Chapitre 1

Trigonométrie et nombres complexes

Plan du cours

2 sept. 2015

§1 : Trigonométrie

I/ Le cercle trigonométrique

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé noté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (i.e. le sens contraire des aiguilles d'une montre). L'équation cartésienne du cercle est $x^2 + y^2 = 1$. Pour un angle orienté θ (cf. Figure ??), on peut lire graphiquement les trois valeurs suivantes :

$\cos(\theta) = \overline{OP} = \overline{QM}$
$\sin(\theta) = \overline{OQ} = \overline{PM}$
$\tan(\theta) = \overline{IR} = \dfrac{\overline{IR}}{\overline{OI}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OP}}$
(pour la dernière, on utilise le théorème de Thalès)

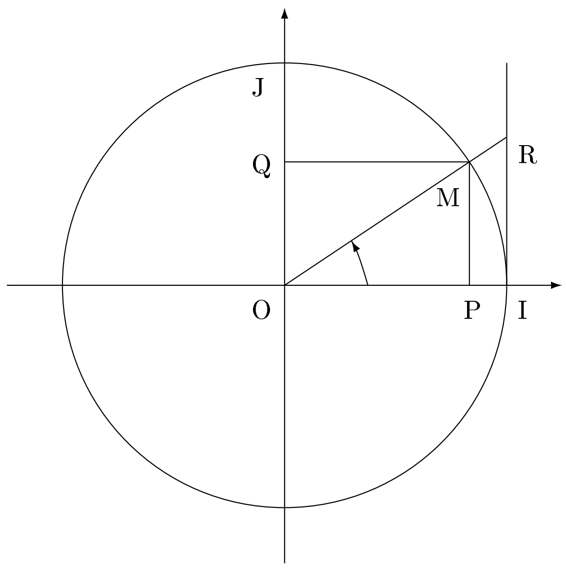


FIGURE 1 – Lecture de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ sur le cercle trigonométrique

On retrouve la définition habituelle $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. On voit également que la tangente est définie uniquement pour les angles $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.

II/ Formules de base

La formule fondamentale à retenir est la suivante :

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

En divisant cette égalité par $\cos(\theta)^2$, on déduit immédiatement

$$1 + \tan(\theta)^2 = \frac{1}{\cos(\theta)^2},$$

que l'on retrouvera dans le chapitre sur les dérivées.
Il est important de connaître par cœur les valeurs de cos, sin et tan pour les angles 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$,

$\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π. Elles sont redonnées dans le formulaire.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	0

Pour un angle θ donné, on peut avoir besoin de l'un des angles associés, i.e. un des angles $-\theta$, $\pi+\theta$, $\pi-\theta$, $\frac{\pi}{2}+\theta$ ou $\frac{\pi}{2}+\theta$. On a alors des relations sur les cos, sin et tan, qui sont données dans le formulaire, et peuvent se retrouver graphiquement (cf. Figure **??**).

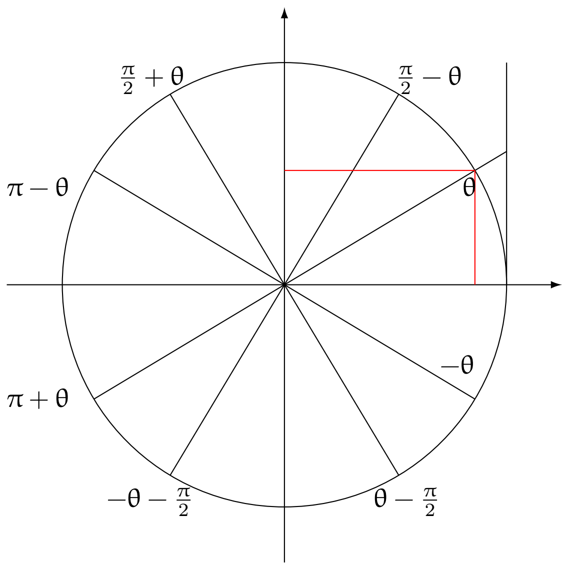


FIGURE 2 – Angles associés : on peut lire par exemple $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ ou $\tan(\pi+\theta) = \tan(\theta)$. Voir les autres formules dans le formulaire.

On peut également trouver des formules pour les sommes de cosinus (et/ou sinus, tangente), ou pour les cosinus (et/ou sinus, tangente) de sommes. Elles sont regroupées dans le formulaire et doivent être connues!!!

Remarque: *À partir de la formule fondamentale et de la formule*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

et en utilisant les formules sur les angles associés, on peut redémontrer toutes les autres formules écrites dans le formulaire.

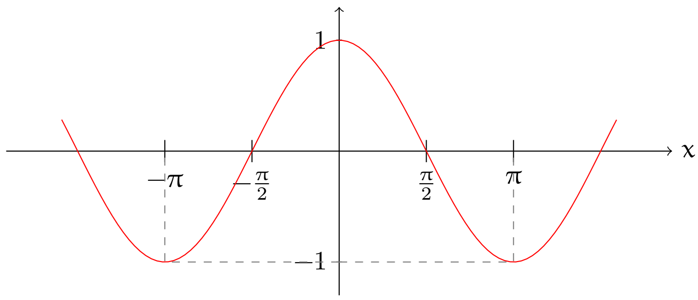


FIGURE 3 – Courbe représentative de cos

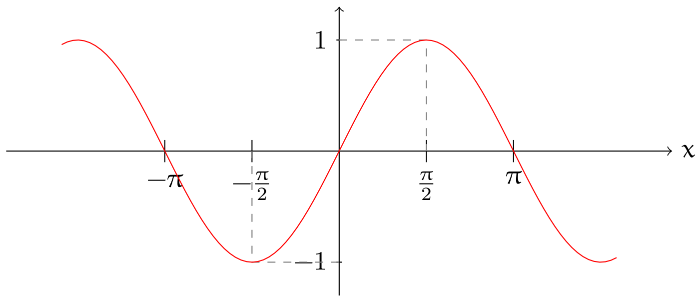


FIGURE 4 – Courbe représentative de sin

Exercice : (Exemple d'application) En utilisant la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et les angles associés, montrer que

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

En déduire la formule

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

III/ Les fonctions cos, sin, tan

On peut voir cos, sin et tan comme des fonctions. cos et sin sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, alors que tan est définie uniquement sur les intervalles de la forme

$$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1 : (propriétés des fonctions cos, sin *et* tan*)*
- cos et sin sont des fonctions $2\pi-$périodiques,
- tan est $\pi-$périodique,
- cos est une fonction paire,
- sin et tan sont des fonctions impaires.

Il faut avoir en tête les courbes représentatives de ces trois fonctions (cf. figures **??** à 5).

IV/ À retenir

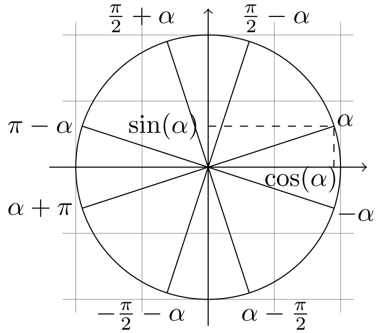
1. les angles remarquables,

2. les formules de trigo (soit les connaître par cœur, soit être capable de retrouver chaque formule en moins de 2 minutes),
3. savoir résoudre les équations du type $\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ où α est une valeur donnée,
4. savoir résoudre les équations du type $\sin(\theta) = \sin(\alpha)$ où α est une valeur donnée,
5. savoir résoudre les équations du type $\tan(\theta) = \tan(\alpha)$ où α est une valeur donnée.

Formulaire de Trigonométrie

Angles remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Angles associés :

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

Formules fondamentales :

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$

Équations trigonométriques de base :

$$\sin(x)=\sin(a) \iff \begin{cases} x = a[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi - a[2\pi] \end{cases}$$

$$\cos(x)=\cos(a) \iff \begin{cases} x = a[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -a[2\pi] \end{cases}$$

$$\tan(x)=\tan(a) \iff x = a[\pi]$$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a) = 2\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules de multiplication :

$$\cos(a)\cos(b)=\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\cos(a)\sin(b)=\tfrac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b)$$
$$\sin(a)\sin(b)=\tfrac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\cos^2(a)=\tfrac{1}{2}(1+\cos(2a))$$
$$\sin^2(a)=\tfrac{1}{2}(1-\cos(2a))$$

Formules de la tangente du demi-angle : (on pose $t=\tan(\frac{x}{2})$)

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Formules de Simpson :

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$

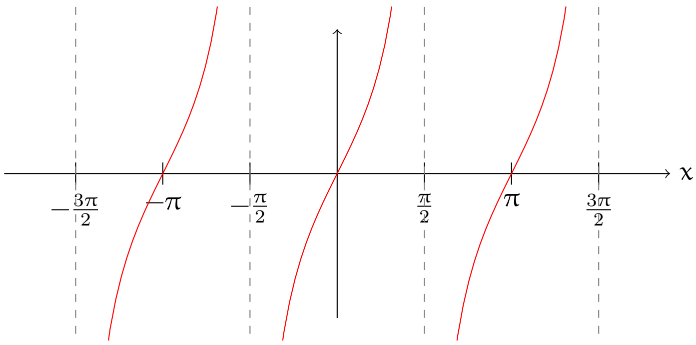


FIGURE 5 – Courbe représentative de tan

§2 : Nombres complexes

I/ Définition et forme algébrique

Motivation : Les équations du second degré à coefficients réels admettent soit 2 solutions réelles distinctes, soit une racine double, soit aucune solution réelle, comme par exemple l'équation $x^2 + 1 = 0$. Pour que toutes ces équations aient deux solutions, on peut définir un nombre i qui vérifie

$$i^2 = -1$$

Définition 2 : On définit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des éléments z de la forme

$$z = a + ib, \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

a est appelée *partie réelle* de z, et notée $\mathrm{Re}\,(z)$. b est appelée *partie imaginaire* de z, et notée $\mathrm{Im}\,(z)$. L'écriture $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est appelée *forme algébrique* de z.
On peut identifier l'ensemble des complexes par le plan $\mathbb{R}^2$, en associant à $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b) (cf. figure 6). On dira également que le point M a pour *affixe* z. Dans cette représentation, les nombres complexes de la forme $z = a + 0i$ (partie imaginaire nulle) sont représentés par l'axe des abscisses, et on peut donc voir l'ensemble des réels comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Par ailleurs, l'axe des ordonnées représente les nombres complexes de partie réelle nulle, i.e. les nombres de la forme $0 + ib$, $b \in \mathbb{R}$; on appelle cet ensemble l'ensemble des imaginaires purs, et on le note généralement $i\mathbb{R}$.

II/ Règles de calcul

On peut généralement manipuler les nombres complexes comme des nombres habituels, i.e. on peut :

– faire la somme de deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'),$$

– faire le produit de deux nombres complexes :

$$(a + ib) * (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b),$$

– la somme et le produit sont associatifs et commutatifs.

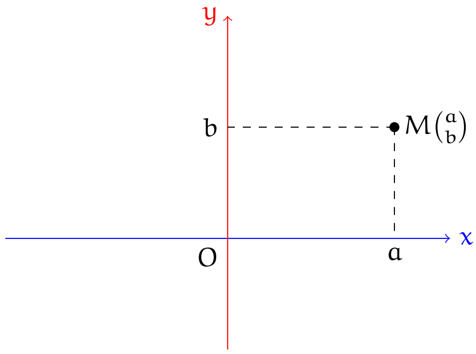


FIGURE 6 – Identification entre $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$. L'axe des abscisses (en bleu) représente $\mathbb{R}$, l'axe des ordonnées représente les imaginaires purs $i\mathbb{R}$. M est le point d'affixe $z = a + ib$.

Par ailleurs, si on considère deux nombres complexes $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on a :

$$z = z' \quad \text{si et seulement si} \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

En particulier, $z = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z) = 0$.

Remarque: *[Mise en garde] Lorsqu'on veut manipuler la forme algébrique d'un nombre complexe, il faut bien s'assurer que a et b sont RÉELS ! !*

Remarque: *Il n'y a pas de relation d'ordre sur l'ensemble des nombres complexes, i.e. $\leqslant$ n'a pas de sens entre deux nombres complexes.*

Définition 3 : Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = a + ib$. On définit le *conjugué* de z comme le nombre complexe :

$$\bar{z} := a - ib.$$

Encore une fois, il faut bien s'assurer que la forme algébrique est correcte, i.e. que a et b sont bien des nombres réels.

Proposition 4 : Pour $z \in \mathbb{C}$, les deux relations suivantes sont très utiles :

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)\,,$$
$$z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

En particulier, on notera que $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ et $z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$.

III/ Module et argument

Définition 5 : Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit le *module* de z par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Pour que la définition précédente aie un sens, il faut s'assurer que $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$. On utilise la forme algébrique $z = a + ib$, ce qui donne,

$$z\bar{z} = a^2 + b^2,$$

donc la définition précédente a un sens. Notons au passage que $|z| \in \mathbb{R}^+$.

Remarque: *Pour $z = a + ib$ et M le point de coordonnées (a, b) dans le plan (d'origine O), on a*

$$|z| = \overline{OM}.$$

Avec cette représentation, l'ensemble des nombres complexes de module 1 est le cercle trigonométrique.

Dans la section précédente, on a défini la somme et le produit de deux nombres complexes, mais pas le quotient. Formellement, imaginons que l'on puisse faire des opérations sur les complexes comme sur les nombres réels. On pourrait alors écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

La dernière expression étant toujours bien définie pour un nombre complexe différent de 0, on peut l'utiliser pour définir l'inverse d'un nombre complexe.

Définition 6 : Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$, on peut définir l'inverse de z par :

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

ce qui permet de faire des divisions sur les nombres complexes.

Proposition 7 : (Propriétés du module) Lorsque les quantités ont un sens, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} z = 0 &\Leftrightarrow |z| = 0 \\ |z + z'| &\leqslant |z| + |z'| \\ |zz'| &= |z|\,|z'| \\ \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|z|} \\ \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ |z^n| &= |z|^n \end{aligned}$$

Définition 8 : Pour $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 0$, on considère le point M du plan, d'affixe z. On appelle *argument* de z, et on note $\arg(z)$ une mesure de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le vecteur $\vec{OM}$ (cf. figure 7).

Remarque: *L'argument est défini modulo 2π.*

Proposition 9 : Soit $z \in \mathbb{C}$, d'argument θ. On a alors

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

Avec la forme algébrique $z = a + ib$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

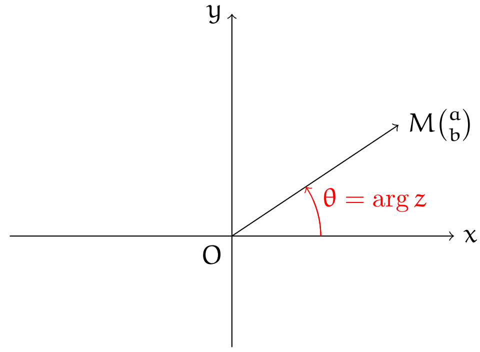


FIGURE 7 – Définition de l'argument d'un nombre complexe. $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = a+ib$ et M est le point d'affixe z.

Proposition 10 :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

IV/ Formes trigonométriques et exponentielles

<u>Définition 11 :</u> Soit $z \in \mathbb{C}$ de module r et d'argument θ. On vient de voir que

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

Cette écriture est appelée *forme trigonométrique* de z.
La forme trigonométrique correspond à la représentation d'un point en coordonnées polaires dans le plan. Ainsi, par exemple, le nombre complexe i correspond à $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
On introduit une nouvelle notation, en posant :

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

Il s'en suit qu'un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Cette écriture est appelée *forme exponentielle* de z.

Proposition 12 :

$$\left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right) = (rr')e^{i(\theta+\theta')},$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')},$$
$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$
$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta},$$
$$\left|re^{i\theta}\right| = r.$$

En particulier, tous les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ sont de module 1 (donc sur le cercle trigonométrique. Par ailleurs, pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul, si $z = re^{i\theta}$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

On retiendra également trois formules importantes :

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) && \text{(formule de Moivre),}\\
\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} && \text{(formule d'Euler),}\\
\sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} && \text{(formule d'Euler).}
\end{aligned}$$

V/ Applications à la résolution d'équations polynomiales

Rappelons que l'introduction des nombres complexes a été en partie motivées par le fait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. De même, il n'existe pas de nombre réel dont le carré soit un réel négatif. Avec les nombres complexes en revanche, on peut toujours calculer des racines carrées :

Proposition 13 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il existe deux solutions complexes à l'équation $z^2 = a + ib$. Plus précisément, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^2 = a + ib, \text{ et } (-z)^2 = a + ib.$$

Preuve : Il suffit de montrer qu'on a une solution, car si z est solution, $-z$ est évidemment solution. On écrit z sous forme algébrique, $z = x + iy$. On est donc ramenés à chercher x, y réels, tels que

$$(x + iy)^2 = a + ib. \tag{0.4}$$

En développant le carré, on obtient :

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on veut donc que x, y vérifient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = b & \text{(égalité des parties imaginaires)} \end{cases}$$

Par ailleurs, si z est solution, on peut prendre le module dans l'équation (0.4), ce qui donne :

$$|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, il s'en suit que

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En sommant les équations sur $x^2 + y^2$ et sur $x^2 - y^2$, on obtient

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le membre de droite de cette équation est bien un nombre réel positif, donc on a :

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas :

1. si $x \neq 0$, on peut alors écrire
$$y = \frac{b}{2x} = \pm\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}.$$
2. si $x = 0$, cela signifie que $b = 0$ et que $a \leqslant 0$, auquel cas l'équation $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ devient
$$y^2 = \sqrt{a^2} = |a|,$$
si bien que $y = \pm\sqrt{|a|}$.

On a donc bien trouvé un nombre complexe z solution de $z^2 = a + ib$.

□

Remarque: *Si* $z^2 = a + ib$*, on dira que* z *est* une racine carrée *de* $a + ib$*. Comme il n'y a pas de relation d'ordre sur* $\mathbb{C}$*, on ne peut pas définir LA racine carrée comme on le fait pour des réels. Notons enfin que l'on n'utilisera JAMAIS la notation* $\sqrt{\cdot}$ *pour des nombres complexes !*

Il faut être capable de calculer une racine carrée d'un nombre complexe. Ces calculs sont utiles pour la résolution d'équations polynomiales. En particulier, pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$, on peut toujours trouver une solution complexe à l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Plus précisément, une telle équation admet :

– soit deux solutions distinctes z_0 et z_1, auquel cas, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)(z - z_1),$$

– soit une racine double z_0, auquel cas, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

Le résultat étant vrai pour $a, b, c \in \mathbb{C}$, c'est en particulier vrai pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ainsi, les équations du second degré à coefficients réels qui n'ont pas de solutions réelles vont avoir des solutions dans $\mathbb{C}$.

Exercice : Résoudre l'équation $z^2 - 2(1 + i)z + 2 = 0$.

Solution : On cherche à écrire le polynôme sous la forme dite canonique, i.e. on essaie de reconnaître les termes de degré 1 et 2 comme le début du développement d'un carré. Ici, on veut donc résoudre

$$(z - (1 + i))^2 - (1 + i)^2 + 2 = 0.$$

Or, $(1 + i)^2 = 2i$, donc on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$(z - (1 + i))^2 = -2 - 2i.$$

Posons pour l'instant $Z = z - (1 + i)$. On a alors z solution de l'équation de départ si et seulement si $Z^2 = -2 - 2i$, auquel cas $z = Z + (1 + i)$. Il faut donc calculer une racine carrée de $-2 - 2i$.

On peut par exemple utiliser les formules vues précédemment (ici, $a = b = -2$, et, en notant $Z = X + iY$, on peut prendre

$$X = \sqrt{-1+\sqrt{2}}, \text{ et } Y = \frac{-1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}.$$

On obtient alors $Z = \pm(X + iY)$, ce qui donne les deux solutions

$$z = (1+i) \pm \left(\sqrt{-1+\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}\right).$$

Outre les polynômes du second degré, les nombres complexes permettent d'avoir des solutions pour toute équation polynomiale à coefficients réels ou complexes. Un dernier exemple important est celui des racines $n-$ème de l'unité.

Proposition 14 : Pour $n \in \mathbb{N}$ non nul, il existe n solutions distinctes à l'équation

$$z^n = 1.$$

Remarque: *Ces solutions sont appelées* racines $n-$èmes de l'unité, *et sont toutes sur le cercle trigonométrique. Voir figure 8 pour une illustration des racines troisièmes et quatrièmes de l'unité.*

Preuve : On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. On utilise ici la forme exponentielle de z, i.e. on cherche r, θ, avec $r > 0$ tels que

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = 1.$$

Cela revient à cherche r et θ tels que $r^n e^{in\theta} = 1$. En prenant le module dans cette équation, on voit que l'on cherche $r > 0$ tel que $r^n = 1$. Il s'en suit que $r = 1$, donc les racines $n-$èmes de l'unité sont bien sur le cercle trigonométrique.
Il reste à déterminer les valeurs possibles de θ. Puisque $r = 1$, l'équation se résume à

$$e^{in\theta} = 1.$$

En passant à la forme trigonométrique, on obtient

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1.$$

On peut alors identifier parties réelles et imaginaires ; on est donc ramenés à la résolution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(n\theta) & = & 1 \\ \sin(n\theta) & = & 0 \end{array}\right.$$

Il s'en suit que $n\theta = 0 \quad [2\pi]$, si bien que

$$\theta = 0 \quad \left[\frac{2\pi}{n}\right].$$

Cela peut se réécrire de la manière suivante : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Les angles étant définis modulo 2π, on voit qu'il n'y a en fait que n valeurs possibles, pour $k = 0, 1, \cdots (n-1)$.

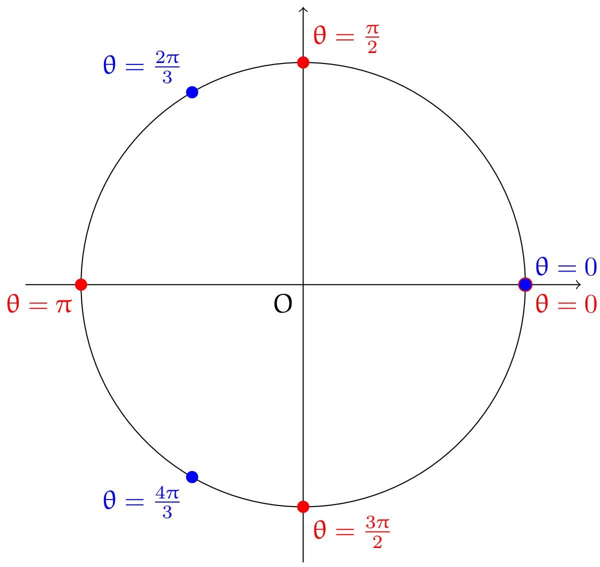


FIGURE 8 – Représentation des racines troisièmes (bleu) et quatrièmes (rouge) de l'unité.

$\square$

Remarque: *Evidemment, pour tout* n, 1 *est une solution particulière de l'équation* $z^n = 1$.

VI/ À retenir

1. les calculs de base sur les complexes (somme, différence, produit, quotient) doivent devenir aussi naturels que les calculs sur les réels,
2. représenter des complexes dans le plan,
3. savoir calculer module et argument d'un nombre complexe,
4. savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (ou exponentielle), en suivant la procédure :
   - On écrit $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique $z = a + ib$, avec donc $a, b \in \mathbb{R}$.
   - On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, si bien que :
   $$z = |z| \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$
   - On résout les équations trigonométriques
   $$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
5. savoir passer de la forme exponentielle (ou trigonométrique) à la forme algébrique, i.e., si $z = re^{i\theta}$, alors
   $$\mathrm{Re}\,(z) = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = r\sin(\theta).$$
6. savoir calculer des racines carrées,
7. savoir résoudre les équations du second degré, à coefficients réels ou complexes, en se ramenant à un calcul de racine carrée,
8. connaître les formules de Moivre et d'Euler.