Boules, mesures & boréliens

Frédéric Gaunard

sous la direction d'Etienne Matheron

Octobre 2007

UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
Sciences Technologies

Table des matières

Préambule 4

Chapitre 1. Préliminaires 5
1. Classes de parties 5
2. Régularité 7
3. Transformée de Fourier d'une mesure borélienne ; Mesure image 8
4. Extension des mesures 8
5. Théorème de recouvrement de Besicovitch 9

Chapitre 2. La tribu engendrée par les boules 14

Chapitre 3. Le contre-exemple de Davies 17
1. Construction de (X, d) 17
2. Boules ouvertes sur X 18
3. Construction des mesures ν_1 et ν_2 19

Chapitre 4. Une condition suffisante 22
1. Un résultat préliminaire 23
2. Préfaible densité de W dans $NA(1)$ 26

Chapitre 5. La classe monotone engendrée par les boules fermées 29
1. Cas hilbertien de dimension finie 29
2. Cas hilbertien de dimension infinie 36

Bibliographie 47

Préambule

Dans un espace métrique, la tribu borélienne est la tribu engendrée par les parties ouvertes. Il est bien connu que si l'espace est séparable, alors les boules ouvertes engendrent également cette tribu (nous verrons par ailleurs que la condition de séparabilité n'est pas nécessaire pour obtenir ce résultat).

Il découle du théorème des classes monotones que deux mesures de probabilité boréliennes qui coïncident sur tous les ouverts de l'espace sont égales. Notre motivation est alors de savoir si on peut remplacer les ouverts par les boules ouvertes en conservant ce résultat. Autrement dit, deux mesures de probabilité boréliennes qui coïncident sur les boules sont-elles nécessairement égales ?

En toute généralité la réponse est négative, comme le montre le contre-exemple de R.O. Davies [**1**] qui construit un espace métrique compact (donc séparable) dans lequel on peut trouver deux mesures de probabilité boréliennes distinctes qui prennent les mêmes valeurs sur toutes les boules ouvertes.

Néanmoins, D. Preiss et J. Tiser [**2**] ont montré que dans un espace de Banach séparable, une mesure de probabilité borélienne est entièrement déterminée par ses valeurs sur les boules ouvertes.

Par ailleurs, l'ensemble des parties sur lesquelles les deux mesures de probabilité boréliennes coïncident est une classe monotone. Ainsi, si la classe monotone engendrée par les boules (ouvertes ou fermées) contient tous les boréliens, les mesures seront bien déterminées par leur valeurs sur les boules. Mais la condition est-elle nécessaire ?

D. Preiss et T. Keleti [**4**] ont montré que dans un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (donc dans un Banach séparable), la classe monotone engendrée par les boules fermées ne contenait pas tous les boréliens (alors que les mesures de probabilité boréliennes y sont bien déterminées par leurs valeurs sur les boules). En revanche, en dimension finie (comme nous le verrons avec l'article de M. Zeleny [**3**] dans le cas de la norme euclidienne), c'est toujours le cas.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1. Classes de parties

Rappelons quelques définitions concernant certaines classes de parties d'un ensemble :

Définition 1.1.1. une classe $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E est appelée *tribu* sur E si :
(T1) $E \in \mathcal{A}$.
(T2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
(T3) Si $(A_i)_{i\in I}$ famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.1.2.
(i) *L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.*
(ii) *Pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de E, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, appelée tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et notée $\sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration. (i) Evident.
(ii) Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(E)$. La famille de tribus contenant $\mathcal{C}$ n'est pas vide puisqu'elle contient $\mathcal{P}(E)$. On pose alors $\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\tau\ tribu,\, \mathcal{C}\in\tau} \tau$. $\square$

Définition 1.1.3. Si E est un espace topologique, on appelle *tribu borélienne* de E la tribu engendrée par la classe $\mathcal{O}$ des ouverts de E et on la note $\mathcal{B}(E)$. Les élements de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés *boréliens* de E.

Définition 1.1.4. Une classe $\mathcal{M}$ de parties d'un ensemble E est appelée *classe monotone* si :
(T1) $E \in \mathcal{M}$.
(T2′) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{M}$.
(M1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Remarque 1.1.5.
(i) Une tribu sur E est une classe monotone.
(ii) On peut remplacer l'hypothèse **(M1)** par l'hypothèse

($\mathbf{M1'}$) Si $(A_n)_n$ suite d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints, alors $\displaystyle\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$.

(iii) Si une classe de parties $\mathcal{M}$ vérifie les hypothèses ($\mathbf{T1}$), ($\mathbf{T2}$) et ($\mathbf{M1'}$) c'est une classe monotone.

(iv) On peut définir pour une classe $\mathcal{C}$ de parties de E la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$, que l'on note $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. On a clairement $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Démonstration. Prouvons (ii) et (iii).

(ii) Supposons qu'on ait les hypothèses ($\mathbf{T1}$), ($\mathbf{T2'}$) et ($\mathbf{M1}$). Il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est stable par réunion disjointe finie. Soient $A, B \in \mathcal{M},\ A \cap B = \emptyset$. On a donc $A \subset B^C$ donc $B^C \setminus A \in \mathcal{M}$ mais $A \cup B = (B^C \setminus A)^C \in \mathcal{M}$. Si par contre on a ($\mathbf{T1}$), ($\mathbf{T2'}$) et ($\mathbf{M1'}$), prenons une suite croissante $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors, $\bigcup_n A_n = \biguplus_n (A_{n+1} \setminus A_n) \in \mathcal{M}$.

(iii) Si $\mathcal{M}$ est une classe de parties vérifiant ($\mathbf{T1}$), ($\mathbf{T2}$) et ($\mathbf{M1'}$). Il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est stable par différence. Soient $A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B$. Alors $A \cap B^C = \emptyset$ donc $A \cup B^C \in \mathcal{M}$ mais alors $B \setminus A = (A \cup B^C)^C \in \mathcal{M}$. □

Lemme 1.1.6. *Une classe monotone $\mathcal{M}$ stable par intersections finies est une tribu.*

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors, $\forall n,\ A_n^c \in \mathcal{M}$ et donc par hypothèse, $\forall N,\ (\bigcup_{n=0}^N A_n)^c = \bigcap_{n=0}^N A_n^c \in \mathcal{M}$. Donc, par stabilité par complémentation, la suite croissante $(\bigcup_{n=0}^N A_n)_N$ a tous ses éléments dans $\mathcal{M}$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. □

Théorème 1.1.7. *(théorème des classes monotones)*

Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E stable par intersections finies. Alors, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu (elle contient $\mathcal{C}$). Par le lemme précédent, il suffit de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersections finies.

Soit $\mathcal{M}_1 := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ \forall B \in \mathcal{C}\}$. C'est clairement une classe monotone et $\mathcal{C}$ étant stable par intersections finies par hypothèse, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$ donc $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Soit maintenant $\mathcal{M}_2 := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$.C'est encore une classe monotone et de $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ on déduit que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_2$, d'où $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$. □

Corollaire 1.1.8. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité boréliennes sur un espace métrique X qui coïncident sur les ouverts de X.*

Alors, $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ la classe des ouverts de X. $\mathcal{O}$ est bien stable par intersections finies, donc d'apres le théoreme des classes monotones, $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{M}(\mathcal{O})$.

Soit alors $\mathcal{M} := \{A \in \sigma(\mathcal{O}),\ \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{O}$ donc $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{M}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{M}$, d'où $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{M}$ et $\mu_1 = \mu_2$. □

Définition 1.1.9. Une classe $\mathcal{V}$ de parties d'un ensemble E est appelée *système monotone* si

(**M1**) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante d'éléments de $\mathcal{V}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{V}$.
(**M2**) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante d'éléments de $\mathcal{V}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{V}$.

Définition 1.1.10. Une classe $\mathcal{D}$ de parties d'un ensemble E est appelée *système-$\mathcal{D}^\star$* si elle vérifie les hypothèses (**M1**), (**M2**) et (**M1**$'$).

Remarque 1.1.11.

(i) Un système-$\mathcal{D}^\star$ est un système monotone et une une classe monotone est un système-$\mathcal{D}^\star$.

(ii) On peut définir pour une classe $\mathcal{C}$ de parties de E le plus petit système monotone contenant $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{M}^\star(\mathcal{C})$ et le plus petit système-$\mathcal{D}^\star$, noté $\mathcal{D}^\star(\mathcal{C})$. On a clairement

$$\mathcal{M}^\star(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}^\star(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$$

Lemme 1.1.12. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un espace métrique X, stable par intersection finie et réunion finie. Alors, $\mathcal{M}^\star(\mathcal{C})$ est stable par réunion et intersection dénombrables.*

Lemme 1.1.13. *Notons $\mathcal{O}$ la classe des ouverts d'un espace métrique X. Alors,* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{M}^\star(\mathcal{O})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C} := \mathcal{M}^\star(\mathcal{O})$. On veut montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X)$. Grâce au lemme 1.1.12 (et comme trivialement, $X \in \mathcal{C}$), il suffit juste de montrer que $\mathcal{C}$ est stable par complémentation.

Considérons $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{C},\ A^c \in \mathcal{C}\}$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est un système monotone. De plus, tout fermé étant intersection décroissante dénombrable d'ouverts, $\mathcal{D}$ contient tous les ouverts. Ainsi $\mathcal{D} = \mathcal{C}$. □

Introduisons alors quelques notations : notons $\mathfrak{B} := \{\text{boules fermées de } X\}$ (l'égalité de deux mesures sur les boules fermées est équivalente à l'égalité sur les boules ouvertes). Il est clair que si $\mathcal{M}(\mathfrak{B}) = \mathcal{B}(X)$ alors l'égalité des mesures sur $\mathfrak{B}$ impliquera l'égalité des mesures. A fortiori si $\mathcal{D}^\star(\mathfrak{B}) = \mathcal{B}(X)$ le résultat est encore vrai, et évidemment $\mathcal{M}(\mathfrak{B}) = \mathcal{B}$. Ce sera l'objet du quatrième chapitre.

2. Régularité

Définition 1.2.1. On dit qu'une mesure borélienne μ sur un espace métrique X est régulière si pour tout borélien A on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subset A \text{ compact }\} = \inf\{\mu(O);\ A \subset O \text{ ouvert }\}.$$

Lemme 1.2.2. *Soit μ une mesure borélienne finie sur un espace métrique X. Alors, $\forall A$ borélien , $\forall \epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert O tels que*

$$F \subset A \subset O \text{ et } \mu(O \setminus F) < \epsilon.$$

Théorème 1.2.3. *Soit μ une mesure borélienne finie sur un espace métrique X complet et séparable. Alors, μ est régulière.*

3. Transformée de Fourier d'une mesure borélienne ; Mesure image

Définition 1.3.1. Soient X un espace de Banach et μ une mesure borélienne sur X. La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est une application définie sur le dual $X^\star$ par

$$\hat{\mu}(x^\star) := \int_X e^{i\langle x^\star,\, x\rangle} d\mu(x)$$

Théorème 1.3.2. *(Injectivité de la transformation de Fourier)*
Deux mesures boréliennes finies ayant même transformée de Fourier sont égales.

Définition 1.3.3. Soient μ une mesure borélienne sur un espace de Banach X, $x^\star$ une forme linéaire sur X et $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$. On appelle *mesure image* de μ par $x^\star$ sur $\mathcal{A}$ la mesure $x^\star[\mu]$ définie comme suit :

$$\text{pour } A \in \mathcal{A},\; x^\star[\mu](A) := \mu({x^\star}^{-1}(A)).$$

Remarque 1.3.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{T}-$mesurable. Alors,

$$\int f dx^\star[\mu] = \int f \circ x^\star d\mu.$$

En particulier, si μ_2 est une autre mesure borélienne sur X et que

$$x^\star[\mu_1] = x^\star[\mu_2],$$

alors

$$\hat{\mu}_1(x^\star) = \int e^{i\langle x^\star,\, x\rangle} d\mu_1(x) = \int e^{it} dx^\star[\mu_1](t) = \int e^{it} dx^\star[\mu_2](t) = \hat{\mu}_2(x^\star).$$

4. Extension des mesures

Définition 1.4.1. On appelle *semi-algèbre de parties* d'un ensemble E, toute famille $\mathcal{C}$ de parties de E telle que :
(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$,
(ii) $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie,

$(iii)\forall A,\ B \in \mathcal{C}$ avec $A \subset B,$ il existe $C_1, .., C_k \in \mathcal{C}$ deux à deux disjoints tels que

$$B \setminus A = \biguplus_{i=1}^{k} C_i$$

Théorème 1.4.2. *(Théorème d'extension de Carathéodory)*
Soient $\mathcal{C}$ une semi-algèbre de parties d'un ensemble E et $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :
(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) μ est $\sigma-$additive sur $\mathcal{C}$.
Alors, μ se prolonge en une mesure sur $\sigma(\mathcal{C})$.

5. Théorème de recouvrement de Besicovitch

$\mathbb{R}^n$ est dans cette section muni de la norme euclidienne.

Théorème 1.5.1. *(Théorème de recouvrement de Besicovitch)*
Il existe des constantes $P(n)$ et $Q(n)$ (ne dépendant que de n) possédant les propriétés suivantes :
Soient A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une famille de boules fermées telles que tout point de A est centre d'une boule de $\mathcal{B}$ et

$$sup\{diam(B);\ B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Alors,
(i) Il existe une famille au plus dénombrable de boules $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{B}$ recouvrant A telle que chaque point de $\mathbb{R}^n$ appartient à au plus $P(n)$ boules de la famille.
(ii) Il existe des sous-familles $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_{Q(n)}$ de $\mathcal{B}$ formées de boules fermées deux à deux disjointes et telles que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n)} \bigcup \mathcal{B}_i.$$

Pour la preuve de ce résultat, nous allons utiliser un petit lemme :

Lemme 1.5.2. *Il existe un entier naturel $N(n)$ (ne dépendant que de n) vérifiant la propriété suivante :*
Si $a_1, ..., a_k$ sont k points de $\mathbb{R}^n$ et $r_1, ..., r_k$ k nombres positifs tels que

$$a_i \in \overline{B}(a_j, r_j) \text{ pour } j \neq i \text{ et } \bigcap_{i=1}^{k} \overline{B}(a_i, r_i) \neq \emptyset,$$

alors $k \leq N(n)$.

Démonstration. Nous pouvons supposer que $a_i \neq 0$ pour $i = 1, ..., k$ et que

$$0 \in \bigcap_{i=1}^{k} \overline{B}(a_i, r_i).$$

Alors on a, pour $i \neq j$, $||a_i|| \leq r_i < ||a_i - a_j||$.
Rappelons alors le fait suivant :
si $a, b \in \mathbb{R}^2,\ 0 < ||a|| < ||a-b||$ et $0 < ||b|| < ||a-b||$ alors $||\frac{a}{||a||} - \frac{b}{||b||}| \geq 1$.

On voit (en particulier que si b est tel que $b \notin B(a, ||a||)$ et $|\frac{b}{||b||} - \frac{a}{||a||}| < 1$, alors $a \in B(b, ||b||)$.

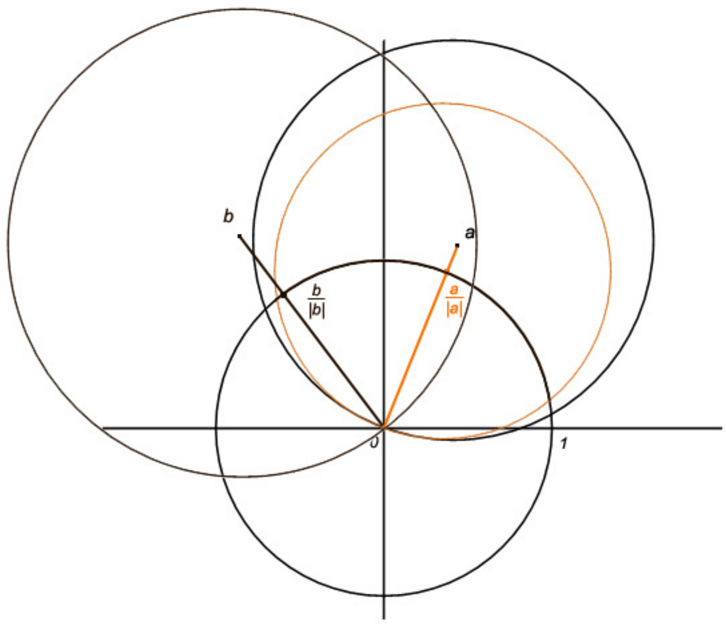

Fig.1

Fixons $i \neq j$. On se place donc le plan contenant 0, a_i et a_j, le fait implique alors que $||\frac{a_i}{||a_i||} - \frac{a_j}{||a_j||}|| \geq 1$. Mais la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ étant compacte, on peut trouver un $\frac{1}{2}-$réseau pour celle-ci. Notons $N(n)$ le cardinal de ce dernier. Il est alors immédiat que $N(n)$ convient. $\square$

Démonstration. (du théorème de Besicovitch)
(i) Pour $x \in A$, il existe $r(x)$ tel que $\overline{B}(x, r(x)) \in \mathcal{B}$. Notons alors

$$M_1 := \sup\{r(x);\ x \in A\} < \infty.$$

Prenons alors $x_1 \in A$ tel que $r(x_1) \geq \frac{M_1}{2}$. Puis par récurrence, on construit une suite aussi longue que possible (finie car A borné) $x_1, ..., x_{k_1}$ telle que

$$j \in \{2, .., k_1\}, \quad x_j \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{B}(x_i, r(x_i)) \text{ et } r(x_j) \geq \frac{M_1}{2}.$$

Posons ensuite

$$M_2 := \sup\{r(x);\ x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} \overline{B}(x_i, r(x_i))\} \leq \frac{M_1}{2}.$$

On construit alors une nouvelle suite aussi longue que possible (toujours finie) $x_{k_1+1}, ..., x_{k_2}$ telle que

$$j \in \{2, .., k_2\}, \quad x_j \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \overline{B}(x_i, r(x_i)) \text{ et } r(x_j) \geq \frac{M_2}{2}.$$

On réitère le procédé afin d'obtenir une suite d'entiers strictement croissante

$$0 = k_0 < k_1 < k_2 < ...,$$

une suite décroissante de nombres positifs

$$M_1 \geq M_2 \geq ... \text{ avec } M_{i+1} \leq \frac{M_i}{2},$$

et une suite de boules $B_i := \overline{B}(x_i, r(x_i))$ qui vérifient les propriétés suivantes : Notant, pour $j = 1, 2, ...,$ $I_j := \{k_{j-1} + 1, ..., k_j\}$,

$$\frac{M_j}{2} \leq r(x_i) \leq M_j \text{ pour } i \in I_j \tag{1}$$

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{,j} B_i \text{ pour } j = 1, 2, ... \tag{2}$$

$$x_i \in A \setminus \bigcup_{m \neq k} \bigcup_{j \in I_m} B_j \text{ pour } i \in I_k \tag{3}$$

(1) et (2) découlent directement de la construction. Vérifions néanmoins (3). Soient $m \neq k,\ j \in I_m$ et $i \in I_k$.

Si $m < k$, alors par (2) on a que $x_i \notin B_j$. Si $k < m$, alors $r(x_j) < r(x_i)$ or (2) implique que $x_j \notin B_i$ donc $x_i \notin B_j$.

Du fait que $M_i \to 0$, (1) implique que $r(x_i) \to 0$ et il découle alors de la construction que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Supposons maintenant qu'un point x appartienne à p boules B_i, c'est à dire que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{p} B_{m_i}.$$

Nous allons montrer que $p \leq P(n) := 16^n N(n)$.

A partir de (3) et du lemme précédent, nous déduisons que les indices m_i ne peuvent appartenir qu'à au plus $N(n)$ ensembles I_j, c'est à dire que

$$\#\{j;\ I_j \cap \{m_i;\ i = 1, ..., p\} \neq \emptyset\} \leq N(n).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\forall j = 1, 2, ... \quad \#(I_j \cap \{m_i;\ i = 1, ..., p\}) \leq 16^n \qquad (4)$$

Fixons un j et posons $I_j \cap \{m_i;\ i = 1, ..., p\} = \{l_1, ..., l_q\}$. Alors, grâce à (1) et (2) on s'aperçoit que les boules $\overline{B}(x_{l_i}, \frac{r(x_{l_i})}{4})$ (pour $i = 1, ..., q$) sont deux à deux disjointes et sont contenues dans $\overline{B}(x, 2M_j)$. On déduit donc que, notant $V_2^n := \lambda_n(\overline{B}(0, 1))$,

$$qV_2^n(\frac{M_j}{8})^n \leq \sum_{i=1}^{q} \lambda_n(\overline{B}(x_{l_i}, \frac{r(x_{l_i})}{4}) \leq \lambda_n(\overline{B}(x, 2M_j) = V_2^n 2^n M_j^n$$

et donc $q \leq 16^n$, ce qui prouve (4) et termine la preuve de (i).

(ii) Soient $B_1, B_2, ...$ les boules trouvées en (i), avec $B_i := \overline{B}(x_i, r_i)$. A étant borné, et chaque point de $\mathbb{R}^n$ étant dans au plus $P(n)$ B_i, on a alors que $\forall \epsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de boules B_i telles que $r_i \geq \epsilon$. On peut donc supposer que $r_1 \geq r_2 \geq ...$

Soit $B_{1,1} := B_1$ et en supposant que $B_{1,1}, ..., B_{1,j}$ soient construites, on définit

$$B_{1,j+1} := B_k$$

où $k := \inf\{l;\ B_l \cap \bigcup_{i=1}^{j} B_{1,i} = \emptyset\}$.

On construit ainsi par récurrence une sous-famille la plus longue possible (finie ou dénombrable)

$$\mathcal{B}_1 := \{B_{1,1}, B_{1,2}, ...\} \subset \{B_1, B_2, ...\}.$$

Si A n'est pas recouvert par $\bigcup \mathcal{B}_1$, on définit $B_{2,1} := B_k$ où $k := \inf\{l;\ B_l \notin \mathcal{B}_1\}$. Et on construit encore par le même procédé

$$B_{2,j+1} := B_{k'}$$

où $k' := \inf\{l;\ B_l \cap \bigcup_{i=1}^{j} B_{2,i} = \emptyset\}$.

Le processus nous donne une suite de sous-familles $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..$ de $\{B_1, B_2, ...\}$ où chaque $\mathcal{B}_i$ est formée de boules deux à deux disjointes.

Nous affirmons alors que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup \mathcal{B}_k$$

pour un certain $m \leq 4^n P(n) + 1$.

Supposons que m soit tel qu'on puisse trouver un $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup \mathcal{B}_k$. Montrons alors que nécessairement $m \leq 4^n P(n)$. Comme les boules B_i recouvrent A, on peut trouver B_i contenant x, mais alors $\forall k = 1, ..., m,\ B_i \notin \mathcal{B}_k$, ce qui signifie (par contruction des $\mathcal{B}_i$) que $B_i \cap B_{k,i_k} \neq \emptyset$ pour un certain i_k avec $r_i \leq r_{k,i_k}$. Mais il existe alors des boules B_k' de rayon $\frac{r_i}{2}$ contenues dans $2B_i \cap B_{k,i_k}$ pour chaque $k = 1, ..., m$. Or, chaque point de $\mathbb{R}^n$ étant contenu dans au plus $P(n)$ boules B_{k,i_k} , c'est donc pareil pour les plus petites boules B_k' et on déduit que

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{I}_{B_k'} \leq P(n)\mathbb{I}_{\bigcup_{k=1}^{m} B_k'}.$$

En utilisant maintenant que $B_k' \subset 2B_i$, nous avons

$$\begin{aligned}2^n V_2^n r_i^n &= \lambda_n(2B_i) \geq \lambda_n(\bigcup B'_k) = \int \mathbb{I}_{\bigcup_{k=1}^m B'_k} d\lambda_n \\ &\geq P(n)^{-1} \int \sum_{k=1}^m \mathbb{I}_{B'_k} d\lambda_n \\ &\geq mP(n)^{-1} 2^{-n} V_2^n r_i^n\end{aligned}$$

ou encore $m \leq 4^n P(n)$. □

CHAPITRE 2

La tribu engendrée par les boules

La tribu (resp. classe monotone) engendrée par les boules ouvertes est la même tribu (resp. classe monotone) que celle engendrée par les boules fermées. En effet,

$$B(x,r) = \bigcup_{n\geq 1} \overline{B}(x, r - \frac{1}{n}) \text{ et } \overline{B}(x,r) = \bigcap_{n\geq 1} B(x, r + \frac{1}{n}).$$

C'est pourquoi, tantôt nous utiliserons les boules ouvertes, tantôt les boules fermées.

Proposition 2.0.3. *Dans un espace métrique X séparable, les boules ouvertes engendrent la tribu borélienne.*

Démonstration. Il suffit de voir que tout ouvert est réunion dénombrable de boules. Considérons D dense et dénombrable X et soit U un ouvert de X. Posons alors $\mathfrak{D} := \{(x,r) \in D \times \mathbb{Q};\ B(x,r) \subset U\}$. $\mathfrak{D}$ est alors dénombrable et on vérifie facilement que $U = \bigcup_{(x,r)\in\mathfrak{D}} B(x,r)$.

En effet, soit $y \in U$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(y,\epsilon) \subset U$. Mais alors il existe aussi $x \in D$ tel que $d(y,x) < \epsilon$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique alors qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $d(x,y) < r < \epsilon$. Mais alors $y \in B(x,r)$ et $B(x,r) \subset U$. $\square$

Remarque 2.0.4. L'égalité des deux tribus n'implique pas que deux mesures de probabilités boréliennes qui coïncident sur les boules ouvertes seront égales. En effet, comme le montrera le contre-exemple de Davies au chapitre 2, on arrive à construire un espace métrique compact (donc séparable donc sur lequel les boules ouvertes engendrent la tribu borélienne) et deux mesures de probabilité boréliennes qui coïncident sur les boules ouvertes mais ne sont pas égales.

Plus précisément, on a la propostion suivante, dûe à M. Talagrand [**5**] (tout comme l'exemple qui va suivre) :

Proposition 2.0.5. *Soit X un espace métrique. Alors, on a l'équivalence :*

$\Updownarrow$ *(i) X est séparable.*
(ii) $\forall\epsilon > 0$, la tribu borélienne est engendrée par les boules ouvertes de rayon $\leq \epsilon$.

Avant de faire la preuve, nous allons avoir besoin d'un petit lemme bien connu de topologie :

Lemme 2.0.6. *Soit X un espace métrique non séparable. Alors il existe une partie Ω non dénombrable et $\epsilon > 0$ tels que $\forall x, y \in A;\ d(x,y) \geq \epsilon$.*

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons

$$\mathcal{A}_n := \{A \subset X;\ \forall x \neq y \in A,\ d(x,y) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Il est trivial que $\mathcal{A}_n$ est inductif et non vide ($\emptyset \in \mathcal{A}_n$) donc par le lemme de Zorn, $\mathcal{A}_n$ possède un élément maximal A_n. On pose maintenant

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n.$$

On affirme que A est dense dans X. En effet, soit $x \in X \setminus A = \bigcap A_n^C$. Par maximalité de A_n, $\forall n$, il existe $a_n \in A_n$ tel que $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ (sinon $A_n \subsetneqq A_n \cup \{x\}$) et donc la suite $(a_n)_n \subset A$ converge vers x. Mais comme X n'est pas séparable, A ne peut être dénombrable, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que A_{n_0} non dénombrable. On prend $\Omega := A_{n_0}$. $\square$

Prouvons alors la proposition précédente.

DÉMONSTRATION. $(i) \Rightarrow (ii)$ se démontre de la même manière que la proposition précédente ($\mathbb{Q} \cap [0, \epsilon]$ est dense dans $[0, \epsilon]$). On raisonne par contraposée pour montrer l'autre sens.

Supposons que X ne soit pas séparable. Par le lemme, il existe une partie Ω non dénombrable et $\epsilon > 0$ tels que $\forall x, y \in \Omega,\ d(x,y) \geq \epsilon$. Mais alors, toute boule de rayon $\leq \frac{\epsilon}{2}$ rencontre Ω en au plus un point. Considérons alors la trace de la tribu engendrée par ces boules sur Ω :

$$\mathrm{tr}_\Omega(\sigma(\mathfrak{B}_{\frac{\epsilon}{2}})) := \{A \cap \Omega;\ A \text{ est dans la tribu engendrée par les boules ouvertes de rayon } \leq \frac{\epsilon}{2}\}$$

Cette dernière est alors constituée d'ensembles ou bien dénombrables ou alors de complémentaire dénombrable (car c'est une tribu engendrée par des singletons) et ne peut donc contenir tout sous-ensemble de Ω. Mais Ω étant fermé discret, tout sous-ensemble de Ω est ouvert donc borélien. $\square$

On se demande alors s'il est possible que dans un espace non séparable, la tribu borélienne soit encore engendrée par les boules. L'exemple construit ci-dessous répond positivement à la question.

Proposition 2.0.7. *Il existe un espace métrique non séparable (X, d) dans lequel la tribu borélienne est engendrée par les boules fermées.*

DÉMONSTRATION. Construisons une suite $(A_n)_n$ d'ensembles par récurrence en posant

$$A_1 := \mathbb{N} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad A_{n+1} := \mathcal{P}(A_n).$$

On définit ensuite $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$, et prenant $\omega \notin A$, $x := A \cup \{\omega\}$.

On construit une distance d sur X en posant

$$d(a,b) := \begin{cases} 0 \text{ si } a = b \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \text{ si } a \in A_n \text{ et } b = \omega \\ \frac{1}{2} \text{ si } a \in A_n,\ b \in A_{n+1} \text{ et } a \in b \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'inégalité triangulaire est trivialement vérifiée et il est évident que l'espace n'est pas séparable (car par exemple $\forall a \neq b \in X,\ d(a,b) \geq \frac{1}{2}$).

Soit I une partie quelconque de X. On va montrer que $I \in \sigma(\mathfrak{B})$. (On suppose que I ne contient pas w, si $w \in I$, il suffit d'ajouter $\overline{B}(w, \frac{1}{2}) = \{w\}$).

$$I = \bigcup_{n\geq 1} I \cap A_n$$

mais $I \cap A_n \in \mathcal{P}(A_n) = A_{n+1}$. Par définition de la distance d on a aussi que

$$\overline{B}(I \cap A_n, \frac{1}{2}) \cap A_n = I \cap A_n.$$

Et, de plus,

$$A_n = \overline{B}(\omega, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) \setminus \overline{B}(\omega, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}).$$

Ainsi,

$$I = \bigcup_{n\geq 1} [(\overline{B}(\omega, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) \setminus \overline{B}(\omega, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2})) \cap \overline{B}(I \cap A_n, \frac{1}{2})] \in \sigma(\mathfrak{B}),$$

ce qu'on voulait. □

CHAPITRE 3

Le contre-exemple de Davies

On construit dans ce chapitre, selon la preuve de R.O. DAVIES [**1**], un espace métrique compact et deux mesures de probabilités boréliennes qui coïncident sur les boules ouvertes mais ne sont pas égales.

Théorème 3.0.8. *Il existe un espace métrique compact* (Ω, δ) *de diamètre* 1 *et deux mesures de probabilité boréliennes distinctes* μ_1 *et* μ_2 *sur* Ω *qui coïncident sur les boules ouvertes de rayon* $\epsilon < 1$.

On va construire un espace métrique compact (X, d) de diamètre 1 et deux mesures boréliennes ν_1 et ν_2 sur X telles que

$$\nu_1(X) = \frac{2}{3},\ \nu_2(X) := \frac{1}{3} \text{ et } \nu_1((B(x,\epsilon)) = \nu_2((B(x,\epsilon)) \quad \forall x, \epsilon < 1.$$

Ensuite, on prendra $\Omega := X \times \{0,1\}$,

$$\delta(u,v) := \begin{cases} d(x,y) \text{ si } u = (x,0),\ v = (y,0) \text{ ou si } u = (x,1),\ v = (y,1) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases},$$

$$\mu_1(B) := \nu_1(B \cap (X \times \{0\}) + \nu_2(B \cap (X \times \{1\}),$$

$$\mu_2(B) := \nu_1(B \cap (X \times \{1\}) + \nu_2(B \cap (X \times \{0\}).$$

1. Construction de (X, d)

Soit $(N_n)_n$ une suite croissante d'entiers (à déterminer ultérieurement).
Pour $n \geq 1$, on pose

$$E_n := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq N_n,\ 0 \leq j \leq N_n\}.$$

Un élément de E_n de la forme $(i, 0)$ sera appelé élément de *type central*, les autres éléments de *type périphérique*. On dit que deux éléments de E_n sont *reliés* si

-ou bien ce sont deux éléments de type central
-ou bien $u = (i,j)$ et $v = (i,0)$

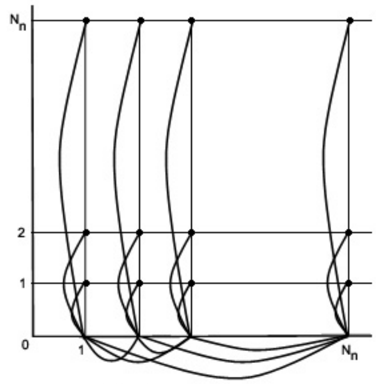

Fig. 2 Points reliés dans E_n

On définit une distance sur E_n par

$$d_n(u,v) := \begin{cases} 0 \text{ si } u = v \\ 2^{-n} \text{ si } u \neq v \text{ et } u, v \text{ reliés} \\ 2^{-n-1} \text{ sinon} \end{cases} .$$

Il est alors clair que (E_n, d_n) est un espace métrique compact.
On définit alors maintenant

$$X := \prod_{i=1}^{\infty} E_i$$

et pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ on définit une distancee d sur X par

$$d(x,y) := \sup_n d_n(x_n, y_n)$$

et si $N := \inf\{n;\ x_n \neq y_n\}$ alors,

$$d(x,y) = d_N(x_N, y_N).$$

Il est facile de vérifier que d est bien une distance et que la convergence au sens de d est équivalente à la convergence coordonnée par coordonée. Ainsi, (X, d) est un espace métrique compact, et par construction, de diamètre 1.

2. Boules ouvertes sur X

Soient $x = (x_n) \in X$ et $0 < \epsilon < 1$ fixés.
On s'intéresse à $B(x, \epsilon)$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \epsilon \leq 2^{-N+1}$. Ainsi,

$$B(x, \epsilon) = \overline{B}(x, 2^{-N}).$$

De plus,

$$\overline{B}(x, 2^{-N}) = \{y = (y_n) \in X,\ y_k = x_k \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1 \text{ et } (x_N = y_N \text{ ou } x_N, y_N \text{ reliés})\}.$$

Notons $\Pi_n : X \to E_n$ la projection sur E_n.

– Si $x_N = (i, 0)$ est un élément de type central, alors y_N est forcément de la forme

$$\begin{array}{ll} -(i,j) & 0 \leq j \leq N_N \\ -(j,0) & 1 \leq j \leq N_N \end{array}$$

– si $x_N = (i, j)$ (avec $j \neq 0$) est un élément de type périphérique, alors y_N est forcément de la forme

$$\begin{array}{l} -(i,0) \\ -(i,j) \end{array}$$

Fait 3.2.1. *Dans les deux cas, $\Pi_n(\overline{B}(x, 2^{-N}))$ contient autant d'élément de type central que d'éléments de type périphérique. De plus,*

$$\overline{B}(x, 2^{-N}) = \{x_1\} \times ... \times \{x_{N-1}\} \times \Pi_N(\overline{B}(x, 2^{-N})) \times \prod_{i \geq N+1} E_i.$$

3. Construction des mesures ν_1 et ν_2

Notons, pour $n \geq 1$,

$$X(x_1, .., x_n) := \{x_1\} \times ... \times \{x_n\} \times \prod_{i \geq N+1} E_i$$

et $X(\emptyset) := X$.
Nous allons définir deux suites réelles $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ telles que
– $\alpha_n > \beta_n > 0$,
– α_n décroît vers 0,
– $\alpha_0 = \frac{2}{3}$ et $\beta_0 = \frac{1}{3}$,

et on va montrer qu'il existe deux mesures boréliennes ν_1 et ν_2 sur X qui sont telles que, notant pour $x = (x_n)$

$$v_n := \#\{p \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq n,\ x_p \text{ de type central}\}$$

– si v est pair

$$\nu_1(X(x_1, .., x_n)) = \alpha_n \text{ et } \nu_2(X(x_1, .., x_n)) = \beta_n$$

– si v est impair

$$\nu_1(X(x_1, .., x_n)) = \beta_n \text{ et } \nu_2(X(x_1, .., x_n)) = \alpha_n$$

Affirmation 3.3.1. En supposant que deux telles mesures existent, elles conviennent au problème posé.

En effet,
– $\nu_1(X) = \alpha_0 = \frac{2}{3}$ et $\nu_2(X) = \beta_0 = \frac{1}{3}$
– Si $S = \overline{B}(x, 2^{-N})$, par l'affirmation 3.2.1

$$\begin{aligned} \nu_1(S) &= \textstyle\sum_{x \in \Pi_N(S)} \nu_1(X(x_1, .., x_{N-1}, x)) \\ &= \textstyle\sum_{x \in \Pi_N(S), x \text{ central}} \nu_1(X(x_1, .., x_{N-1}, x)) + \sum_{x \in \Pi_N(S), x \text{ periph.}} \nu_1(X(x_1, .., x_{N-1}, x)) \\ &= \textstyle\sum_{x \in \Pi_N(S), x \text{ central}} \nu_2(X(x_1, .., x_{N-1}, x)) + \sum_{x \in \Pi_N(S), x \text{ periph.}} \nu_2(X(x_1, .., x_{N-1}, x)) \\ &= \nu_2(S) \end{aligned}$$

– Comme $\alpha_n \searrow 0$, $\forall x \in X,\ \nu_k(\{x\}) = 0,\ k = 1, 2.$

3.1. Conditions d'existence.

On veut appliquer le théorème 1.4.2 à

$$\mathcal{C} := \{X(x_1, .., x_n),\ n \in \mathbb{N},\ x = (x_n)_n \in X\} \cup \{\emptyset\}$$

Il faut donc montrer que $\mathcal{C}$ est bien une semi-algèbre de parties et ensuite que les mesures ν_1 et ν_2 vérifient bien les conditions du théorème.

(**1**) $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre de parties.

Il suffit en fait de montrer (iii) car deux ensembles de $\mathcal{C}$ sont ou bien unclus l'un dans l'autre, ou bien disjoints. Soient alors

$$A = X(x_1, .., x_n, x_{n+1}, .., x_{n+p}) \text{ et } B = X(x_1, .., x_n)$$

On a $A \subset B$ et

$$B \setminus A = \{y = (y_k)_k,\ y_j = x_j \text{ pour } 1 \leq j \leq n \text{ et } \exists\, k \in [n+1,\ n+p],\ y_k \neq x_k\}$$

Introduisons quelques notations :

$$l_i := \#E_i \text{ et } E_i = \{y_1^i, .., y_{l_i}^i\}$$

et quitte à réindexer, supposons que $x_k = y_{l_k}^k$.

Ainsi, $B \backslash A$ sera la réunion de $\Omega(x_1, .., x_n, x_{n+1}, .., x_{n+m-1}, y_i^m)$ pour $1 \leq i < l_m$ et $1 \leq m \leq p$. On se rend compte en fait que cette réunion est disjointe ; en effet du fait que deux ensemble de $\mathcal{C}$ sont ou bien disjoints ou bien inclus l'un dans l'autre, quitte à supprimer les ensemble "en trop" , on a une réunion d'ensembles de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints.

(**2**) les conditions du théorèmes sont bien vérifiées.

Un élément $X(x_1, .., x_n)$ de $\mathcal{C}$ s'écrit comme réunion (disjointe) finie d'éléments de $\mathcal{C}$

$$X(x_1, .., x_n) = \biguplus_{u \in E_{n+1}} X(x_1, .., x_n, u)$$

et on peut redécomposer chaque élément de la réunion du membre de droite de la même façon. Au final, il peut s'écrire au maximum comme réunion disjointe dénombrable d'élements de $\mathcal{C}$ et la condition (iii) du théorème 1.4.2 sera réalisée si et seulement si

$$\nu_k(X(x_1, .., x_n)) = \sum_{u \in E_{n+1}} \nu_k(X(x_1, .., x_n, u)) \qquad k = 1, 2$$

Cette dernière condition est en réalité équivalente au système suivant

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} N_n^2 \alpha_n + N_n \beta_n = \alpha_{n-1} \\ N_n^2 \beta_n + N_n \beta \alpha_n = \beta_{n-1} \end{cases}$$

En effet, (traitons le cas $k = 1$, l'autre cas étant symétrique)

1er cas : v_{n-1} est pair

– Pour les N_n éléments x_n de type central

$$\nu_1(X(x_1, .., x_n)) = \beta_n$$

– Pour les N_n^2 éléments x_n de type périphérique

$$\nu_1(X(x_1,..,x_n)) = \alpha_n$$

Ce qui nous donne $\alpha_{n-1} = N_n^2\alpha_n + N_n\beta_n$

2eme cas : v_{n-1} est impair

On voit avec le même raisonnement qu'on doit avoir

$$N_n^2\beta_n + N_n\beta\alpha_n = \beta_{n-1}$$

Il va falloir maintenant déterminer N_n, α_n et β_n de sorte que le système $(\mathcal{S})$ ait des solutions.

On part de $\alpha_{n-1} > \beta_{n-1} > 0$ construits.

On choisit donc $N_n > 1$ de sorte que (α_n, β_n) soit solution positive de $(\mathcal{S})$.

On a

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}N_n - \beta_{n-1}}{N_n(N_n^2-1)} \quad \text{et } \beta_n = \frac{\beta_{n-1}N_n - \alpha_{n-1}}{N_n(N_n^2-1)}$$

En particulier

$$\alpha_n - \beta_n = \frac{(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})(N_n - 1)}{N_n(N_n^2-1)}$$

Donc si $N_n > \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}$, alors $\alpha_n > \beta_n > 0$.

En particulier, $N_n \geq 2$ donc $\alpha_n < \frac{1}{4}\alpha_{n-1}$ ainsi $\alpha_n \searrow 0$.

CHAPITRE 4

Une condition suffisante

Ce chapitre suit la preuve de D. Preiss & J. Tiser [**2**] qui affirment que dans un espace de Banach séparable, une mesure de probabilité borélienne est entièrement déterminée par ses valeurs sur les boules ouvertes.

Théorème 4.0.2. *Soient E un espace de Banach séparable et μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité boréliennes qui coïncident sur les boules ouvertes de E.*
Alors $\mu_1 = \mu_2$.

On note $E^\star$ le dual de E, S sa sphère unité, $S^\star := \{x^\star \in E^\star;\ ||x^\star|| = 1\}$, et

$$W := \{x^\star \in S^\star;\ x^\star[\mu_1] = x^\star[\mu_2]\}.$$

Nous affirmons qu'il suffit de savoir que W est préfaiblement dense dans $S^\star$ pour obtenir la conclusion du théorème. En effet, supposons que ce soit le cas. Par la remarque 1.3.4, $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ coïncident sur W. De plus, l'espace étant un Banach séparable, $(S^\star, \omega^\star)$ est métrisable : pour tout $x^\star$ dans $S^\star$, on peut trouver une suite $(x^\star_n)_n$ d'éléments de W qui converge préfaiblement vers $x^\star$. Ainsi, par convergence dominée $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ sont égales sur $S^\star$, et donc par homogénéité, sur $E^\star$.

On applique maintenant le théorème 1.3.2 qui affirme alors que $\mu_1 = \mu_2$.

Il suffit donc bien de montrer que W est préfaiblement dense dans $S^\star$. Pour cela, introduisons

$$NA(1) := \{x^\star \in S;\ \exists x \in E,\ \langle x^\star,\, x\rangle = 1\}.$$

Comme nous allons le montrer ci-dessous, $NA(1)$ est préfaiblement dense dans $S^\star$. Ainsi, la preuve du théorème revient à montrer que W est préfaiblement dense dans $NA(1)$.

Lemme 4.0.3. $NA(1)$ *est préfaiblement dense dans* $S^\star$.

Démonstration. Soit $x^\star \in S^\star$.

Les voisinages préfaibles de $x^\star$ sont de la forme

$$N(x^\star,\, x_1, .., x_n,\, \epsilon) := \{y^\star,\ |\langle x^\star,\, x_i\rangle - \langle y^\star,\, x_i\rangle| < \epsilon,\ i = 1, .., n\}$$

où ϵ et les x_i sont choisis arbitrairement. Fixons donc $\epsilon > 0$ et $x_1, .., x_n$. Il existe $x \in S$ tel que $\langle x^\star,\, x\rangle = \max(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{\max_i |\langle x^\star,\, x_i\rangle|})$.

On note $F := \mathrm{Vect}\{x_1, .., x_n,\, x\}$ et $f := x^\star_{|F}$.

Du fait de la dimension finie de F, il existe $y \in F$ tel que $\langle f, y\rangle = ||f|| \leq 1$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $z^\star \in E^\star$, $z^\star_{|F} = f$ et $||z^\star|| = ||f||$. On a en particulier

$$\max(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{\max_i |\langle x^\star,\, x_i\rangle|}) \leq ||z^\star|| \leq 1.$$

Posons alors $y^\star := \frac{Z^\star}{||z^\star||}$. Alors, $y^\star \in NA(1)$ et de plus,

$$\forall i,\ |\langle y^\star, x_i\rangle - \langle x,\, x_i\rangle| = |\langle x^\star,\, x_i\rangle|(\frac{1 - ||z^\star||}{||z^\star||}) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ce qu'on voulait. □

Remarque 4.0.4. Il existe un résultat plus fort, il s'agit du théorème de **Bishop-Phelps** qui affirme qu'en fait $NA(1)$ est dense (pour la norme) dans $S^\star$. Néanmoins, le résultat plus faible ci-dessus démontré suffit dans le cadre de notre démonstration.

1. Un résultat préliminaire

Proposition 4.1.1. *Soient ν_1 et ν_2 deux mesures boréliennes finies sur un espace de Banach B de dimension finie et $b^\star \in B^\star$ et enfin $K \subset \{b \in B, \langle b^\star, b\rangle > 0\}$ un cône ouvert non vide tel que $\overline{K} \cap Ker(b^\star) = \{0\}$ et $\nu_1(z + K) = \nu_2(z + K)\ \forall\, z \in B$. Alors $b^\star[\nu_1] = b^\star[\nu_2]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \nu_1(\{\langle b^\star, x\rangle > a\}) = \nu_2(\{\langle b^\star, x\rangle > a\})$$

En fait, grâce à l'invariance par translation, il suffit uniquement de le montrer pour $a = 0$.

En effet, supposons que le résultat soit vrai pour 0 et soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe $y \in B$ tel que $\langle b^\star, y\rangle = a$. Définissons deux nouvelles mesures de probabilités boréliennes $\tilde{\nu}_1$ et $\tilde{\nu}_2$ définies par $\tilde{\nu}_i(E) := \nu_i(a + E)$ pour $E \in \mathcal{B}(B)$ et $i = 1, 2$. Alors, $\tilde{\nu}_1$ et $\tilde{\nu}_2$ vérifient encore les conditions de la proposition et donc

$$\tilde{\nu}_1(\{\langle b^\star, x\rangle > 0\}) = \tilde{\nu}_2(\{\langle b^\star, x\rangle > 0\}).$$

Mais, $\tilde{\nu}_i(\{\langle b^\star, x\rangle > 0\}) = \nu_i(\{\langle b^\star, x\rangle > a\})$ pour $i = 1, 2$. On a donc bien le résultat voulu.

Le résultat étant trivial si $\dim(B) = 1$, on suppose donc que $\dim(B) > 1$. Soit $b \in B$, $\langle b^\star,\, b\rangle = 1$, alors $B = \mathbb{R}b \oplus \mathrm{Ker}(b^\star)$ et on peut identifier B à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ de façon que $\langle b^\star,\, (x,\, t)\rangle = t$. On munit B de la norme euclidienne.

Soient alors ϕ et ψ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\phi : \mathbb{R}^k \to [0,\, 1],\ \mathrm{supp}(\phi) \subset \{||z|| \leq 1\} \text{ et } \phi \equiv 1 \text{ sur } \{||z|| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\psi : \mathbb{R} \to [0,\, \infty[\ ,\ \mathrm{supp}(\psi) \subset [0,\, 1] \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$$

Pour $p = 1,\, 2, ...$ on définit une fonction $g_p : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to [0,\, \infty[$ par la formule

$$g_p(x,\,t) := \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{K+(z,\,y)}(x,\,t)\phi(\frac{z}{p})\psi(py)d\lambda(y)d\lambda_k(z)$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} g_p(x,\,t+s)d\nu_1(x,\,t) &= \int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} \phi(\tfrac{z}{p})\psi(py)\nu_1(K+(z,\,y-2s))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} \phi(\tfrac{z}{p})\psi(py)\nu_2(K+(z,\,y-2s))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} g_p(x,\,t+s)d\nu_2(x,\,t) \qquad (1)\end{aligned}$$

Soit maintenant $Q := \{z,\ (z,1) \in K\}$. Alors, Q est borné.

En effet, si ce n'était pas le cas, par compacité de la sphère unité on aurait une suite $(z_n)_n \subset Q$ telle que

$$||z_n|| \to \infty \text{ et } w_n := \frac{z_n}{||z_n||} \to w \text{ avec } ||w|| = 1$$

Mais alors, comme K est un cône, $(w_n,\,\frac{1}{||z_n||}) \in K$ et donc $(w,\,0) \in \overline{K} \cap \mathrm{Ker}(b^\star) = \{0\}$. Absurde.

De plus, on a que $K \subset \{(x,\,t),\ t > 0\}$, donc

$$\begin{aligned}g_p(x,\,t) &= \int_{\mathbb{R}^k}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_K(z,\,y)\phi(\tfrac{x-z}{p})\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z) \qquad (2)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\int_0^\infty \mathbb{I}_K(z,\,y)\phi(\tfrac{x-z}{p})\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\int_0^\infty \mathbb{I}_K(\tfrac{z}{y},\,1)\phi(\tfrac{x-z}{p})\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\int_0^\infty \mathbb{I}_Q(\tfrac{z}{y})\phi(\tfrac{x-z}{p})\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_Q\int_0^\infty \phi(\tfrac{x-yz}{p})\psi(p(t-y))y^k d\lambda(y)d\lambda_k(z) \qquad (3)\end{aligned}$$

Par (2) et le théorème de dérivation sous le signe intégral, on voit que g_p a des dérivées partielles continues et bornées à tous les ordres. On peut donc dériver l'expression (1) pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x,\,t)d\nu_1(x,\,t) = \int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x,\,t)d\nu_2(x,\,t) \qquad (4)$$

Estimons maintenant ces dérivées partielles, à l'aide de (3) et du fait que Q est borné. A l'aide de la formule de Leibniz, puis d'intégrations par parties successives, on a

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x,\,t) &= \int_Q\int_0^\infty \phi(\tfrac{x-yz}{p})y^k \tfrac{\partial^k}{\partial t^k}\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= (-1)^k\int_Q\int_0^\infty \phi(\tfrac{x-yz}{p})y^k \tfrac{\partial^k}{\partial y^k}\psi(p(t-y))d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_Q\int_0^\infty \psi(p(t-y))\tfrac{\partial^k}{\partial y^k}[\phi(\tfrac{x-yz}{p})y^k]d\lambda(y)d\lambda_k(z)\\ &= \int_0^\infty \psi(p(t-y))\int_Q \tfrac{\partial^k}{\partial y^k}[\phi(\tfrac{x-yz}{p})y^k]d\lambda_k(z)d\lambda(y) \qquad (5)\\ &= \sum_{j=0}^k c_j\int_0^\infty \psi(p(t-y))\int_Q y^j\tfrac{\partial^j}{\partial y^j}[\phi(\tfrac{x-yz}{p})]d\lambda_k(z)d\lambda(y) \qquad (6)\end{aligned}$$

où $c_j := \frac{k!^2}{(k-j)!j!^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^k$, $y > 0$ et chaque $j = 0, 1, .., k$ la fonction

$$z \mapsto y^j \frac{\partial^j}{\partial y^j}[\phi(\frac{x - yz}{p})]$$

ne peut être non nulle, uniquement à l'intérieur de la boule $B(\frac{x}{y}, \frac{p}{y})$. Pour $z \in Q$, cette fonction est bornée par $(\frac{y}{p})^j ||D^j\phi||_\infty$. Notant $V_k^2 := \lambda_k(B(0, 1))$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_Q y^j \frac{\partial^j}{\partial y^j}[\phi(\frac{x-yz}{p})]d\lambda_k(z)| &\leq ||D^j\phi||_\infty \mathrm{min}(\lambda_k(Q), V_k^{(2)}(\frac{p}{y})^k)(\frac{y}{p})^j \\ &\leq ||D^j\phi||_\infty \mathrm{max}(\lambda_k(Q), V_k^{(2)}) \end{aligned}$$

Mais, alors, par (6)

$$\begin{aligned} |\tfrac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x, t)| &\leq \textstyle\sum_{j=1}^k c_j ||D^j\phi||_\infty \mathrm{max}(\lambda_k(Q), V_k^{(2)}) \int_0^\infty \psi(p(t-y))d\lambda(y) \\ &\leq \tfrac{1}{p}[\textstyle\sum_{j=1}^k c_j ||D^j\phi||_\infty \mathrm{max}(\lambda_k(Q), V_k^{(2)})] \end{aligned} \tag{7}$$

De plus, comme $\mathrm{supp}(\psi) \subset [0, 1]$, on a par (5) que

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x, t) = 0 \text{ si } t \leq 0.$$

Maintenant, si

$$x \in \mathbb{R}^k,\ t > 0 \text{ et } p > \max(\frac{1}{t},\ 2||x|| + 2t\mathrm{sup}\{||z||,\ z \in Q\})$$

alors, encore par (5),

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x, t) = \int_{t-\frac{1}{p}}^t \psi(p(t-y)) \int_Q \frac{\partial^k}{\partial y^k}[\phi(\frac{x-yz}{p})y^k]d\lambda_k(z)d\lambda(y). \tag{8}$$

D'autre part, si

$$y \in [t - \frac{1}{p},\ t] \text{ et } z \in Q, \text{ alors } ||\frac{x - yz}{p}|| \leq \frac{1}{2} \text{ et donc } \phi(\frac{x - yz}{p}) = 1.$$

En combinant (6) et (8), cela nous donne

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x, t) &= k!\lambda_k(Q) \textstyle\int_{t-\frac{1}{p}}^t \psi(p(t-y))d\lambda(y) \\ &= k! \tfrac{\lambda_k(Q)}{p} \textstyle\int_0^1 \psi(y)d\lambda(y) = \tfrac{k!}{p}\lambda_k(Q) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{k!\lambda_k(Q)} \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_p(x, t) = \mathbb{I}_{\{(x,\, t),\, t>0\}}.$$

Et grâce à (7), nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée dans (4) pour conclure que

$$\nu_1(\{(x, t),\ t > 0\}) = \nu_2(\{(x, t),\ t > 0\})$$

$\square$

2. Préfaible densité de W dans $NA(1)$

Proposition 4.2.1. *Soient $x^\star \in NA(1)$, $x_1, .., x_n \in E$ fixés et $x \in S$ tel que $\langle x^\star, x\rangle = 1$. On pose $F := Vect\{x, x_1, .., x_n\}$.*
Alors, il existe $y^\star \in W$ telle que $y^\star_{|F} = x^\star_{|F}$.

DÉMONSTRATION. L'idée est de constuire un sous-espace qui soit en somme avec F, de quotienter et d'appliquer le lemme de factorisation puis la proposition précédente. On pose alors $V := F \cap \mathrm{Ker}(x^\star)$, et on définit

$$\mathcal{C} := \{A \text{ cône ouvert convexe}, A \cap V = \emptyset, B(x, 1) \subset A \text{ et } \forall z \in E, \mu_1(z+A) = \mu_2(z+A)\}$$

1ère étape. $\mathcal{C}$ contient un élément maximal C.

Remarquons d'abord que $\mathcal{C}$ est non vide. En effet, $D := \bigcup_{n\geq 1} B(nx, n)$ est clairement un cône ouvert convexe contenant $B(x, 1)$. De plus, si il existe $y \in D$ et il existe n tels que $y \in B(nx, n)$ alors, $|\langle x^\star, y\rangle| > n - n = 0$, donc $D \cap V = \emptyset$. Enfin, μ_1 et μ_2 coïncidant sur chaque boule ouverte, on a

$$\forall n, \forall z \in E, \ \mu_1(B(z + nx, n)) = \mu_2(B(z + nx, n))$$

et la réunion étant croissante, on obtient bien $\mu_1(z + D) = \mu_2(z + D)$.

Afin de pouvoir appliquer le lemme de Zorn (et donc de pouvoir conclure) nous montrons maintenant que $\mathcal{C}$ est inductif ; soit $\mathcal{D}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{C}$. On pose $G := \bigcup_{A\in\mathcal{D}} A$. Il suffit alors de montrer que $G \in \mathcal{C}$, en fait il suffit juste de montrer que $\mu_1(z + G) = \mu_2(z + G)\ \forall\, z \in E$, les autres conditions étant trivialement satisfaites.

Soient alors $z \in E$ et $\epsilon > 0$.

Par le théorème 1.2.3, E étant de Banach séparable, il existe un compact K tel que

$$K \subset z + G \text{ et } \mu_k(z + G \setminus K) < \epsilon, \qquad k = 1, 2.$$

Par compacité de K (propriété de Borel-Lebesgue) et du fait que $\mathcal{D}$ est totalement ordonné, il existe $B \in \mathcal{D}$ tel que $K \subset z + B \subset z + G$. Ainsi,

$$\mu_1(z + G) < \mu_1(z + B) + \epsilon = \mu_2(z + B) + \epsilon \leq \mu_2(z + G) + \epsilon$$

et inversement. On obtient au final,

$$|\mu_1(z + G) - \mu_2(z + G)| < \epsilon \qquad \forall\epsilon > 0$$

i.e $\mu_1(z + G) = \mu_2(z + G)$.

Remarque 4.2.2. On a les égalités $C + \overline{C} = C$ et $\overline{C} \cap \overline{-C} + C = C$.

En effet, comme $0 \in \overline{C}$ (du fait que $B(x,1) \subset C$ et $||x|| = 1$) on a déjà que $C \subset \overline{C} + C$. De plus soient $u \in \overline{C}$ et $v \in C \subset \overline{C}$. Alors,

$$u + v = \lambda(\frac{1}{\lambda}u) + (1 - \lambda)(\frac{1}{1-\lambda}v) \in \overline{C} \text{ car } C \text{ est convexe.}$$

Mais $\overline{C} + C$ étant ouvert et convexe, la double inclusion $C \subset \overline{C} + C \subset \overline{C}$ implique $C = \overline{C} + C$.

En effet, notons $V_1 := C$ et $V_2 := \overline{C}+C$. Supposons l'existence d'un $x \in V_2 \setminus V_1$. Comme V_2 est ouvert on a une boule $B_1 := B(x, \epsilon_1) \subset V_2$ et comme $V_2 \subset \overline{V_1}$ on a une autre boule $B_2 := B(y, \epsilon_2) \subset V_1 \cap B_1$. Notons alors $z := \partial B_1 \cap [y, x)$. Par convexité de V_1(et de V_2) il est clair que $[z, x] \subset \partial V_1$. Notons maintenant m le milieu du segment $[z, x]$ et $U := \{a \in \overline{V}_1$ tels qu'il existe$t > 0$, $m + t(m - a) \in B_2\}$ est un ouvert contenant z qui lui même est dans $\overline{V}_1$. Ainsi on a un $a \in U \cap V_1$, ce qui est absurde par convexité.

2ème étape. $\overline{C} \cap \overline{-C} + F = E$.

On a à présent besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.3. *Soit $v \in \overline{C}$ tel que Vect$\{V \cup \{v\}\} \cap C = \emptyset$. Alors, $-v \in \overline{C}$.*

Démonstration. Posons $H := \bigcup_{n \geq 0} C - nv$. H est un ouvert convexe contenant $B(x, 1)$. De Vect$\{V \cup \{v\}\} \cap C = \emptyset$ on déduit que si $y \in H \cap V$ alors $y = c - nv$ et $y + nv \in$ Vect$\{V \cup \{v\}\} \cap C = \emptyset$. Absurde. Donc $H \cap V = \emptyset$. Par 4.2.2, on déduit que la suite $(C - nv)_n$ est croissante et donc, si $z \in E$, $\mu_1(z + H) = lim_{n\to\infty}\mu_1(C - nv + z) = lim_{n\to\infty}\mu_2(C - nv + z) = \mu_2(z + H)$. Par maximalité de C, $H = C$. Or $-v = v - 2v \in \bigcup \overline{C - nv} \subset \overline{H} = \overline{C}$. $\square$

Soit $e \in E$.

On pose $I := \{t \in \mathbb{R},\ (e + tx + V) \cap C \neq \emptyset\}$.

On a alors que

$$]||e||, +\infty[\subset I \text{ et }] - \infty, -||e||\,[\subset I^C$$

En effet, si $t > ||e||$, alors $e + tx \in B(tx, t) \subset C$ et comme $0 \in V$, on a la première assertion.

Si par contre, $t < -||e||$,alors $-tx - e \in B(-tx, -t) \subset C$ mais alors

$$(e + tx + V) \cap C = e + tx + V \cap (C - e - tx) \subset e + tx + V \cap C = \emptyset$$

De plus, par convexité de C, I est un intervalle ouvert de la forme $I =]s, +\infty[$ où $s \in [-||e||, ||e||\,]$.

Soit $t \in I$. On définit $u(t)$ comme élément de $V \cap (C - e - tx)$ tel que $||u(t)|| - 1 \leq \inf\{||u||;\ u \in V \cap (C - e - tx)\}$.

On affirme que $\overline{lim}_{t\to s}||u(t)|| < \infty$.

Supposons le contraire. Du fait de la dimension finie de V (et donc de la compacité de la sphère unité de V) il existe une suite $(t_n)_n$ telle que

$$t_n \to s,\ ||u(t_n)|| \to \infty \text{ et } \frac{u(t_n)}{||u(t_n)||} \to w \in V.$$

Mais par définition de $u(t)$, $w \in \overline{C}$ et Vect$\{V \cup \{w\}\} \cap C = V \cap C = \emptyset$ donc par le lemme 4.2.3, $-w \in \overline{C}$. On en déduit que $-||u(t_n)||w \in \overline{C}$ et donc

$$w_n := u(t_n) - ||u(t_n)||w \in (C + \overline{C} - e - t_n x) \cap V \subset (C - e - t_n x) \cap V.$$

Mais alors, il existe N_0 tel que

$$\forall n \geq N_0,\ \ ||w - \frac{u(t_n)}{||u(t_n)||}|| < 1 - \frac{1}{2} \text{ et } ||u(t_n)|| \geq 2$$

donc $||w_n|| = ||u(t_n)||\,||w - \frac{u(t_n)}{||u(t_n)||}|| < ||u(t_n)|| - 1$, ce qui contredit la définition de $u(t_n)$.

Grâce à la dimension finie de V encore une fois, on peut trouver une suite $(t_k)_k$ telle que $t_k \to s$ et $u := lim_{k\to\infty} u(t_k)$ existe. Il en découle que $e + sx + u \in \overline{C}$. Mais, on observe que $\text{Vect}\{V \cup \{e + sx + u\}\} \cap C = \emptyset$. En effet, si ce n'était pas le cas on aurait $r \in \mathbb{R}$ et $v \in V$ tels que

$$v + r(e + sx + u) \in C.$$

Si $r > 0$ cela implique que $e + sx + u + \frac{1}{r}v \in C$, $\quad i.e\ s \in I$. Absurde. Si par contre $r < 0$ alors $v = (v + r(e + sx + u)) + |r|(e + sx + u) \in C + \overline{C} = C$. Absurde.

Ainsi le lemme 4.2.3 permet d'affirmer que $e + sx + u \in \overline{-C}$. On obtient $e = e + sx + u - u - sx$ avec $e + sx + u \in \overline{C} \cap \overline{-C}$ et $-u - sx \in F$, ce qu'on voulait.

3ème étape. Construction de $y^\star$.

Comme $V \cap C = \emptyset$, par le théorème de séparation des convexes, il existe $y^\star \in E^\star$ telle que

$$V \subset \text{Ker}(y^\star) \text{ et } \text{Ker}(y^\star) \cap C = \emptyset.$$

De plus, on peut choisir $y^\star$ de telle sorte que $\langle y^\star, x\rangle = 1$.

Encore gâce au fait que $V \cap C = \emptyset$ et par convexité de C on déduit que

$$\forall y \in C,\ (y^\star, y) > 0. \qquad (1)$$

De plus, comme $B(x, 1) \subset C$ on a $0 < \langle y^\star, x - y\rangle = 1 - \langle y^\star, y\rangle$ pour tout $y \in S$. Donc $y^\star \in NA(1)$. Enfin, de $F = \mathbb{R}x \oplus V$, on déduit qu'on a bien $y^\star_{|F} = x^\star_{|F}$.

Posons maintenant $B := E \big/ \overline{C} \cap \overline{-C}$. Par la deuxième étape, on conclut que B est un espace de Banach de dimension finie. Notons $\pi : E \to B$ la surjection canonique et $K := \pi(C)$ cône ouvert non vide de B.

Soit $y \in \text{Ker}(\pi) = \overline{C} \cap \overline{-C}$. Alors, par (1) $\langle y^\star, y\rangle \leq 0$ et $\langle y^\star, y\rangle \geq 0$ donc $y \in \text{Ker}(y^\star)$ et donc il existe $b^\star \in B^\star$ telle que $y^\star = b^\star \circ \pi$ et on a clairement $K \subset \{b \in B,\ \langle b^\star, b\rangle > 0$. On a également que $\text{Ker}(b^\star) \cap \overline{K} = \{0\}$. En effet, soit $\pi(w) \in \text{Ker}(b^\star) \cap \overline{K}$. Il est clair que $w \in \text{Ker}(y^\star)$ ce qui implique en particulier par (1) que $\text{Vect}\{V \cup \{w\}\} \cap C = \emptyset$. Il suffit donc de montrer que $w \in \overline{C}$ et le lemme 4.2.3 permettra de conclure que $\pi(w) = 0$. Soit O un ouvert contenant w. On veut montrer que $O \cap C \neq \emptyset$. $\pi(w) \in \overline{K} = \overline{\pi(C)}$ donc $(O + (\overline{C} \cap \overline{-C})) \cap C \neq \emptyset$,mais alors 4.2.2 implique bien que $O \cap C \neq \emptyset$.

Posons maintenant $\nu_k := \pi[\mu_k]$ pour $k = 1, 2$. Encore par 4.2.2, on constate que $\pi^{-1}(K) = C$. Soit alors $z \in B$ et y tel que $\pi(y) = z$,

$$\nu_1(z+K) = \mu_1(\pi^{-1}(z+K)) = \mu_1(y+\overline{C}\cap\overline{-C}+C) = \mu_1(y+C) = \mu_2(y+C) = \nu_2(z+K)$$

On applique alors la proposition 4.1.1 pour conclure que $b^\star[\nu_1] = b^\star[\nu_2]$ et ainsi que

$$y^\star[\mu_1] = (b^\star \circ \pi)[\mu_1] = b^\star[\nu_1] = b^\star[\nu_2] = y^\star[\mu_2].$$

On a donc trouvé un $y^\star \in W$ tel que $y^\star_{|F} = x^\star_{|F}$, donc W est préfaiblement dense dans $NA(1)$ qui est préfaiblement dense dans $S^\star$. $\square$

CHAPITRE 5

La classe monotone engendrée par les boules fermées

1. Cas hilbertien de dimension finie

Dans un espace vectoriel réel de dimension finie muni de la norme euclidienne ($i.e$ tout espace de Hilbert de dimension finie), la classe monotone engendrée par les boules fermées contient tous les boréliens. Plus précisément, on a le théorème suivant, dû à M. Zeleny ([**3**]) :

Théorème 5.1.1. *On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne. Alors,*

$$\mathcal{D}^\star(\mathfrak{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

1.1. Sphères de dimension t et familles de boules.

Définition 5.1.2. Soit $t \leq d$, on dit que $A \subset \mathbb{R}^d$ est une *sphère de dimension* t si il existe un sous-espace affine V de dimension $t+1$, une boule $B := B(x,r)$ tels que $x \in V$ et $A = \partial B \cap V$.

On note $\mathfrak{S}_t := \{S;\ S \text{ sphère de dimension } t\}$.

Définition 5.1.3. On pose

$$\mathcal{S}_t := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d);\ \exists (S_n) \subset \mathfrak{S}_t,\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\}.$$

Et on définit la relation $A = B \bmod \mathcal{S}_t \iff B \setminus A \in \mathcal{S}_t$ et $A \setminus B \in \mathcal{S}_t$.

Proposition 5.1.4. *Soient $L \subset \mathbb{R}^d$ fermé, $m, t \in \mathbb{N}$, $t \leq d$ et $G \subset L$ un borélien. On suppose qu'il existe une suite de familles de boules fermées $(\mathcal{B}_n)_n$ telle que*

(i) $\forall n,\ \mathcal{B}_n = \bigcup_{k=1}^m \mathcal{B}_n^k,$ où chaque B_n^k est constitué de boules fermées disjointes,
(ii) le centre de chaque boule de $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{B}_n$ est dans L,
(iii) $\forall n,\ L \cap \bigcup \mathcal{B}_n \subset G$ et $G = L \cap \bigcup \mathcal{B}_n \bmod \mathcal{S}_{t-1}$,
(iv) si $n' > n$ et $C \in \mathcal{B}_n$, $C' \in \mathcal{B}_{n'}$ alors $C' \subset C$ ou $C' \cap C = \emptyset$,
(v) $lim_{n\to\infty} sup\{diam(C);\ C \in \mathcal{B}_n\} = 0$.

Alors, il existe $\tilde{G} \subset G$ tel que

$$\tilde{G} \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B}) \;\; et \;\; \tilde{G} = G \;\; mod \;\; \mathcal{S}_{t-1}.$$

DÉMONSTRATION. Par (i),

$$\mathcal{B}_n = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{B}_n^k$$

où chaque $\mathcal{B}_n^k$ est une sous-famille de boules fermées deux à deux disjointes. On pose alors $\mathcal{D}_{n,j}^1 := \mathcal{B}_n^1$ et pour $k \geq 2$

$$\mathcal{D}_{n,j}^k := \{C \in \mathcal{B}_n^k;\; C \not\subset \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{s=j}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_s^i\}$$

et $D_{n,j}^k := \bigcup \mathcal{D}_{n,j}^k$.
Posons alors

$$\tilde{G} := \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^k \qquad \text{et} \qquad Z := G \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n.$$

On va voir que $\tilde{G}$ convient.
$\tilde{G} = \{x;$ il existe k, j x est dans une infinité de $D_{p,j}^k\}$.

$(\mathbf{1})\tilde{G} \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$
Pour montrer cela on va montrer dans un premier temps que la réunion sur les k est disjointe.
Suppons le contraire, c'est à dire que pour $u < v$, on a un

$$x \in (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^u) \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^v)$$

Ce qui veut dire qu'on a deux entiers j et j' tels que

$$x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^u \qquad (\star)$$

et

$$x \in \bigcap_{l'=1}^{\infty} \bigcup_{p'=l'}^{\infty} D_{p',j'}^v \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ on tire qu'il existe $p > j'$ et une boule $C \in \mathcal{D}_{p,j}^u$ avec $x \in C$.
De $(\star\star)$ on déduit l'existe d'un $p' > p$ et d'une boule $C' \in \mathcal{D}_{p',j'}^v$ avec $x \in C'$.
Mais alors, comme $p' < p$ et $C' \cap C \neq \emptyset$ l'hypothèse (iv) assure que $C' \subset C \subset \bigcup \mathcal{B}_p^u$, ce qui est contradictoire avec le fait que $C' \in \mathcal{D}_{p',j'}^v$.
Il reste donc à montrer que

$$\forall k = 1, .., m, \;\; \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^k \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B}).$$

Fixons $k \in \{1, .., m\}$ et posons

$$\mathcal{V} := \{\bigcup \mathcal{X};\ \mathcal{X} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^k\}.$$

Il est clair que cette classe de parties de $\mathbb{R}^d$ est stable par intersection finie et réunion finie. ($A = \bigcup \mathcal{X}$ et $B = \bigcup \mathcal{X}'$ alors $A \cup B = \bigcup (\mathcal{X} \cup \mathcal{X}')$ et $A \cap B = \bigcup (\mathcal{X} \cap \mathcal{X}')$).

Par le lemme 1.1.12, $\mathcal{M}^\star(\mathcal{V})$ est alors stable par intersection dénombrable et réunion dénombrable.

De plus, $D_{p,j}^k \in \mathcal{V}$ pour tous p, j. Donc $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^k \in \mathcal{M}^\star(\mathcal{V})$.

Mais, on constate que $\mathcal{V}$ est contenu dans la classe des réunions disjointes de boules fermées, que l'on note $\mathcal{N}$. En effet, soient $A = \bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{V}$ et $B, B' \in A$.

Alors il existe n, n' tels que $B \in \mathcal{B}_n^k$ et $B' \in \mathcal{B}_{n'}^k$.

Si $n = n'$, alors par définition de $\mathcal{B}_n^k$, $B \cap B' = \emptyset$.

Si $n < n'$, alors, toujours grâce à l'hypothèse (iv), $B' \subset B$ ou $B \cap B' = \emptyset$. On peut donc toujours écrire A comme réunion disjointe de boules fermées, *ie* $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$, et donc $\mathcal{D}^\star(\mathcal{V}) \subset \mathcal{D}^\star(\mathcal{N})$, et comme il est clair que $\mathcal{D}^\star(\mathcal{N}) = \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$, on a bien ce qu'on voulait.

(**2**)$\tilde{G} \subset G$ et $\tilde{G} = G$ mod $\mathcal{S}_{t-1}$

Commençons donc par montrer l'inclusion. On a dans un premier temps que $\tilde{G} \subset L$. En effet, supposons qu'il existe $x \in \tilde{G} \setminus L$. L étant fermé, on a $d(x, L) =: d > 0$. Or, par l'hypothèse (v) il existe N tel que $\forall n \geq N$, $\forall C \in \mathcal{B}_n$, $\mathrm{diam}(C) \leq d$. Mais il existe alors $p \geq N$ et $C = \overline{B}(y, r) \in \mathcal{B}_p$ tels que $x \in C$. Par l'hypothèse (ii) cette fois, $y \in L$ et $d(x, y) \leq \frac{d}{2}$. C'est une contradiction. Utilisons maintenant l'hypothèse (iii) pour obtenir

$$\tilde{G} = L \cap \tilde{G} \subset L \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L \cap \bigcup \mathcal{B}_n) \subset G.$$

Il reste donc à montrer que $G \setminus \tilde{G} \in \mathcal{S}_{t-1}$.

Remarquons d'abord que $G \setminus Z \in \mathcal{S}_{t-1}$. En effet, par (iii); $\forall n$, il existe une suite $(S_k^n)_k \in \mathfrak{S}_{t-1}$ telle que $L \cap \bigcup \mathcal{B}_n \subset \bigcup_k S_k^n$. Mais alors,

$$G \setminus Z \subset G \setminus L \cap Z = G \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (L \cap \bigcup \mathcal{B}_n) \subset \bigcup_{n,k} S_k^n.$$

Montrons maintenant que $G \setminus Z \subset \tilde{G}$.

Soit $x \in G \setminus Z = G \cap \bigcap_{n \geq 1} \bigcup \mathcal{B}_n$. Il est clair (principe des chaussettes et des tiroirs) qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que x est dans une infinité de $\bigcup \mathcal{B}_n^l$.

Posons $k := \inf\{l;\ x \in \overline{\lim}_n \bigcup \mathcal{B}_n^l\}$. On peut donc construire une suite d'entiers $(p_n)_n$ strictement croissante telle que

$$\forall n,\ \exists C_n \in \mathcal{B}_{p_n}^k; \quad x \in C_n.$$

1er cas : $k = 1$. On a trivialement que $x \in \overline{\lim}_p \bigcup \mathcal{B}_p^1 = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^1$.

2nd cas : $k \geq 2$. Par construction de k, il existe $j \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{s=j}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_s^i$$

sinon x serait dans une infinité de $\bigcup \mathcal{B}_n^i$ avec $i < k$.

Dans les deux cas on a bien $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{p=l}^{\infty} D_{p,j}^k$, *i.e* $x \in \tilde{G}$. Mais alors $G \backslash \tilde{G} \subset Z$ et donc $G \subset \tilde{G}$ mod $\mathcal{S}_{t-1}$. $\square$

1.2. Existence d'une suite de familles de boules.

La proposition suivante affirme que si le borélien G (dans les hypothèse de la proposition précédente) est relativement ouvert et borné, alors la suite de familles de boules ouvertes vérifiant toutes les conditions existe. En particulier, cela implique donc qu'il existe $G_1 \subset G$ et $G_2 = G \setminus G_1$ tels que $G = G_1 \uplus G_2$, $G_1 \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$ et $G = G_2$ mod $\mathcal{S}_{t-1}$, d'où l'intérêt de ces lemmes.

Proposition 5.1.5. *Soient $L \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace affine de dimension t ou une sphère de dimension t et $G \subset L$ relativement ouvert et borné. Alors, il existe $m \in \mathbb{N}$ et une suite d'ensembles de boules fermées $(\mathcal{B}_n)_n$ vérifiant les propriétés (i) à (v) de la proposition précédente.*

DÉMONSTRATION. La preuve de cette proposition se fait en plusieurs étapes.

1ère étape. On montre le fait suivant :

Soient $H \subset L$ relativement ouvert borné et $\epsilon > 0$. Alors, il existe $m \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de d) et une famille de boules fermées $\mathcal{A}$ tels que

(a) $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i$ *où chaque $\mathcal{A}_i$ est une famille de boules fermées deux à deux disjointes,*
(b) *Si $A = \overline{B}(x,r) \in \mathcal{A}$ alors $x \in L$,*
(c) $L \cap \bigcup \mathcal{A} = H$,
(d) $\forall A \in \mathcal{A},\ diam(A) < \epsilon$,
(e) $\forall x \in H,\ \exists r > 0;\ \#\{A \in \mathcal{A};\ A \cap \overline{B}(x,r) \neq \emptyset\} < \infty$.

En effet, considérons

$$\mathcal{U} := \{B := \overline{B}(x,r);\ x \in H,\ B \cap L \subset H \text{ et } \min(\frac{d(x, L \setminus H)}{2}, \frac{\epsilon}{4}) \leq 2r < \epsilon\}.$$

Du fait que H est relativement ouvert dans L, on déduit que $H = L \cap \bigcup \mathcal{U}$.

Appliquons alors le théorème 1.5.1 de **Besicovitch** :

Il existe $m \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de d) et $\mathcal{A}_1, .., \mathcal{A}_m$ sous-familles de $\mathcal{U}$ formées chacune de boules fermées deux à deux disjointes telle que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup \mathcal{A}_i$$

On pose alors $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i$.

Il est immédiat (par construction) que $\mathcal{A}$ vérifie (a), (b) et (d). Mais on a également que $L \cap \bigcup \mathcal{A} = H$ car chaque boule $A \in \mathcal{A}$ vérifie $A \cap L \subset H$. Il reste donc à vérifier le dernier point. Soit $x \in H$, alors $r := \frac{d(x, L \setminus H)}{4}$ convient.

En effet, il suffit de montrer que pour

$$i = 1, .., m,\ \#\{A \in \mathcal{A}_i;\ A \cap \overline{B}(x,r) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Soit i fixé, notons $\mathcal{V} := \{A \in \mathcal{A}_i;\ A \cap \overline{B}(x,r) \neq \emptyset\}$.
On remarque plusieurs choses :
Premièrement

$$(A \cap \overline{B}(x,r) \neq \emptyset \text{ et } \mathrm{diam}(A) < \epsilon) \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \subset \overline{B}(x, r+\epsilon) \qquad (\star)$$

Ensuite, comme $\forall A \in \mathcal{V},\ \mathrm{diam}(A) \geq \min(\frac{d(centre(A), L\setminus H)}{2}, \frac{\epsilon}{4})$ alors

$$\forall A \in \mathcal{V},\ \mathrm{diam}(A) \geq \min(\frac{d(x, L \setminus H)}{8}, \frac{\epsilon}{4}) \qquad (\star\star)$$

(sinon on aurait une boule $\overline{B}(y,s)$ de $\mathcal{V}$ avec $d(y, L \setminus H) \leq 2s < \frac{d(x,L\setminus H)}{4}$ mais pour avoir $\overline{B}(y,s) \cap \overline{B}(x,r) \neq \emptyset$, il faudrait que $s \geq \frac{d(x,L\setminus H)}{2} > \frac{d}{4}$, ce qui serait absurde).

De $(\star)$ et $(\star\star)$ et du fait que les boules de $\mathcal{V}$ sont deux à deux disjointes, on déduit que $\#\mathcal{V} < \infty$.

Remarque. Dans un espace métrique séparable, toute famille de boules deux à deux disjointes est dénombrable, donc $\mathcal{A}$ est dénombrable.

2ème étape. Construisons la famille désirée $(\mathcal{B}_n)_n$.

Soit $(r_n)_n$ suite de nombres positifs tendant vers 0, à déterminer.

Posons $\epsilon = r_0$ et $H = G$. Nous obtenons alors par la première étape une famille $\mathcal{B}_1$ qui vérifie les conditions (a) à (e) et donc les conditions suivantes $(i_l^{'})$ à $(vi_l^{'})$ pour $l = 1$.

$(i_l^{'})$ $\forall n = 1, .., l,\ \mathcal{B}_n = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{B}_n^j$ où chaque $\mathcal{B}_n^j$ est formées de boules fermées deux à deux disjointes,
$(ii_l^{'})$ $\forall B = \overline{B}(x,r) \in \bigcup_{n=1}^{l} \mathcal{B}_n,\ x \in L$,
$(iii_l^{'})$ $L \cap \bigcup \mathcal{B}_n \subset G$ et $G = L \cap \bigcup \mathcal{B}_n \mod \mathcal{S}_{t-1}$ pour chaque $n = 1, .., l$,
$(iv_l^{'})$ $\forall n, n' \in \{1, .., l\},\ n' > n\ \forall C \in \mathcal{B}_n, C' \in \mathcal{B}_{n'}$ on a $C' \subset C$ ou $C' \cap C = \emptyset$,
$(v_l^{'})$ $\sup\{\mathrm{diam}(C);\ C \in \mathcal{B}_n\} \leq r_n$ pour chaque $n = 1, .., l$,
$(vi_l^{'})$ $\forall n = 1, .., l,\ \forall x \in L \cap \bigcup \mathcal{B}_n,\ \exists r > 0;\ \#\{B \in \mathcal{B}_n;\ \overline{B}(x,r) \cap B \neq \emptyset\} < \infty$.

Supposons construites les familles $\mathcal{B}_1, .., \mathcal{B}_l$ satisfaisant les conditions $(i_l^{'})$ à $(vi_l^{'})$. Posons alors

$$H := (\bigcup \mathcal{B}_l \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}_l} \partial B) \cap L.$$

H est relativement ouvert dans L. En effet, soit $x \in H$. Alors, $\exists B \in \mathcal{B}_l,\ x \in \overset{\circ}{B}$ qui est un ouvert, donc il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset \overset{\circ}{B}$. Mais par $(vi_l^{'})$, $\exists r_2$ tel que $\overline{B}(x, r_2)$ ne rencontre qu'un nombre fini N d'éléments de $\mathcal{B}_l$ notés $B_1, .., B_N$. Posons

$$r := \min(r_1, r_2) \text{ et } O := (B(x,r) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \partial B_j) \cap L.$$

Alors, O est un ouvert de L contenu dans H. Donc H est bien relativement ouvert dans L (et il est clairement borné car contenu dans G).

On peut donc appliquer la première étape à H avec $\epsilon = r_{l+1}$, pour obtenir une famille de boules fermées $\mathcal{B}_{l+1}$. Cette nouvelle famille vérifie trivialement les conditions $(i^{'}_{l+1})$, $(ii^{'}_{l+1})$, $(v^{'}_{l+1})$ et $(vi^{'}_{l+1})$. Reste donc à vérifier les deux autres. Commençons par $(iii^{'}_{l+1})$.

Si B est du boule donc le centre est dans L alors

$$\partial B \cap L = \begin{cases} \text{sphère de dimension } t-1 \text{ si } t \geq 1 \\ \text{singleton ou } \emptyset \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

Donc

$$L \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B}_l} \partial B \in \mathcal{S}_{t-1}.$$

Mais $L \cap \bigcup \mathcal{B}_{l+1} \subset L \cap \bigcup \mathcal{B}_l \subset G$ et par $(iii^{'}_l)$ on déduit que

$$G = L \cap \bigcup \mathcal{B}_{l+1} \bmod \mathcal{S}_{t-1}.$$

Montrons maintenant $(iv^{'}_{l+1})$. Soient $C' := \overline{B}(x', r') \in \mathcal{B}_{l+1}$ et $C := \overline{B}(x, r) \in \mathcal{B}_k$ telles ques $C \cap C' \neq \emptyset$. (On rappelle que $x, x' \in L$). On va montrer que $C' \subset C$.

Premier cas : $k < l$.

Alors, il existe $C" \in \mathcal{B}_l$ tel que $C' \subset C"$ car $C' \cap L \subset \bigcup \mathcal{B}_l \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}_l} \partial B$. Mais comme on a $(iv^{'}_l)$ et que $C" \cap C \neq \emptyset$, on a donc $C' \subset C" \subset C$.

Second cas : $k = l$.

-Si L est un sous-espace affine :

Par définition de H, il est clair que $C' \cap L \cap \partial C = \emptyset$. L'intersection des deux boules étant non vide, on a $d(x, x') < r + r'$.

Supposons que $r' \leq d(x, x') + r$.

Alors, il existe $y \in [x, x') \cap C' \cap \partial C$. Mais L étant convexe, $[x, x') \subset L$. C'est donc absurde.

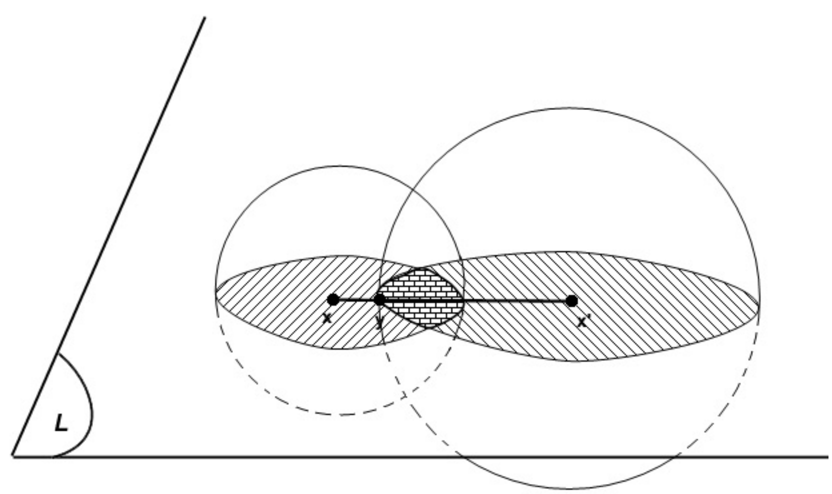

Fig. 3 Intersection de boules

Ainsi $r' > d(x, x') + r$ et donc $C' \subset C$.

-Si L est une sphère :

Alors $L = W \cap \partial B$ où W espace affine de dimension $t+1$ et B boule fermée de $\mathbb{R}^d$ dont le centre est dans W. Notons $r := \mathrm{diam}(B)$.

On peut alors choisir la suite $(r_n)_n$ (en fonction de r) de sorte que si $l \in \mathbb{N}$, et si U et V sont deux boules fermées dont les centres sont des points de B et telles que $\mathrm{diam}(U) < r_l$ et $\mathrm{diam}(V) < r_{l+1}$ et $U \cap V \neq \emptyset$, alors $U \cap V \cap B \neq \emptyset$. Il est alors clair que la condition (iv'_{l+1}) est vérifiée. □

1.3. Preuve du théorème.

La preuve se déduit immédiatement du fait suivant :

Affirmation 5.1.6. Soient $L \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace affine de dimension t ou une sphère de dimension t et $B \subset L$ un borélien, alors $B \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$.

Démonstration. On procède par récurrence sur t.

Si $t = 0$, alors les seules possibilités pour B sont $\emptyset$, $\{x\}$ ou $\{x, y\}$. Mais

$$\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B((\frac{1}{2^n}, .., \frac{1}{2^n}), \frac{1}{2^n}) \text{ et } \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n})$$

donc $B \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$.

Hypothèse de récurrence (HR) le résultat est vrai $\forall t \leq p-1$.

Considérons maintenant le cas $t = p$. Soit $G \subset L$ relativement ouvert et borné. Par le lemme 5.1.5 , il existe G_1 et $G_2 := G \setminus G_1$ tels que

$$G_1 \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B}), \quad G_2 \in \mathcal{S}_{p-1} \text{ et } G = G_1 \uplus G_2$$

Il suffit alors de voir que $G_2 \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$ grâce à l'hypothèse de récurrence.

En effet, il existe une famille $(S_n)_n$ de sphères de dimension $p-1$ telle que $G_2 \subset \bigcup_n S_n$. On a alors que

$$G_2 = \bigcup_k \bigcup_{n=1}^{k} (G_2 \cap S_n)$$

Mais

$$(G_2 \cap S_1) \cup (G_2 \cap S_2) = ((G_2 \cap S_1) \setminus S_2) \uplus ((G_2 \cap S_2) \setminus S_1) \uplus (G_2 \cap S_1 \cap S_2)$$

Or, les trois ensembles du membre de droite sont des boréliens inclus dans une sphère de dimension $p-1$, donc par (HR) ce sont des éléments de $\mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$ et c'est donc aussi le cas de leur réunion (car disjointe) et de G_2. Ainsi $G \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$. C'est vrai pour tout ensemble relativement ouvert et borné, c'est donc vrai pour tout ensemble relativement ouvert : en effet on a donc, si G est relativement ouvert, alors $G = \bigcup_{n>1} G_n$ où la suite croissante $(G_n)_n$ est définie par $G_n := G \cap \{x;\ ||x|| < n\}$, donc $G \in \mathcal{D}^\star(\mathfrak{B})$.Pour terminer, *i.e* passer d'ensembles relativement ouverts à tout borélien, on utilise le lemme 1.1.13. □

Remarque 5.1.7. S. JACKSON et R. DANIEL MAULDIN ont montré ([**6**]) que le résultat restait vrai pour n'importe quelle norme en dimension finie.

2. Cas hilbertien de dimension infinie

D. PREISS & T. KELETI [**4**] ont prouvé que le thèorème précédent est mis en défaut si la dimension n'était plus finie.

Théorème 5.2.1. *La classe monotone engendrée par les boules d'un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie ne contient pas tous les boréliens.*

Notons $X := \{x \in H;\ ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $H' := H \times \mathbb{R}$. Par projection stéréographique, on va avoir une relation biunivoque entre les boules de H et les sous-ensembles de X appelés calottes, que nous définirons et etudierons ci dessous. On va donc en fait montrer que la classe monotone engendrée par les calottes de X ne contient pas tous les boréliens de X.

2.1. Calottes et cercles.

Nous avons besoin d'introduire toute une terminologie afin d'aléger les démonstrations.

Définition 5.2.2. On appelle *calotte* de X tout ensemble de la forme

$$C(y, r) := \{x \in X;\ \langle x, y\rangle > 1 - r\} \text{ où } y \in X \text{ et } r \in \mathbb{R}.$$

On appelle *cercle* de S tout ensemble de la forme

$$S(y, a) := \{x \in X;\ \langle x, y\rangle = a\} \text{ où } y \in X \text{ et } |a| < 1.$$

On note $\mathfrak{C}$ l'ensemble des calottes de X, et $\mathfrak{S}$ l'ensemble des cercles de X que l'on munit de la distance de Hausdorff :

$$\delta(S, T) := \max(\sup_{x \in S} d(x, T),\ \sup_{y \in T} d(y, S)).$$

Remarque 5.2.3.
(1) Soit C une calotte de X, alors

$$\partial C = \begin{cases} \emptyset \text{ si } C = X \text{ ou } C = \emptyset \\ \{x\} \text{ si } C = X \setminus \{x\} \\ S(y, a) \text{ pour certains } y \in X,\ |a| < 1 \end{cases}$$

Dans le cas où la frontière de C est un cercle, on dira que C est une *calotte propre*.

(2) Soient S et $T \in \mathfrak{S}$, alors

$$X\backslash S\cup T \text{ a } \begin{cases} \text{exactement deux composantes connexes si } S=T \\ \text{exactement trois composantes connexes si il existe } x\in X \text{ tel que } S\cap T=\{x\} \\ \text{exactement quatre composantes connexes si } S\cap T \text{ est un ensemble infini} \end{cases}$$

Dans le dernier cas, on dit que S et T se *croisent.*

(3) L'intersection d'un nombre fini de cercles est toujours un ensemble de la forme $W\cap X$ où W est un sous-espace affine fermé de H de codimension finie.

Définition 5.2.4. Deux points x et y de X sont dits séparés par un cercle si il existe $S\in\mathfrak{S}$ telle que les deux points sont chacun dans une composante connexe différente de $X\setminus S$.

Définition 5.2.5. Introduisons la famille d'ensembles $\mathcal{N}$ formée des sous-ensembles $N\subset X$ tels que

$$\forall x\in N,\ \forall\epsilon>0, \exists C\in\mathfrak{C};\ \mathrm{diam}(C)<\epsilon \text{ et } N\cap\partial C=\emptyset.$$

Et désignons par $\mathfrak{N}$ le σ-idéal engendré par $\mathcal{N}$ (c'est à dire l'ensemble des parties qui peuvent être recouvertes par une suite d'éléments de $\mathcal{N}$). Un élément de $\mathfrak{N}$ sera dit *calotte-négligeable.*

Définition 5.2.6. Soit S un cercle. Un sous-ensemble $K\subset X$ est appelé $K-$*ensemble par rapport à* S si $K=S$ ou si il existe une suite (finie ou non) de calottes deux à deux disjointes $(C_j)_j$ telle que $\partial C_0=S$ et $K=X\setminus\bigcup_j\overline{C}_j$.

Remarque 5.2.7. Une calotte propre est clairement un $K-$ensemble puisque son complémentaire est une calotte fermée.

Définition 5.2.8. Soient $E\subset X$, $\mathcal{S}$ une famille de cercles et N un ensemble calotte-négligeable. On dit que $(\mathcal{S},N)$ est admissible pour E si

$$(\mathbf{A1})\ \forall S\in\mathcal{S},\ \forall\epsilon>0,\ \exists S'\in\mathfrak{S};\ \delta(S,S')<\epsilon \text{ et } \forall K'\ K-\text{ensemble } /S' \text{ on a :}$$

$$(S\setminus N\subset E^C \text{ et } K\setminus N\subset E) \quad \text{ou bien} \quad (S\setminus N\subset E \text{ et } K\setminus N\subset E^C),$$

$$(\mathbf{A2})\ \forall(x,y)\in(E\backslash N\cup\bigcup\mathcal{S})\times(E^C\backslash N\cup\bigcup\mathcal{S}),\ x \text{ et } y \text{ sont séparés par un certain } S\in\mathcal{S}.$$

Remarque 5.2.9. Un cercle étant un $K-$ensemble, si $(\mathcal{S},N)$ est admissible pour un ensemble E alors l'hypothèse $(A1)$ implique

$$(\mathbf{A1'})\ \forall S\in\mathcal{S},\ \forall\epsilon>0,\ \exists K,K'\quad K-\text{ensembles } /S',S\text{" vérifiant}$$

$$\begin{cases} K' \setminus N \subset E \text{ et } K'' \setminus N \subset E^C \\ \delta(S,S') < \epsilon \text{ et } \delta(S,S") < \epsilon \end{cases} .$$

Admettons provisoirement deux lemmes qui vont nous permettre de démontrer le fait souhaité.

Lemme 5.2.10. *(Lemme-clé 1)*
(i) Soient K et K' deux $K-$ensemble par rapport à deux cercles S et S' qui se croisent. Alors $K \cap K'$ n'est pas calotte négligeable.
(ii) Soient K' un $K-$ensemble par rapport à un cercle S et $G \subset X$ ouvert tels que $G \cap S \neq \emptyset$. Alors, $G \cap K$ n'est pas calotte-négligeable.

Lemme 5.2.11. *(Lemme-clé 2)*
Soit $E \in \mathcal{M}(\mathfrak{C})$. Alors, il existe $(\mathcal{S}, N)$ admissible pour E. De plus, $\forall S \in \mathcal{S},\ S \subset \partial E$.

On peut maintenant démontrer le fait suivant, dont découle immédiatement le théorème :

Affirmation 5.2.12. Soient C_1 et C_2 deux calottes propres distinctes de X dont les frontières se croisent, on pose $E := C_1 \cap C_2$. Alors, $E \notin \mathcal{M}(\mathfrak{C})$.

Démonstration. Supposons le contraire.
Par le **lemme clé 2** on aurait l'existence d'une famille de cercles $\mathcal{S}$ et d'un ensemble calotte-négligeable N tels que $(\mathcal{S}, N)$ soit admissible pour E et en particulier, $\forall S \in \mathcal{S},\ S \subset \partial E \subset \partial C_1 \cap \partial C_2$. Ce qui est impossible (car $\partial C_1 \neq \partial C_2$), donc $\mathcal{S} = \emptyset$. Mais alors, l'hypothèse (**A2**) de la définition d'admissibilité, implique que E est calotte-négligeable ou E^C l'est.
Cependant, le complémentaire de l'adhérance d'une calotte étant un $K-$ensemble, le **lemme clé 1-(ii)** appliqué à $X \setminus \overline{C}_1$ et X affirme que $X \setminus \overline{C}_1$ n'est pas calotte-négligeable, donc si $E^C = X \setminus C_1 \cup X \setminus C_2$ est calotte n'égligeable, $X \setminus C_1$ l'est aussi et donc $X \setminus \overline{C}_1$ aussi, ce qui est absurde, donc $E^C \notin \mathfrak{N}$.
D'autre part, en applicant encore une fois le **lemme clé 1-(i)** à C_1 et C_2, on voit que $E \notin \mathfrak{N}$. On obtient alors la contraduction voulue. □

2.2. Preuve des lemmes-clé.

Afin de prouver les deux lemmes-clé nous allons avoir besoin d'une succession d'autres lemmes concernant les cercles et les calottes.

Lemme 5.2.13. *(Lemme 1)*
Soit $\mathcal{C}$ une famille monotone de calottes de X. Alors $C := \bigcup \mathcal{C}$ est encore une calotte de X. De plus, si C est une calotte propre, alors $\partial C \in \overline{\{\partial C';\ C' \in \mathcal{C}\}}$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que chaque calotte $C(y,r) \in \mathcal{C}$ vérifie $0 < r < 2$. Posons alors $s := \sup\{r;\ \exists y \in X,\ C(y,r) \in \mathcal{C}\}$ et considérons une suite (croissante) $r_k \to s$ et une suite $(y_k)_k$ d'éléments de X tels que $C(y_k, r_k) \in \mathcal{C}$. Par monotonie de la famille $\mathcal{C}$, la suite de calotte est croissante.

Premier cas : $s = 2$. Alors, $(X \setminus C(y_k, r_k))_k$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. Il existe donc $y \in X$ tel que

$$\bigcap_k (X \setminus C(y_k, r_k)) = \{-y\}.$$

On affirme alors que $\bigcup \mathcal{C} = C(y,s) = X \setminus \{-y\}$. On a clairement que $y_k \to y$. En effet, $||y_k - y||^2 = 2(1 - \langle y_k, y \rangle) \le 2(2 - r_k)$. Ainsi, si $x \in \bigcup \mathcal{C}$, il existe K tel que $\forall k \ge K,\ x \in C(y_k, r_k),\ i.e\ \langle x, y_k \rangle > 1 - r_k$ donc $\langle x, y \rangle \ge -1$ mais si $\langle x, y \rangle = -1$ alors $x = -y \in \bigcap_k (X \setminus C(y_k, r_k))$. Réciproquement, si $\langle x, y \rangle > -1$ alors $x \in (\bigcap_k (X \setminus C(y_k, r_k)))^C = \bigcup \mathcal{C}$.

Deuxième cas : $s < 2$. Alors, il existe une constante c telle que

$$||y_k - y_l|| \le c|r_k - r_l|.$$

En effet, plaçons nous en dimension 2 pour résoudre le problème (il suffit ensuite de considérer le plan passant par 0, $y_k$et y_l) :

Notons $\alpha_{kl} := \widehat{(y_k, y_l)}$, $\theta_i := \widehat{(y_i, x_i)} = \arccos(1 - r_i)$ où x_i est un élément de X tel que $\langle y_i, x_i \rangle = 1 - r_i$ pour $i = k, l$. L'hypothèse d'inclusion implique que $\alpha_{kl} \le |\theta_k - \theta_l|$.

Considérons l'application $\Phi : t \mapsto \arccos(1 - t)$, définie est dérivable sur $]0, 2[$, mais comme $r_k \to s$ (avec $0 < s < 2$) il existe K tel que $\forall k \ge K,\ \frac{s}{2} \le r_k \le s$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$|\theta_k - \theta_l| \le \sqrt{\frac{2}{s(2-s)}}|r_k - r_l|.$$

Mais, $||y_k - y_l|| = 2\sin(\frac{\alpha_{kl}}{2}) \le \alpha_{kl} \le |\theta_k - \theta_l| \le \sqrt{\frac{2}{s(2-s)}}|r_k - r_l|$.

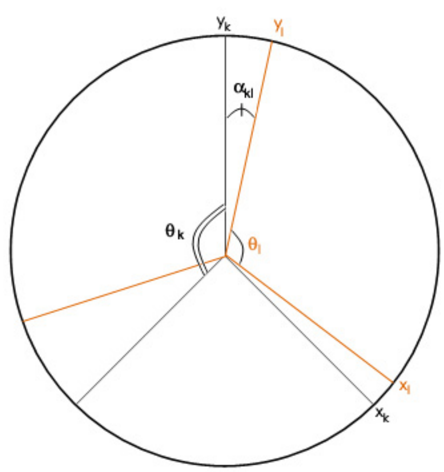

Fig. 4 Calottes en dimension 2

Ainsi $(y_k)_k$ est de Cauchy dans X et converge vers un certain $y \in X$. On affirme alors que $\bigcup \mathcal{C} = C(y,s)$. On a trivialement que $C := \bigcup \mathcal{C} \subset \overline{C(y,s)}$, mais C étant ouvert, on va avoir, par définition du sup, $C \subset C(y,s)$.

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $x \in \partial C(y,s) \cap C$, donc on aurait aussi un $\epsilon > 0$ tel que $\forall z \in B(x,\epsilon) \cap X \subset C$. Cependant, $x \in \partial C(y,s) = \partial C(-y, 1-s)$ donc on peut trouver une suite $(z_n)_n \subset C(-y, 1-s)$ qui tend vers x. Il va donc exister un N tel que, $z_N \in C$, $i.e$ $\exists K$ tel que $\forall k \geq K$, $\langle z_N, y_k \rangle > 1 - r_k > 1 - s$ et donc $\langle z_N, y \rangle \geq 1 - s$ mais $\langle y, z_N \rangle < 1 - s$. Absurde.

Réciproquement, si $\langle x, y \rangle > 1 - s$, on a $\epsilon > 0$ tel que $\langle x, y \rangle > 1 - s + \epsilon$, prenont alors alors k tel que $s - \frac{\epsilon}{2} \leq r_k$ et $||y_k - y|| < \frac{\epsilon}{2}$, on a donc $\langle x, y_k \rangle > 1 - s + \frac{\epsilon}{2} > 1 - r_k$.

On déduit du fait que $r_k \to r$ et $y_k \to y$ que

$$\{x;\ \langle x, y_k \rangle = 1 - r_k\} \to \{x;\ \langle x, y \rangle = 1 - s\},$$

ou encore $\partial C(y_k, r_k) \to \partial C(y,s)$. □

Lemme 5.2.14. *(Lemme 2)*
Soient S et T deux cercles qui se croisent. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que
$$\forall S', T' \in \mathfrak{S} \text{ tels que } \delta(S', S) < \epsilon \text{ et } \delta(T', T) < \epsilon,\ S' \text{ et } T' \text{ se croisent.}$$

Démonstration. Soient S et T deux cercles qui se croisent. Alors, $X \setminus (S \cup T)$ a quatre composantes connexes. Prenons un élément dans chacune de ces composantes et notons les $u_1, .., u_4$. On a en particulier que $\forall i \neq j$, u_i et u_j sont séparés par S ou T. Supposons que ce soit par S. Alors si S' est un cercle tel que

$$\delta(S, S') < \min(d(u_i, S), d(u_j, S)),$$

S' sépare encore u_i et u_j.

En prenant donc $\epsilon < \min(\min_i(d(u_i, T), \min_i(d(u_i, S)))$, on a que

$$\forall (S', T') \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \text{ avec } \delta(S, S') < \epsilon \text{ et } \delta(T, T') < \epsilon,$$

S'(resp. T') sépare les couples (u_i, u_j) séparés par S (resp. T). Ainsi, $X \setminus (S' \cup T')$ a également quatre composantes connexes et on en déduit que S' et T' se croisent. □

Lemme 5.2.15. *(Lemme 3)*
Soit $\mathcal{S}$ une famille de cercles qui ne se croisent pas deux à deux, alors les deux ensembles suivant sont calotte-négligeables :

$$N^1(\mathcal{S}) := \{x \in X;\ x \text{ est dans au moins deux cercles différents de } \mathcal{S}\},$$
$$N^2(\mathcal{S}) := \{x \in X;\ \forall \epsilon > 0,\ \exists C \in \mathfrak{C},\ diam(C) < \epsilon,\ x \in C \text{ et } \partial C \in \mathcal{S}\}.$$

Démonstration. (1) On va montrer que $N^1(\mathcal{S})$ est dénombrable (tout singleton étant calotte-négligeable, cela suffira). Soit $D := \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dense dans X. Si $x \in N^1(\mathcal{S})$ il existe deux cercles S et T dans $\mathcal{S}$ (qui ne se croisent pas) tels que $S \cap T = \{x\}$. Notons U_x, V_x et W_x les composantes connexes de $X \setminus (S \cup T)$ telles que $\partial U_x = S$ et $\partial V_x = T$. Posons ensuite

$$u(x) := e_{n_1} \text{ où } n_1 := \inf\{n;\ e_n \in U_x\},$$
$$v(x) := e_{n_2} \text{ où } n_2 := \inf\{n;\ e_n \in V_x\},$$
$$w(x) := e_{n_3} \text{ où } n_3 := \inf\{n;\ e_n \in W_x\}.$$

et définissons

$$\Phi : N^1(\mathcal{S}) \to D^3,\ x \mapsto (u(x), v(x), w(x)).$$

Montrons que Φ est une injection. Soient $x, x' \in N^1(\mathcal{S})$ tels que $\Phi(x) = \Phi(x')$. Comme $U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset$ et que leurs bords ne se croisent pas et que les deux ensembles sont connexes, on a $U_x \subset U_{x'}$ ou $U_{x'} \subset U_x$. De même pour les autres composantes connexes. Quitte à permutter les rôles de U_x et V_x on se rend compte qu'on a au final que deux possibilités :

$$(a)\ U_x \subset U_{x'} \text{ et } V_x \subset V_{x'},$$
$$(b)\ U_{x'} \subset U_x \text{ et } V_x \subset V_{x'}.$$

Dans le premier cas, on a donc $\{x\} = \overline{U_x} \cap \overline{V_x} \subset \overline{U_{x'}} \cap \overline{V_{x'}} = \{x'\}$.

Dans le second, comme il existe forcément un $y \in W' \setminus W$ on va avoir $W \subset W'$ et donc

$$U_x \subset U_{x'} \subset \overline{U}_x \cup \overline{V}_x.$$

Mais $x \notin U_{x'}$ car $U_{x'}$ est ouvert, U_x et V_x connexes tels que $\overline{U_x} \cap \overline{V_x} = \{x\}$. Par connexité de $U_{x'}$ maintenant on déduit que $U_{x'} \subset \overline{U_x}$ et donc $x \in \partial U_{x'} \cap \partial U_x$ de même $x' \notin U_x$ mais $x' \in \overline{U_x}$ donc $x' \in \partial U_x \cap \partial U_{x'} = \{x\}$ car les deux cercles ne se croisent pas.

(2) Par définition d'un ensemble calotte-négligeable, il suffit en fait de montrer que $\forall S \in \mathcal{S},\ S \cap N^2(\mathcal{S}) = \emptyset$. Si ce n'est pas le cas, on a un $x \in S$ qui est dans des calottes arbitrairement petites dont la frontière est un cercle de $\mathcal{S}$. Mais pour un diamètre assez petit, la frontière d'une telle calotte va croiser S, ce qui est une contradiction. $\square$

Lemme 5.2.16. *(Lemme 4)*
Soient $\mathcal{S}$ une famille fermée non vide de cercles qui ne se croisent pas deux à deux et $y \in (X \setminus \bigcup \mathcal{S}) \setminus N^2(\mathcal{S})$. Alors, il existe une suite (finie ou infinie) de calottes deux à deux disjointes $C_1, .., C_n, ..$ telles que $\forall i,\ \partial C_i \in \mathcal{S},\ y \notin \bigcup_i \overline{C}_i$ et telles qu'il n'existe pas de point de $X \setminus \bigcup_i C_i$ qui soit séparé de y par un cercle de $\mathcal{S}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C} := \{C \in \mathfrak{C};\ y \notin C \text{ et } \partial C \in \mathcal{S}\}$. Deux cercles de $\mathcal{S}$ ne se croisant pas, si C et C' sont dans $\mathcal{C}$, alors $C \cap C' = \emptyset$ ou $C \subset C'$ ou encore $C' \subset C$. Par le lemme 1 et le lemme de Zorn, toute calotte de $\mathcal{C}$ est contenue dans une calotte maximale, elle même appartenant à $\mathcal{C}$ car $\mathcal{S}$ est fermée. Ces calottes maximales sont donc disjointes et l'espaces étant séparable, il n'y en a qu'une quantité au plus dénombrable. On les note donc $C_1, C_2, ...$ Il est clair que si x est un point séparé de y par un cercle $S \in \mathcal{S}$, alors il existe $C \in \mathcal{C}$ avec $\partial C = S$ et $x \in C$ donc $x \in \bigcup_i C_i$. $\square$

Lemme 5.2.17. *(Lemme 5)*
Il existe $s_0 < 1$ tel que trois calottes $C(u_i, r_i)$ vérifiant $r_i \geq s_0$ ne peuvent être deux à deux disjointes.

Démonstration. Soit $C(u_1, s_0)$ une calotte avec $s_0 < 1$. Si $C(u_2, r_2)$ et $C(u_3, r_3)$ sont deux calottes telles que $C(u_i, r_i) \cap C(u_1, s_0) = \emptyset$ et $r_i \geq s_0$ pour $i = 2, 3$ alors u_2 et u_3 sont dans la calotte $C(-u_1, 1 - s_0)$, il suffit de prendre s_0 suffisament proche de 1 pour que $C(u_2, r_2)$ et $C(u_3, r_3)$ se rencontrent. $\square$

Lemme 5.2.18. *(Lemme 6)*
Soit $C_1, C_2, \ldots$ une suite de calottes qui peut être partitionnée en deux sous-suites formées de calottes deux à deux disjointes et telle que aucune des réunions $\overline{C}_i \cup \overline{C}_j$ ne recouvre X. Alors, il existe $x \in X \setminus \overline{C}_1$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall i, j, \ \forall\, 0 < r < \epsilon, \ \partial C(x, r) \not\subset \overline{C}_i \cup \overline{C}_j.$$

Démonstration. Chaque calotte de la suite ne peut être contenue que dans au plus une autre calotte de la suite. Quitte à ne prendre qu'une partie des éléments de la suite, on peut supposer qu'aucune calotte n'est contenue dans une calotte différente. Ainsi, comme $X \not\subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$, on a $\forall i \neq j$, $\partial C_i \setminus C_j \neq \emptyset$.

Premier cas : il existe $1 < i < j$ tels que ∂C_i et ∂C_j se croisent. Prenons alors $x \in \partial C_i \cap \partial C_j$. Alors, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $\forall r < \epsilon_1$, $C(x, r)$ rencontre chacun des quatre ensembles $C_i \cap C_j$, $C_i \setminus \overline{C_j}$, $C_j \setminus \overline{C_i}$ et $X \setminus (\overline{C_i} \cup \overline{C_j})$. Supposons alors que $\partial C(x, r) \subset \overline{C_n} \cup \overline{C_m}$.

Si $C_n \cap C_m = \emptyset$ alors $x \notin \overline{C_n} \cup \overline{C_m}$ (sinon les trois calottes C_m, C_i et C_j se rencontreraient deux à deux, ce qui n'est pas possible) et comme de plus $X \neq \overline{C_n} \cup \overline{C_m}$ alos $\partial C(x, r) \not\subset \overline{C_n} \cup \overline{C_m}$.

Si $C_n \cap C_m \neq \emptyset$ alors on est dans un des cas suivants (par symétrie de C_m et C_n) :

(a) $(C_m = C_i$ et $C_n = C_j) \Rightarrow (\overline{C_n} \cup \overline{C_m}) \cap (X \setminus \overline{(C_i \cup C_j)}) = \emptyset$: impossible.
(b) $(C_m = C_i$ et $C_n \cap C_j = \emptyset) \Rightarrow (\overline{C_n} \cup \overline{C_m}) \cap (C_j \setminus \overline{C_i}) = \emptyset$: impossible.
(c) $(C_m \cap C_i = \emptyset$ et $C_n \cap C_j = \emptyset) \Rightarrow (\overline{C_n} \cup \overline{C_m}) \cap (C_i \cap C_j) = \emptyset$: impossible.

Deuxième cas : Si $\forall\, 1 < i < j$, ∂C_i et ∂C_j ne se croisent pas, et si la suite a au moins deux éléments, on prend $x \in \partial C_2 \setminus \overline{C_1}$. Il existe alors $\epsilon_2 > 0$ tel que $\forall\, 0 < r < \epsilon_2$, $\overline{C(x, r)} \cap \overline{C_1} = \emptyset$. Ainsi, la seule façon pour que $\partial C(x, r) \subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$ est que $i = 2 < j$ mais comme $C_i \cap C_j = \emptyset$, ce n'est pas possible.

Dernier cas : la suite est réduite à C_1, on peut donc choisir $x \in X \setminus \overline{C_1}$, et il existe clairement $\epsilon_3 > 0$ tel que $\forall\, 0 < r < \epsilon_3$, on a $\partial C(x, r) \not\subset \overline{C_1}$.

On prend donc $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. □

Lemme 5.2.19. *(Lemme 7)*
Soit $C_1, C_2, \ldots$ une suite de calottes qui peut être partitionnée en deux sous-suites formées de calottes deux à deux disjointes et telle que aucune des réunions $\overline{C}_i \cup \overline{C}_j$ ne recouvre X. Alors,
(i) $X \not\subset \bigcup_i \overline{C}_i$,
(ii) $\forall x \in X \setminus \bigcup_i \overline{C}_i$, $\exists \epsilon > 0$; $\forall C \in \mathfrak{C}$, $x \in C$, $diam(C) < \epsilon$, $\forall i, j$, $\partial C \not\subset \overline{C}_i \cup \overline{C}_j$.

Démonstration. (i) Construisons un $x \in X \setminus \bigcup \overline{C}_i$. Par le lemme 6, il existe $x_1 \in X \setminus \overline{C}_1$ et $0 < \epsilon_1 < d(x_1, \overline{C_1})$ tels que $X \cap \partial C(x_1, \epsilon_1) \not\subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$, $\forall i, j$. Prenons W_1 affine tel que $X \cap W_1 = \partial C(x_1, \epsilon_1)$. On réapplique le lemme 6 avec $X \cap W_1$ à la place de X pour trouver $x_2 \in (X \cap W_1) \setminus \overline{C}_2$ et $0 < \epsilon_2 < 2^{-1} d(x_2, \overline{C_2})$ tels que $X \cap W_1 \cap \partial C(x_2, \epsilon_2) \not\subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$, $\forall i, j$ et $X \cap W_2 = X \cap W_1 \cap \partial C(x_2, \epsilon_2)$. On construit alors une suite $(x_k)_k$ clairement convergente, dont la limite $x \notin \bigcup_i \overline{C_i}$.

(ii) Du fait que la suite de calottes se partionne en deux sous-suites formées de calottes deux à deux disjointes, et par le lemme 5, on déduit qu'il y a au plus quatre calottes $A_k = C(u_k, r_k)$ telles que $r_r \geq s_0$. Soit $x \in X \setminus \bigcup_i \overline{C_i}$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall C \in \mathfrak{C}$ avec $\mathrm{diam}(C) < \eta$ on a

$$\overline{C} \cap A_k = \emptyset,\ k = 1, .., 4$$
$$\text{Si } -x \in C' = C(u, s) \text{ et } \overline{C'} \cap \overline{C} \neq \emptyset, \text{ alors } s > s_0$$

Supposons que $\partial C \subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$. Premier cas : $\overline{C_i} \cap \overline{C_j} = \emptyset$. Alors, $\partial C \subset \overline{C_i}$ (en particulier $C_i \neq A_k$) et donc $-x \in V := X \setminus \overline{C_i}$ mais V contient donc x et $-x$ et V est connexe : c'est une contradiction car x et $-x$ sont séparés par ∂C_i. Second cas : $\partial C \cap \overline{C_k} \neq \emptyset,\ k = i, j$. De le même manière, $-x$ et x sont dans $V' := X \setminus \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$ qui est connexe et on a la même contradiction. □

Lemme 5.2.20. *(Lemme 8)*

Soit W un sous-espace affine fermé de dimension infinie de H et $C_1, C_2, ..$ une suite de calottes qui peut se partionner en deux sous-suites de calottes deux à deux disjointes tels que

(i) $\#(X \cap W) > 1$,

(ii) $\forall i, j$ $X \cap W \not\subset \overline{C}_i \cup \overline{C}_j$.

Alors, $(X \cap W) \setminus \bigcup_i \overline{C}_i$ *n'est pas calotte négligeable.*

Démonstration. Supposons que $(X \cap W) \setminus \bigcup_i \overline{C}_i \subset \bigcup_k N_k$ où chaque $N_k \subset X$ est constitué de points contenus dans des calottes arbitrairement petites dont la frontière ne rencontre pas N_k. On va construire par récurrence une suite décroissante de sous-espaces affines fermés, tels que W_p vérifie (i) et (ii) et $(X \cap W_p)_p$ soit une suite décroissante dont le diamètre tend vers zéro. Posons $W_1 := W$ et supposons $W_1, .., W_p$ construits. On applique le lemme 7 à $X \cap W_p$. On a donc $X \cap W_p \not\subset \bigcup_i \overline{C_i}$ et $\forall x \in (X \cap W_p) \setminus \bigcup_i \overline{C_i},\ \exists \eta_p > 0$ tel que $\forall i, j,\ \forall C \in \mathfrak{C}$ avec $\mathrm{diam}(C) < \eta_p$ et $x \in C,$ on a $X \cap W_p \cap \partial C \not\subset \overline{C_i} \cap \overline{C_j}$.

Mais par hypothèse, $X \cap W_p \subset X \cap W \subset \bigcup_k N_k$. Soit donc

$$k_p := \inf\{k;\ ((X \cap W_p) \setminus \bigcup_i \overline{C_i}) \cap N_k \neq \emptyset\}.$$

Prenons $x_p \in ((X \cap W_p) \setminus \bigcup_i \overline{C_i}) \cap N_{k_p}$ et $\epsilon_p > 0$ tel que

$$\epsilon_p < \min(\eta_p, 2^{-p} d(\overline{C_p}))$$

et x_p étant dans N_{k_p} prenons D_p une calotte contenant x_p de diamètre strictement inférieur à ϵ_p et dont la frontière ne rencontre pas N_{k_p}. Il suffit maintenant de définir W_{p+1} comme un espace affine fermé tel que

$$X \cap W_{p+1} = X \cap W_p \cap \partial D_p.$$

Par construction, W_{p+1} satisfait les propriétés voulues. On en déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $\{x\} = \bigcap_p (X \cap W_p)$. Mais alors $x \in (X \cap W) \setminus \bigcup_i \overline{C_i}$ et $x \notin \bigcup_k N_k$. Absurde. □

2.2.1. *Preuve du lemme-clé 1.*

(i) Premier cas : K et K' sont tous les deux des cercles S et S' qui se croisent. Il existe un sous-espace affine de H' de dimension infinie W tel que $X \cap W = S \cap S'$ (W est l'intersection de deux hyperplans affines) et on prend C_1 une calotte qui ne rencontre pas $S \cup S'$ pour appliquer le lemme 8.

Second cas : $K = X \setminus \bigcup_i \overline{C_i}$ avec $(C_i)_i$ calottes deux à deux disjointes et $\partial C_0 = S$, $K' = S'$ et S et S' se croisent. Soit W un hyperplan affine tel que $W \cap X = S'$.

On veut encore se servir du lemme 8. Montrons qu'on est bien dans les conditions d'applications. Supposons que $S' \subset \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$. Deux cas se présentent : ou bien $X = \overline{C_i} \cup \overline{C_j}$ mais alors $K = \emptyset$ et le problème est trivial, ou bien l'intersection des frontieres est au plus un point et on a alors (quitte à permuter i et j) que $S' \subset \overline{C_i}$, ce qui n'est pas possible car S' et $\partial C_0 = S$ se croisent.

Dernier cas : $K = X \setminus \bigcup_i \overline{C_i}$ avec $(C_i)_i$ calottes deux à deux disjointes et $\partial C_0 = S$, $K' = X \setminus \bigcup_i \overline{C_i'}$ avec $(C_i')_i$ calottes deux à deux disjointes et $\partial C_0' = S'$ avec S et S' qui se croisent. On prend cette fois $W = H$. Il suffit de vérifier que $X \neq \overline{C}_i \cup \overline{C_j'}$. Supposons que ce ne soit pas le cas, posons $D := X \setminus \overline{C}_i$ et $D' := X \setminus \overline{C_j'}$. Alors ou bien $i = 0$ et $S = \partial C_0 \subset \overline{D}$, ou bien $i > 0$ et les calottes étant deux à deux disjointes $S \subset D$. Dans les deux cas, on a $S \subset \overline{D}$. De la même manière, on a $S' \subset \overline{D'}$. Mais comme $X = \overline{C}_i \cup \overline{C_j'}$, D et D' sont deux calottes disjointes et alors S et S' ne peuvent se croiser : contradiction.

(ii) Par hypothèse, il existe $x \in G \cap S$. Il existe alors une calotte C telle que $x \in C$, $\overline{C} \subset G$ et $\partial C = S'$ croise S. Par (i), $K \cap S'$ n'est pas calotte-négligeable, mais $K \cap S' \subset K \cap G$ donc on a le résultat voulu.

2.2.2. *Preuve du lemme-clé 2.*

Notons $\mathcal{A} := \{E \subset X;\ \exists(\mathcal{S}, N) \text{ admissible pour } E\}$.

On va montrer que $\mathcal{A}$ est une classe monotone contenant toutes les calottes.

Le vide et tout singleton étant calotte-négligeables, les calottes du type X ou $X \setminus \{x\}$ sont bien dans $\mathcal{A}$. Si C est une calotte propre, il est aussi clair que $\mathcal{S} := \{\partial C\}$ et n'importe quel ensemble calotte-négligeable conviennent.

De plus, si $E \in \mathcal{A}$ avec $(\mathcal{S}, N)$ admissible pour E, alors il est absolument trivial (en vertu du côté symétrique de la définition) que $(\mathcal{S}, N)$ est également admissible pour E^C. Donc $\mathcal{A}$ est stable par complémentation. D'apres la remarque 1.1.5-(iii) il suffit donc de montrer que $\mathcal{A}$ stable par réunion dénombrable disjointe.

Soient $(E_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $(\mathcal{S}_k, N_k)$ admissible pour E_k. On veut montrer que $E := \biguplus_k E_k \in \mathcal{A}$, c'est à dire construire $(\mathcal{S}, N)$ admissible pour E.

– $\forall (S, T) \in \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$, T et S ne se croisent pas. $(\star)$

En effet, supposons le contraire. Par le lemme 2, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\delta(S, S') < \epsilon$ et $\delta(T, T') < \epsilon$ impliquent que S' et T' se croisent.

Premier cas : $m = n$.

L'hypothèse $(\mathbf{A1'})$ pour $\mathcal{S}_n$ nous fournit alors deux $K-$ensembles K' et L'par rapport à deux cercles S' et T' vérifiant $\delta(S,S') < \epsilon$ et $\delta(T,T') < \epsilon$ et $K' \setminus N_n \subset E_n$ et $L' \setminus N_n \subset E_n^C$. Par le lemme-clé 1, $K' \cap L'$ n'est pas calotte-négligeable. Mais $(K' \cap L') \setminus N_n \subset E_n \cap E_n^C$, *i.e* $K' \cap L' \subset N_n$, c'est une contradiction.

Second cas : $m \neq n$.

Nous utilisons encore $(\mathbf{A1'})$ pour trouver deux $K-$ensembles K' et L' par rapport à deux cercles S' et T' verifiant $\delta(S,S') < \epsilon$ et $\delta(T,T') < \epsilon$ et $K' \setminus N_m \subset E_m$ et $L' \setminus N_n \subset E_n$, mais $E_n \cap E_m = \emptyset$ donc comme précédemment, $K' \cap L' \subset N_n \cup N_m$ ce qui est toujours impossible par le lemme-clé 1.

On définit

$$\mathcal{S}' := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_k \text{ et } \mathcal{S}" := \overline{\mathcal{S}'}.$$

– $\forall (S,T) \in \mathcal{S}" \times \mathcal{S}"$, T et S ne se croisent pas. $(\star')$

C'est une conséquence triviale du lemme 2 et de $(\star)$.

Posons maintenant

$$N_0 := N^1(\mathcal{S}") \cup N^2(\mathcal{S}") \text{ et } N := \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k.$$

Le lemme 3 implique N_0et donc N sont calotte-négligeables.

– $\forall T \in \mathcal{S}"$, $T \setminus N \subset E$ ou $T \setminus N \subset E^C$ $(\star\star)$

Supposons qu'il existe un couple $(x,y) \in (T \cap E \cap N^C) \times (T \cap E^C \cap N^C)$. Soit k tel que $x \in E_k$.

$$\begin{array}{ccc} x \in E_k \setminus N_k & \text{et} & y \in E_k^C \setminus N_k \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ T \setminus N_k \not\subset E_k^C & \text{et} & T \setminus N_k \not\subset E_k \\ & \Downarrow & \\ & T \notin \mathcal{S}_k & \end{array}$$

Mais $x \notin N_0$ (et pareil pour y) donc ils ne peuvent appartenir qu'à au plus un cercle de $\mathcal{S}"$ donc ne sont dans aucun cercle de $\mathcal{S}_k$.

Donc $(x,y) \in E_k \setminus (N_k \cup \bigcup \mathcal{S}_k) \times E_k^C \setminus (N_k \cup \bigcup \mathcal{S}_k)$ et par l'hypothèse $(\mathbf{A2})$ il existe $S \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}"$ qui sépare x et y mais alors S et T se croisent, ce qui contredit $(\star')$.

Posons maintenant

$$\mathcal{S} := \{S \in \mathcal{S}"; \quad S \text{ vérifie } (\mathbf{A1}) \text{ pour } E \text{ et } N\}.$$

On va voir que $(\mathcal{S}, N)$ convient.

– $\forall S \in \mathcal{S}"$ tel que $S \cap (E^C \setminus N)$, on a $S \in \mathcal{S}$. $(\star\star\star)$

Prenons donc un tel S. Par $(\star\star)$ et par hypothèse, on a $S \setminus N \subset E^C$. De plus, soit $\epsilon > 0$. Il existe k et $T \in \mathcal{S}_k$ tels que $\delta(S,T) < \frac{\epsilon}{2}$. Utilisons maintenant $(\mathbf{A1'})$ pour

T dans $\mathcal{S}_k$: il existe K' $K-$ensemble par rapport à un cercle S' avec $\delta(S',T) < \frac{\epsilon}{2}$ et $K' \setminus N \subset K' \setminus N_k \subset E_k \subset E$; c'est la première alternative de l'hypothèse (**A1**), donc $S \in \mathcal{S}$.

Il reste donc à prouver que $\mathcal{S}$ vérifie (**A2**). Soit $(x,y) \in E \setminus N \cup \bigcup \mathcal{S} \times E^C \setminus N \cup \bigcup \mathcal{S}$. (En particulier, $\mathcal{S}$" est non vide).

On remarque déjà, du fait que si $S \in \mathcal{S}$" avec $S \cap (E^C \setminus N) \neq \emptyset$ alors $S \in \mathcal{S}$, que $y \in E^C \setminus N \cup \bigcup \mathcal{S}$".

On a maintenant besoin du fait suivant, dont la justification ne semble pas claire dans l'article : tout point de $E \setminus N$ est séparé de y par $\mathcal{S}$".

On peut alors trouver au moins un cercle de $\mathcal{S}$ qui sépare x et y. Premier cas : il en existe un d'intersection non vide avec $E^C \setminus N$, et donc il est dans $\mathcal{S}$ et on a le résultat souhaité. Second cas : tout cercle séparant x et y est dans $E \setminus N$, on a (par le lemme 4, la famille $\mathcal{S}$" étant non vide et fermée) une suite de calottes deux à deux disjointes $C_1, C_2, ..$ telles que $\partial C_i \in \mathcal{S}$", $y \notin \bigcup_i \overline{C_i}$ et aucun point de $X \setminus \bigcup_i C_i$ ne peut être séparé de y par un cercle de $\mathcal{S}$". Comme c'est le cas pour x, il existe i_0 tel que $x \in C_{i_0}$. Posons alors $S := \partial C_{i_0}$ et $K := X \setminus \bigcup_i \overline{C_i}$ (qui est bien un $K-$ensemble par rapport à S). Alors S sépare x et y donc $S \setminus N \subset E$ et comme tout point de $E \setminus N$ est séparé de y par un cercle de $\mathcal{S}$", il suit que $K \setminus N \subset E^C$ et donc $S \in \mathcal{S}$.

Vérifions néanmois que $\forall S \in \mathcal{S},\ S \subset \partial E$. Supposons qu'il existe $x \in \overset{\circ}{E} \cap S$, *i.e* $S \cap \overset{\circ}{E} \neq \emptyset$. Par le **lemme-clé 1-(ii)** $S \cap E$ n'est pas calotte-négligeable. Mais x étant intérieur à E, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall S' \in \mathfrak{S},\ \delta(S,S') < \epsilon$ on a $S' \cap E \neq \emptyset$. Soit alors K' un $K-$ensemble par rapport à un tel S'. Toujours par le **lemme-clé 1-(ii)** $K' \cap E$ n'est pas calotte-négligeable. L'admissibilité du couple $(\mathcal{S}, N)$ entraîne que

$$\begin{array}{ccc} S \setminus N \subset E^C & \text{ou} & K' \setminus N \subset E^C \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S \cap E \subset S \cap N \subset N & \text{ou} & K' \cap E \subset K' \cap N \subset N \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S \cap E \in \mathfrak{N} & \text{ou} & K' \cap E \in \mathfrak{N} \end{array}$$

C'est absurde. Donc $S \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$. En permuttant E et E^C on trouve $S \cap \overset{\circ}{E^C} = \emptyset$ et donc on a $S \subset \partial E$.

Bibliographie

[1] R. O. Davies, Measures not approximable or not specifiable by means on ball. *Mathematika* **18** (1971), 157-160

[2] D. Preiss & J. Tiser, Measures in Banach spaces are determined by their values on balls. *Mathematika* **38** (1991), 391-397

[3] M. Zeleny, The Dynkin system generated by balls in $\mathbb{R}^d$ contains all Borel sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** Number **2 (**1999**),** 433-437

[4] T. Keleti & D. Preiss, The balls do not generate all Borel sets using complements and countable disjoint unions. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **128** (2000), 539-547

[5] M. Talagrand, Les boules peuvent-elles engendrer la tribu borélienne d'un espace métrique non séparable ? *Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse* **17** Numéro 2 (1977)

[6] S. Jackson & R. Daniel Mauldin, On the σ-class generated by open balls. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **127** (1999), 99-108

[7] P. Mattila, Geometry of sets ans measures in euclidean spaces. *Cambridge studies in advenced mathematics.* **44** (1995)