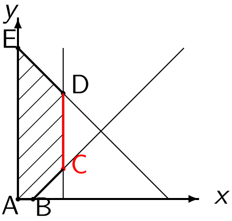
$$
\begin{array}{llllrrr}
z & & & & = 5 & -5s_2 & +6y \\
 & +s_1 & & & = 9 & +s_2 & -2y \\
 & & +x & & = 1 & -s_2 & +y \\
 & & & +s_3 & = 2 & +s_2 & -y
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

On remplace s_3 par y en base

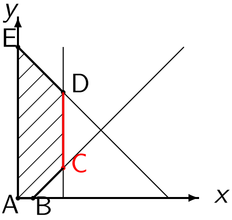
$$
\begin{array}{llllllll}
z & & & -6y & = 5 & -5s_2 & \\
 & +s_1 & & +2y & = 9 & +s_2 & \\
 & & +x & -y & = 1 & -s_2 & \\
 & & & +y & = 2 & +s_2 & -s_3
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

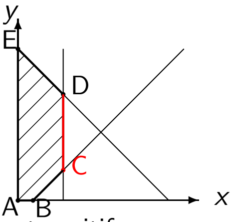
Et on réécrit le PL sous forme canonique

$$
\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 17 & +s_2 & -6s_3 \\
 & +s_1 & & & = 5 & -s_2 & +2s_3 \\
 & & +x & & = 3 & & -s_3 \\
 & & & +y & = 2 & +s_2 & -s_3
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

$$\begin{array}{rrrrcrr} z & & & & = 17 & +s_2 & -6s_3 \\ & +s_1 & & & = 5 & -s_2 & +2s_3 \\ & & +x & & = 3 & & -s_3 \\ & & & +y & = 2 & +s_2 & -s_3 \end{array}$$



Peut-on améliorer la solution ? Oui, s_2 a un coefficient positif.

Jusqu'où augmenter s_2 ?

On sait que $s_1, x, y \geq 0$

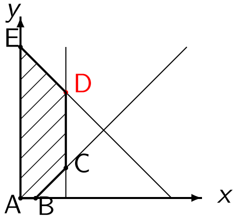
$$s_1 = 5 - s_2 \implies s_2 \leq 5$$
$$x = 3 \implies s_2 \leq +\infty$$
$$y = 2 + s_2 \implies s_2 \leq +\infty$$

En posant $s_2 = 5$, on annule s_1, qui sort de la base.

Exemple pas à pas

On remplace s_1 par s_2 en base.

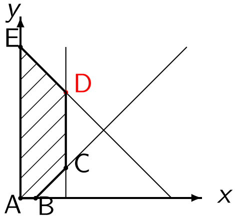
$$\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 17 & +s_2 & -6s_3 \\
 & +s_1 & & & = 5 & -s_2 & +2s_3 \\
 & & +x & & = 3 & & -s_3 \\
 & & & +y & = 2 & +s_2 & -s_3
\end{array}$$



Exemple pas à pas

On remplace s_1 par s_2 en base.

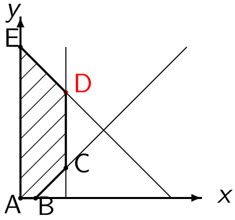
$$\begin{array}{lllllll}
z & -s_2 & & & = 17 & & -6s_3 \\
 & +s_2 & & & = 5 & -s_1 & +2s_3 \\
 & & +x & & = 3 & & -s_3 \\
 & -s_2 & & +y & = 2 & & -s_3
\end{array}$$



Exemple pas à pas

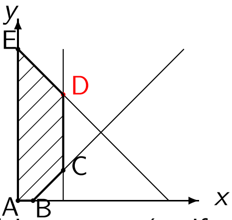
Et on écrit le PL sous forme canonique.

$$
\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 22 & +s_1 & -4s_3 \\
& +s_2 & & & = 5 & -s_1 & +2s_3 \\
& & +x & & = 3 & & -s_3 \\
& & & +y & = 7 & -s_1 & +s_3
\end{array}
$$



Exemple pas à pas

$$
\begin{array}{lllllll}
z & & & & = 22 & +s_1 & -4s_3 \\
 & +s_2 & & & = 5 & -s_1 & +2s_3 \\
 & & +x & & = 3 & & -s_3 \\
 & & & +y & = 7 & -s_1 & +s_3
\end{array}
$$



Peut-on améliorer la solution ? Non : tous les coefficients sont négatifs dans l'objectif.

Solution obtenue

$x = 3, y = 7, (s_2 = 5)$

$s_1 = s_3 = 0$

$z = 22$

Description formelle de la méthode

Problème linéaire sous la forme

$$\begin{array}{rll} \max & \sum_j c_j x_j & \\ \text{s.c.} & \sum_j a_{i,j} x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Ajout des variables d'écart et d'une variable objectif

$$\begin{array}{rrll} z = & & \sum_{j=1}^n c_j x_j & \\ x_{n+i} = & b_i - & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j & \text{pour } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Dictionnaires

A chaque itération, la solution courante est associée à un système d'équations qui la définit :

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour } i \in \mathcal{B} \end{array}$$

Ce système s'appelle un **dictionnaire**.

Les variables de gauche sont appelées **variables de base** et notées $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m_+$. L'ensemble des variables en base est appelé **base**.
$\mathcal{B}$ représente les indices des variables en base.

Les variables qui ne sont pas dans la base, sont appelées **variables hors-base** et notées $\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n_+$.
$\mathcal{N}$ représente l'ensemble des indices des variables hors-base.

Dictionnaires

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour tout } i \in \mathcal{B} \end{array}$$

- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ forment une partition de l'ensemble des indices
- Chaque dictionaire définit une **solution de base** que l'on obtient en posant $\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = 0$.
- Un dictionnaire est **réalisable** si la solution de base associée est telle que $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \geq 0$.

Dictionnaire initial

$$\begin{array}{rcll} z = & & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ x_{n+i} = & b_i - & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \text{pour } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Initialement :

- La base initiale est formée des variables d'écart $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{n+1, \ldots, n+m\}$.
- Les variables hors-base sont les variables initiales du problème, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$.
- *Attention, la base initiale peut ne pas être réalisable. On verra plus tard ce qu'il faut faire dans ce cas.*

Itération (pivotage)

Itération

- A chaque itération de l'algorithme du simplex, une variable hors-base va entrer dans la base, tandis qu'une variable en base sortira de la base $\rightarrow$ **pivotage**.
- Cette opération revient à se déplacer d'un point extrême à un point extrême voisin le long d'une arête du polyèdre.

Choix de la variable entrante

$$
\begin{array}{rlll}
z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\
x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour tout } i \in \mathcal{B}
\end{array}
$$

Les coefficients $\bar{c}_j$, $j \in \mathcal{N}$ sont appelés les **coûts réduits**. Ils représentent l'impact de l'augmentation d'une variable sur l'objectif.

Condition d'optimalité :
La solution de base est optimale si et seulement si tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls :

$$\bar{c}_j \leq 0, \quad \text{pour tout } j \in \mathcal{N}.$$

Choix de la variable entrante

$$\begin{array}{llll} z = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour tout } i \in \mathcal{B} \end{array}$$

Choix de la variable entrant en base :
On choisit une variable x_k de $\mathcal{N}$ dont le coût réduit $\bar{c}_k$ est positif.

Il peut y avoir plusieurs variables candidates pour entrer en base.
La **règle de pivotage** permet de choisir laquelle va entrer en base.
Exemples de règle de pivotage.

- *Plus grand coût réduit.*
- *Plus petit indice.*

Choix de la variable sortante

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour tout } i \in \mathcal{B} \end{array}$$

Supposons que la variable x_k est choisie pour entrer en base.
Le vecteur formé par les coefficient $\bar{a}_{i,k}$, $i \in \mathcal{B}$ indique l'impact sur les variables en base de l'augmentation de la variable x_k.

- Si $\bar{a}_{i,k} \leq 0$, aumgmenter x_k entraine une augmentation de x_i.
- Si $\bar{a}_{i,k} > 0$, augmenter x_k entraine une diminution de $x_i \Rightarrow$ attention à la positivité de x_i.

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{i,k} x_k \geq 0 \Rightarrow x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,k}}$$

Choix de la variable sortante

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \qquad \text{pour tout } i \in \mathcal{B} \end{array}$$

Choix de la variable sortante :
La variable qui sort de la base est la première variable à s'annuler lorsque x_k (la variable entrante) augmente :

$$\text{Choisir } s \in \mathcal{B} \text{ tel que } s = \text{argmin}_{i \in \mathcal{B}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,k}} : \bar{a}_{i,k} > 0 \right\}$$

Il peut y avoir plusieurs variables candidates pour sortir de la base. Si c'est le cas, la base suivante sera **dégénérée**.

Problème non-borné :
Si $\bar{a}_{i,k} \leq 0$ pour tout $i \in \mathcal{B}$, il n'y a pas de candidat pour sortir de la base et le problème est **non-borné**.

Pivotage

Mise à jour du système

- On entre la variable x_k en base et on sort x_s
- On élimine x_k de l'expression de z
- On élimine x_k de l'expression des x_i ($i \in \mathcal{B}$, $i \neq k$)

Pivotage

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B} \end{array}$$

Il reste à reconstruire le système d'équation ci-dessus pour la nouvelle base. C'est le **pivotage**.

$$\begin{array}{rlllll} z & = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{c}_j x_j & +\bar{c}_k x_k & \\ x_i & = & \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{i,j} x_j & -\bar{a}_{i,k} x_k & \forall i \in \mathcal{B}\setminus\{s\} \\ x_s & = & \bar{b}_s- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{s,j} x_j & -\bar{a}_{s,k} x_k & \end{array}$$

Pivotage

$$
\begin{array}{rlll}
z = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\
x_i = & \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B}
\end{array}
$$

On entre la variable x_k en base et on sort x_s

$$
\begin{array}{rrclll}
z & -\bar{c}_k x_k & = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{c}_j x_j & \\
x_i & +\bar{a}_{i,k} x_k & = & \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B}\setminus\{s\} \\
 & +\bar{a}_{s,k} x_k & = & \bar{b}_s- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{s,j} x_j \quad \text{- } x_s &
\end{array}
$$

Pivotage

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B} \end{array}$$

On ramène le coefficient de x_k à 1

$$\begin{array}{rrlll} z & -\bar{c}_k x_k & = \bar{z}+ & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i & +\bar{a}_{i,k} x_k & = \bar{b}_i- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{i,j} x_j & \\ & x_k & = \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}}- & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}} x_j & - \frac{1}{\bar{a}_{s,k}} x_s \end{array}$$

Pivotage

$$
\begin{array}{rlll}
z = & \bar{z} + & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\
x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B}
\end{array}
$$

On élimine x_k de l'expression de z

$$
\begin{array}{rrclll}
z & & = & \bar{z} + \bar{c}_k \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}} + & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} (\bar{c}_j + \bar{c}_k \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}}) x_j & - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{s,k}} x_s \\
x_i & + \bar{a}_{i,k} x_k & = & \bar{b}_i - & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \bar{a}_{i,j} x_j & \\
 & x_k & = & \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}} - & \sum_{j\in\mathcal{N}\setminus\{k\}} \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}} x_j & \text{-}\ \frac{1}{\bar{a}_{s,k}} x_s
\end{array}
$$

Pivotage

$$\begin{array}{rlll} z = & \bar{z} + & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j & \\ x_i = & \bar{b}_i - & \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{i,j} x_j & \forall i \in \mathcal{B} \end{array}$$

On élimine x_k de l'expression des x_i $(i \in \mathcal{B},\ i \neq k)$

$$\begin{array}{lllll} z & = & \bar{z} + \bar{c}_k \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}} + & \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{k\}} (\bar{c}_j + \bar{c}_k \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}}) x_j & - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{s,k}} x_s \\ x_i & = & \bar{b}_i - \bar{a}_{i,k} \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}} - & \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{k\}} (\bar{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,k} \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}}) x_j & + \frac{\bar{a}_{i,k}}{\bar{a}_{s,k}} x_s \\ x_k & = & \frac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{s,k}} - & \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{k\}} \frac{\bar{a}_{s,j}}{\bar{a}_{s,k}} x_j & - \frac{1}{\bar{a}_{s,k}} x_s \end{array}$$

Remarques

- On remarque le type de la variable (variable initiale du problème ou variable d'écart) n'est pas pris en compte lors du pivotage.
- Tenter de faire sortir les variables d'écart pour faire entrer les variables initiales n'est pas une bonne stratégie
- Seuls les **coûts réduits** doivent être pris en compte
- On s'arrête lorsque tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls (pas quand une itération n'est pas améliorante)

Sommaire

Phase I du simplex

Cette phase permet de trouver une solution de base réalisable initiale lorsque la base donnée par les variables d'écart n'est pas réalisable.

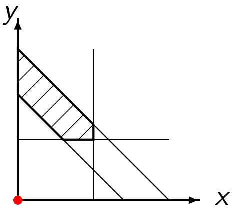
D'où vient le problème ?

$$\sum_j a_{i,j} x_j \leq b_i \text{ avec } b_i < 0$$

Après ajout de la variable d'écart et écriture sous forme de dictionnaire, on obtient :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_j a_{i,j} x_j .$$

Comme $b_i < 0$ la solution de base n'est pas réalisable.



Calculer une solution initiale

1. Pour chaque contrainte i t.q $b_i < 0$, on ajoute une variable artificielle x'_{n+i} avec un coeff. de -1 en plus de la variable d'écart :

$$\sum_j a_{i,j}x_j + x_{n+i} - x'_{n+i} = b_i$$

2. On crée un objectif artificiel

$$\max \sum_{i:b_i<0} -x'_{n+i}.$$

3. Une base initiale **pour le problème artificiel** est obtenue avec les variables artificielles des contraintes avec $b_i < 0$ et les variables d'écarts des contraintes avec $b_i \geq 0$.
4. On résout le problème avec l'algorithme du simplexe à partir de cette solution

Résultat de la phase 1

A la fin de cette résolution :

- S'il existe au moins un i tel que $x'_{n+i} > 0$, alors les variables artificielles sont nécessaires pour avoir une solution réalisable.
  Alors, le problème initial est **irréalisable**.
- Si $x'_{n+i} = 0$ pour tout i tel que $b_i < 0$, toutes les variables artificielles sont hors-base.
  On a une solution de base réalisable **pour le problème initial** donnée par la base optimale de la Phase I.
  1. Supprimer les variables artificielles.
  2. Reprendre l'objectif initial.
  3. Utiliser l'algorithme du simplex avec la solution initiale trouvée

Exemple de phase 1

Forme normale

$$\max 5x + y$$
$$x + y \leq 10$$
$$-x - y \leq -7$$
$$x \leq 5$$
$$-y \leq -4x, y \geq 0$$

Forme standard

$$\max 5x + y$$
$$x + y + s_1 = 10$$
$$-x - y + s_2 = -7$$
$$x + s_3 = 5$$
$$-y + s_4 = 4$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Exemple de phase 1

Forme normale

$$\begin{aligned} \max 5x + y \\ x + y \leq 10 \\ -x - y \leq -7 \\ x \leq 5 \\ -y \leq -4 x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Problème artificiel

$$\begin{aligned} \max w = -s_2' - s_4' \\ x + y + s_1 = 10 \\ -x - y + s_2 - s_2' = -7 \\ x + s_3 = 5 \\ -y + s_4 - s_4' = 4 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_2', s_4' \geq 0 \end{aligned}$$

Résolution du problème artificiel

$$
\begin{aligned}
\max w = -s_2' - s_4' \\
x + y + s_1 = 10 \\
-x - y + s_2 - s_2' = -7 \\
x + s_3 = 5 \\
-y + s_4 - s_4' = 4 \\
x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_2', s_4' \geq 0
\end{aligned}
$$

Résolution du problème artificiel

$$
\begin{aligned}
\max w &= -11 + x + 2y - s_2 \\
s_1 &= 10 - x - y \\
s_2' &= 7 - x - y + s_2 \\
s_3 &= 5 - x \\
s_4' &= 4 - y
\end{aligned}
$$

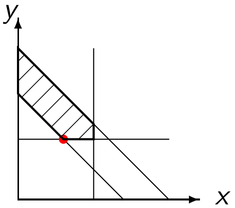
Résolution du problème artificiel

$$
\begin{aligned}
\max w &= -3 + x - s_2 - 2s_4' \\
s_1 &= 6 - x - s_4' \\
s_2' &= 3 - x + s_2 - s_4' \\
s_3 &= 5 - x \\
y &= 4 - s_4'
\end{aligned}
$$

Résolution du problème artificiel

$$\begin{aligned} \max w &= 0 - s_2' - 23s_4' \\ s_1 &= 3 - s_2 - s_2' \\ x &= 3 + s_2 - s_2' - s_4' \\ s_3 &= 2 - s_2 + s_2' + s_4' \\ y &= 4 - s_4' \end{aligned}$$

Fonction objectif 0 : on s'arrête. Solution trouvée : $x = 3, y = 4$.



Bases dégénérées

Quand plusieurs variables sont candidates pour sortir de la base, la nouvelle solution de base aura une (ou plusieurs) variables de base prenant la valeur 0.
On dit alors que la solution de base est **dégénérée**.
Exemple :

$$\begin{array}{rcccccccc} z = & 0 & + & 2x_1 & - & 1x_2 & + & 8x_3 \\ x_4 = & 1 & + & 0x_1 & + & 0x_2 & - & 2x_3 \\ x_5 = & 3 & - & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 \\ x_6 = & 2 & + & 1x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 \end{array}$$

Solution : $(0, 0, 0, 1, 3, 2)$ et $z = 0$.
On fait entrer x_3 en base.
x_4, x_5 et x_6 sont candidates pour sortir de la base.
Choisissons x_4.

Bases dégénérées

$$
\begin{array}{rcccccccc}
z = & 4 & + & 2x_1 & - & 1x_2 & - & 4x_4 \\
x_3 = & \frac{1}{2} & + & 0x_1 & + & 0x_2 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 = & 0 & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_4 \\
x_6 = & 0 & + & 1x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_4
\end{array}
$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$.
x_1 entre en base et x_5 sort.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
z = & 4 & - & 1x_5 & + & 3x_2 & - & 1x_4 \\
x_3 = & \frac{1}{2} & + & 0x_5 & + & 0x_2 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_1 = & 0 & - & \frac{1}{2}x_5 & + & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_4 \\
x_6 = & 0 & - & \frac{1}{2}x_5 & - & 1x_2 & + & \frac{7}{2}x_4
\end{array}
$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$.
x_2 entre en base et x_6 sort.

Bases dégénérées

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 4 & - & \frac{5}{2}x_5 & - & 3x_6 & + & \frac{19}{2}x_4 \\ x_3 & = & \frac{1}{2} & + & 0x_5 & + & 0x_6 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 & = & 0 & - & \frac{3}{2}x_5 & - & 2x_6 & + & \frac{17}{2}x_4 \\ x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_5 & - & 1x_6 & + & \frac{7}{2}x_4 \end{array}$$

Solution : $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ et $z = 4$.
x_4 entre en base et x_3 sort.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & \frac{27}{2} & - & \frac{5}{2}x_5 & - & 3x_6 & - & 19x_3 \\ x_4 & = & 1 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & - & 2x_3 \\ x_1 & = & \frac{17}{2} & - & \frac{3}{2}x_5 & - & 2x_6 & - & 17x_3 \\ x_2 & = & \frac{7}{2} & - & \frac{1}{2}x_5 & - & 1x_6 & - & 7x_3 \end{array}$$

Solution optimale : $(\frac{17}{2}, \frac{7}{2}, 0, 1, 0, 0)$ et $z = \frac{27}{2}$.

Solutions optimales multiples

Il peut arriver que dans le dictionnaire optimal, des variables hors-bases possèdent des coûts réduits nuls :

$$\bar{c}_i = 0, \text{pour } i \in \mathcal{N}$$

En effectuant une itération suplémentaire du simplexe en faisant entrer en base une variable x_i telle que $\bar{c}_i = 0$, on obtient une nouvelle solution optimale de base (avec le même objectif).

Si x_1^* et x_2^* sont deux solutions optimales, alors toutes solutions obtenues par une combinaison convexe de x_1^* et x_2^* est également une solution optimale :

$$x = \alpha x_1^* + (1 - \alpha) x_2^*, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \text{ est une solution optimale.}$$

Remarque

Remarque

À cause des bases dégénérées, une variable de coût réduit positif peut entrer en base sans améliorer la fonction objectif.

Il est possible de converger même avec des itérations n'améliorant pas strictement le coût de la solution.

Terminaison

En cas de dégénérescence, l'algorithme peut revenir sur une solution de base déjà visitée ($\rightarrow$ cycle). En pratique néanmoins, cela se passe rarement.
Il existe des règles de pivotage limitant les risques de cycle :

- règle de plus petit indice.
- perturbation des données : ajouter au membres de droite des contraintes des ϵ suffisamme petits.

Sommaire

Bilan du cours

À travailler en TD

- Algorithme du simplex
- Calculer une solution initiale
- Pivotage
- Attention à la dégénérence : cyclage possible !

À retenir pour la suite

- Forme standard
- Variables d'écart
- Notion de cout réduit
- Variables de base / hors base

Prochain cours

- Un concept central en programmation linéaire : la dualité