université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **UE M1MI 2012 (Algèbre 1)** **Devoir surveillé 1** **Date : 18/03/2014 Heure : 8h30 Durée : 1h30** Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.	Département Licence

Exercice 1 *Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires.*

1. *Montrer que*

   a) *u ne peut pas être surjective ;*

   L'application linéaire u est surjective ssi son rang est égal à $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker u) + \operatorname{rg} u = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ avec $\dim(\ker u) \geq 0$, donc $\operatorname{rg} u = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ker u) \leq 2$.

   b) *v ne peut pas être injective ;*

   L'application linéaire v est injective ssi son noyau est réduit à $\{0\}$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker v) + \operatorname{rg} v = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, avec $\operatorname{rg} v \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$, donc $\dim(\ker v) = \dim(\mathbb{R}^3) - \operatorname{rg} v \geq 3 - 2 = 1$.

   c) *$\ker v \subset \ker(u \circ v)$. En déduire que si u est injective, alors $\ker(u \circ v) = \ker v$.*

   Soit $x \in \ker v$ (i.e. $v(x) = 0$). Alors $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0) = 0$ (on a $u(0) = 0$ car u est linéaire), donc $x \in \ker(u \circ v)$. On a donc montré que $\ker v \subset \ker(u \circ v)$.

   Supposons de plus que u est injective. Soit $x \in \ker(u \circ v)$. Cela signifie que $u(v(x)) = 0$, et comme u est injective, c'est équivalent à $v(x) = 0$, donc $x \in \ker v$. On a donc montré que si u est injective, $\ker(u \circ v) \subset \ker v$. Comme on a montré auparavant l'inclusion réciproque, on a $\ker(u \circ v) = \ker v$ si u est injective.

   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^3$. Soient maintenant u l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   et v l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est

$$B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. *Calculer le rang de A et celui de B.*

   Le rang d'une matrice est le rang de la famille constituée de ses vecteurs colonnes.

   On remarque que les deux vecteurs colonnes de A ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{rg} A = 2$.

   La matrice B a deux lignes donc $\operatorname{rg} B \leq 2$. En outre, les deux premiers vecteurs colonnes de B ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{rg} B \geq 2$. Par conséquent, $\operatorname{rg} B = 2$.

3. *Déterminer les noyaux de u et de v.*

   Le noyau de u est constitué des éléments $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 0$, c'est-à-dire des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Il est immédiat que la seule solution de ce système est $x_1 = x_2 = 0$ donc que $\ker u = \{0\}$ (on peut aussi utiliser le théorème du rang, puisque l'on vient de montrer que $\operatorname{rg} A = 2$).

De même, pour déterminer le noyau de v, il faut résoudre $BX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ou encore

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En soustrayant deux fois la première ligne à la seconde, on obtient le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 5x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

et les solutions vérifient donc $x_2 = x_3$ (deuxième équation) et par conséquent $x_1 = 2x_2 - x_3 = x_3$ (première équation), ou encore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker v \quad \text{ssi} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Le sous-espace vectoriel $\ker v$ de $\mathbb{R}^3$ est donc de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. *Calculer les produits AB et BA. Que représentent les matrices obtenues par rapport à la composition de u et de v ?*

   On calcule immédiatement

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

   La matrice AB est la matrice de l'application linéaire $u \circ v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (i.e. $u \circ v$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et la matrice BA est la matrice de l'application linéaire $v \circ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (i.e. $v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

5. *Que vaut le rang de $u \circ v$? [On pourra utiliser la question 1.c) ou faire un calcul direct]*

   Le rang de $u \circ v$ est égal au rang de la matrice AB qui est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On voit que les deux premiers vecteurs colonnes de AB ne sont pas colinéaires, donc $\operatorname{rg}(AB) \geq 2$, et on constate que la somme des deux premiers vecteurs colonnes est égale à l'opposé du troisième. Par conséquent, $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(AB) = 2$.

   On peut aussi faire le raisonnement suivant : comme u est injective (d'après la question 3), on déduit de 1.c) que $\ker(u \circ v) = \ker v$ qui est de dimension 1 (d'après la question 3 également) et donc, par le théorème du rang, $rg(u \circ v) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\ker(u \circ v)) = 3 - 1 = 2$.

6. *Montrer que $v \circ u$ est bijective.*

   Comme précédemment, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(BA)$, et on voit immédiatement que les deux vecteurs colonnes de BA ne sont pas colinéaires. Par conséquent, $\operatorname{rg}(BA) = 2$. En outre, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n est bijectif ssi il est de rang n. L'endomorphisme $v \circ u$ de $\mathbb{R}^2$ est donc bijectif.

Exercice 2 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E (i.e. une application linéaire de E dans E) tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.*

Soit $x \in E$ un élément non nul.

1. *Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre [on pourra appliquer f à une combinaison linéaire de x et $f(x)$].*

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$. Si on applique f à cette égalité, on trouve

   $$f(\lambda x + \mu f(x)) = \lambda f(x) + \mu f \circ f(x) = \lambda f(x) - \mu x = f(0) = 0$$

   donc λ et μ vérifient à la fois $\lambda x + \mu f(x) = 0$ et $\lambda f(x) - \mu x = 0$. Ensuite, pour éliminer $f(x)$, on peut par exemple multiplier la première équation par λ, la deuxième par $-\mu$ et additionner. On obtient $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$. Comme x n'est pas nul, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, ce qui entraîne $\lambda = \mu = 0$. La famille $(x, f(x))$ est donc libre.

2. *Si E est de dimension 2, montrer que $(x, f(x))$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans la base $(x, f(x))$?*

   On vient de montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre. Or, cette famille compte deux éléments et par conséquent, si $\dim E = 2$, c'est une base de E. Si on note $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$, on a $f(e_1) = f(x) = e_2$ et $f(e_2) = f(f(x)) = -x = -e_1$ donc la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *On suppose maintenant que E est de dimension au moins 3. Soit y un élément de E qui n'appartient pas à $\operatorname{Vect}\{x, f(x)\}$ (l'espace vectoriel engendré par x et $f(x)$).*

   a) *Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.*

      Soient α, β, γ et δ des réels tels que $\alpha x + \beta f(x) + \gamma y + \delta f(y) = 0$. On applique comme précédemment f à cette égalité et on obtient $\alpha f(x) - \beta x + \gamma f(y) - \delta y = 0$. Pour éliminer $f(y)$, on peut multiplier la première équation par γ, la deuxième par $-\delta$ et additionner. On obtient $(\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\beta\gamma - \alpha\delta)f(x) + (\gamma^2 + \delta^2)y = 0$.

      Si $\gamma^2 + \delta^2$ n'était pas nul, y serait combinaison linéaire de x et $f(x)$. Or, on a supposé que $y \notin \operatorname{Vect}\{x, f(x)\}$ donc $\gamma^2 + \delta^2 = 0$, ce qui implique que $\gamma = \delta = 0$. Ensuite, puisque $(x, f(x))$ est libre, on a aussi $\alpha = \beta = 0$. En conclusion, $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

   b) *En déduire que E ne peut pas être de dimension 3.*

      Si E est de dimension au moins 3, on vient de montrer qu'il existe une famille libre de E qui compte 4 éléments, ce qui implique que $\dim E \geq 4$.

   c) *Si E est de dimension 4, trouver une base de E dans laquelle f a pour matrice*

      $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

      Si E est de dimension 4, la famille libre $(x, f(x), y, f(y))$ qui a 4 éléments est une base. Si on procède comme pour la question 2, on constate immédiatement que la matrice de f dans cette base est la matrice demandée.