Université Bordeaux 1
Licence de Sciences, Technologies, Santé
Mathématiques, Informatique, Sciences de la Matière et Ingénierie
M1MI1002 Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique

Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique

FASCICULE D'EXERCICES

Table des matières

Avant-propos

Ce fascicule rassemble un choix d'exercices couvrant le programme de l'UE **M1MI1002** *"Fondements pour les Mathématiques et l'Informatique"*. Il s'agit à la fois d'une base dans laquelle on pourra puiser les exercices à développer en travaux dirigés, et d'un outil de travail personnel pour les étudiants. Il va de soi que l'on ne pourra traiter l'intégralité de ces exercices pendant les 21 séances de cours/travaux dirigés.

Les exercices proposés sont de difficulté assez variable : les énoncés jugés un peu plus difficiles sont signalés par des étoiles ★.

Le contrôle des connaissances consiste, pour cette UE, en :

- deux devoirs surveillés d'une durée d'1h30, affectés chacun d'un coefficient 0.4,
- de tests, pendant les séances de cours, et de devoirs en temps libre dont la moyenne des notes est affectée d'un coefficient 0.2.

Le style et le niveau des exercices (sans étoile) de ce recueil donnent une indication de ce qui est attendu des étudiants pour les devoirs surveillés.

Chapitre 1

Rudiments de logique

1.1 Opérations logiques

Exercice 1.1. P, Q et R désignent trois propositions logiques.

1. Construire les tables de vérité des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (b) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q))$
   (c) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg(P \Rightarrow \neg Q))$
2. Exprimer sans $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$:
   (a) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   (b) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$
   (c) $\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 1.2.

1. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $P \ \ et \ \ (P \ \ ou \ \ Q)$?
   (a) $P \ \ et \ \ Q$
   (b) $P \ \ ou \ \ Q$
   (c) P
   (d) Q
2. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $(P \ \ et \ \ Q) \ \ ou \ \ P$?
   (a) $P \ \ et \ \ Q$
   (b) $P \ \ ou \ \ Q$
   (c) P
   (d) Q

Exercice 1.3.

1. Quelle est la négation de : $(non\ \ P)\ \ et\ \ Q$?
   (a) $P\ \ et\ \ (non\ \ Q)$
   (b) $P\ \ ou\ \ (non\ \ Q)$
   (c) $(non\ \ P)\ \ ou\ \ Q$

2. Quelle est la négation de : $P\ \ ou\ \ (non\ \ Q)$?
   (a) $(non\ \ P)\ \ ou\ \ Q$
   (b) $(non\ \ P)\ \ et\ \ Q$
   (c) $(non\ \ P)\ \ et\ \ (non\ \ Q)$
   (d) $P\ \ et\ \ (non\ \ Q)$

3. Quelle est la négation de : $(non\ \ P)\ \ ou\ \ (non\ \ Q)$?
   (a) $P\ \ et\ \ Q$
   (b) $P\ \ ou\ \ Q$
   (c) $(non\ \ P)\ \ et\ \ (non\ \ Q)$

Exercice 1.4. Dans un journal est annoncée la nouvelle suivante :

L'armée ne quittera pas le pays tant que le calme n'est pas revenu.

En considérant l'annonce officielle précédente comme vraie, dire si les argumentations suivantes sont correctes :

1. " Le calme est revenu, donc l'armée quitte le pays. "
2. " L'armée quitte le pays, donc le calme est revenu. "
3. " L'armée n'a pas quitté le pays, donc le calme n'est pas revenu."

Exercice 1.5. On suppose que `a` et `b` sont des nombres réels. Représenter par une formule logique la valeur de chacune des expressions suivantes en langage Python :

1.
```
if a > b :
   a < 2*b
else:
   True
```
2.
```
if a > b :
   a < 2*b
else:
   False
```
3.
```
if a > b :
   a < 2*b
else:
   b < 3*a
```

1.2 Quantificateurs

Exercice 1.6. Écrire les négations logiques des propositions suivantes :

1. $(x^2 \geq 1 \wedge x^3 < 2) \vee (x^2 \leq 9 \wedge x < 0)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.
3. $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \geq n$.
4. " Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un élément de l'intervalle $[0, 1]$."

Exercice 1.7. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. La définition de $A \subset B$ est "tout élément de A est élément de B". À quelle(s) proposition(s) ci-dessous cela correspond-il ?

- $\forall x \in A, x \in B$
- $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$
- $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$

Exercice 1.8. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la définition de "f est bornée" est "$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Donner la définition de "f n'est pas bornée".

La définition de "f est croissante" est "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$". Donner la définition de "f n'est pas croissante".

Exercice 1.9. Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant la réponse)

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$.

Exercice 1.10. Écrire sous la forme d'une formule avec quantificateurs les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel possède une racine carrée réelle.
2. Tout entier naturel possède un réel positif plus grand que lui.
3. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.
4. L'intervalle I est inclus dans $[1, 2]$.

Exercice 1.11.

1. Soient a, b deux entiers naturels et soit $n = a \cdot b$. Compléter les phrases suivantes afin qu'elles soient vraies (il peut y avoir plusieurs solutions possibles) :
   (a) ...et un multiple de a.
   (b) b et un diviseur de ....
   (c) n est divisible par ....
2. Écrire sous forme d'une formule quantifiée et démontrer.
   (a) La somme (la différence) de deux entiers pairs est paire.
   (b) La somme (la différence) d'un entier pair et un entier impair est impaire.
   (c) La somme (la différence) de deux entiers impairs est paire.
3. Est-il possible de généraliser les énoncés de la manière suivante ?
   (a) Soit k un entier naturel. La somme (la différence) de deux multiples de k est toujours un multiple de k.
   (b) Soit k un entier naturel. La somme (la différence) de deux entiers divisibles par k est toujours aussi divisible par k.
   (c) Soit k un entier naturel. La somme d'un entier divisible par k et un entier non divisible par k n'est jamais divisible par k.
   (d) Soit k un entier naturel. La somme (la différence) de deux entiers non divisible par k est toujours divisible par k.
4. Écrire sous forme d'une formule quantifiée et démontrer.
   (a) Tout entier divisible par 6 est pair.
5. Compléter les phrases pour former les proposition que l'on peut déduire de l'énoncé précédent :
   (a) Il n'existe pas d'entier .... qui soit divisible par 6.
   (b) Si un entier est impair, alors il .... être divisible par 6.
   (c) Si un entier est pair, alors il .... être divisible par 6.
   (d) Etre ...... est une condition nécessaire pour qu'un entier soit divisible par 6.
   (e) Etre ...... est une condition suffisante pour qu'un entier ne soit pas divisible par 6.
6. Ecrire sous forme d'une formule quantifiée et démontrer.
   (a) Soient k un entier naturel et d un diviseur de k. Montrer que tout entier divisible par k est divisible par d.

Exercice 1.12. Traduire par une formule logique la valeur retournée par la fonction Python

```
def f(p,q):
    for n in range(p):
        if n*n == q:
            return True
     return False
```

en supposant que les paramètres `p` et `q` sont des entiers naturels.

1.3 Raisonnement par l'absurde

Exercice 1.13. Montrer par l'absurde que 0 n'est pas racine de $x^4 + 12x - 1$.

Exercice 1.14. Montrer par l'absurde que le polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

Exercice 1.15. Démontrer la propriété suivante par l'absurde :

" Tout entier de carré impair est impair "

Exercice 1.16. *Principe des tiroirs* Démontrer que lorsque l'on range $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors au moins un des tiroirs contient au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 1.17. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer la propriété (P) suivante :

Au moins deux de ces réels sont distants de moins de $\frac{1}{n}$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs une formule logique portant sur les quantités $x_i - x_{i-1}$ équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. En déduire une démonstration par l'absurde de la propriété (P).

Exercice 1.18. Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Alice et Bob sont deux habitants de cette île. Alice déclare "L'un d'entre nous deux au moins est un menteur". Montrer par l'absurde que Alice est sincère. Qu'en est-il de Bob ?
2. Chloé et Denis sont deux autres habitants. Chloé déclare "Je suis menteuse ou Denis est sincère". Montrer par l'absurde que Chloé est sincère. Qu'en est-il de Denis ?
3. Gaspard, Melchior et Balthazar sont trois habitants. Gaspard déclare : "Nous sommes tous menteurs". Melchior dit : "Un et un seul d'entre nous est sincère". Montrer par l'absurde que Gaspard est un menteur, puis que Melchior est sincère. Qu'en est-il de Balthazar ?

Exercice 1.19. *Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Supposons qu'il existe deux entiers naturels tels que $p^2 = 2q^2$.

1. Montrer qu'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
2. Montrer que p est pair.
3. En déduire que q est pair.
4. En déduire que p et q n'existent pas.

1.4 Raisonnement par la contraposée

Exercice 1.20. Écrire les réciproques et les contraposées des implications suivantes :

1. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ |f(x)| < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) = 0)$

Exercice 1.21. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

Exercice 1.22. *Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

“ Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair ”

1. Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une formule mathématique.
2. Écrire la contraposée de la formule donnée à la question 1).
3. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver que la formule de la question 2) est vraie.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 1.23. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.

1. Quelle est la contraposée $\mathcal{Q}(x)$ de la proposition
   $\mathcal{P}(x)$: “$x < 0 \Rightarrow x < x^2$ ” ?
2. Démontrez $\mathcal{Q}(x)$.

1.5 Raisonnement par récurrence

Exercice 1.24. Montrer que $\forall n \geq 15,\ \dfrac{3^n}{n!} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 1.25. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 1.26. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$P_n \ : \ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la propriété P_n est vraie ?

Exercice 1.27.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 1.28. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \text{et } c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Montrer que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = a_n^2$.

Exercice 1.29. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout couple (x, y) de nombres réels, on a
$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Indication : remarquer que $x^{n+1} - y^{n+1} = (x^n - y^n)\, y + (x-y)\, x^n$.

Exercice 1.30. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 1.31.

1. Montrez que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n^2.
2. Montrez que la somme des *carrés* des n premiers entiers impairs est égal à $\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
3. Montrez que la somme des *cubes* des n premiers entiers impairs est égal à $2n^4 - n^2$.

★ **Exercice 1.32.** On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le procédé suivant

- $u_0 = 1$,
- $u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \begin{cases} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 1.33. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

- $u_0 = 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k\ .$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 1.34. Trouver l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant :

Soit à prouver que si, dans une pièce, il se trouve n personnes dont au moins une fille, les n personnes sont des filles.

La propriété est évidemment vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie pour n, et soit dans une pièce $n+1$ personnes, dont une fille F. On fait sortir une personne P, qui n'est pas F. Restent n personnes dont F : d'après l'hypothèse de récurrence, toutes ces personnes sont des filles. On fait alors sortir F et rentrer P : il se trouve dans la pièce n personnes qui sont toutes des filles, sauf peut-être P ; d'après l'hypothèse de récurrence, ce sont donc toutes des filles. On fait rentrer F : il y a bien $n + 1$ filles dans la pièce. Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

Exercice 1.35. Soient P_n la propriété “9 divise $10^n - 1$” et Q_n la propriété “9 divise $10^n + 1$”.

1. Montrer que si n est un entier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ (on pourra utiliser $10^{n+1} = 10^n.(9 + 1)$)
2. “$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$” est-elle vraie ? Et “$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n$” ?

Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensembles

Exercice 2.1.

1. Soient $A = \{2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Déterminer :

$$A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} B \quad , \quad \complement_{A \cup B} A$$

2. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1, 3]$ et $J = [2, 4]$. Déterminer :

$$I \cap J \quad , \quad I \cup J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} I \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}}(I \cup J).$$

Exercice 2.2. Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Trouver deux parties F et G de A telles que

$$(F \backslash G) \cup G = F,$$

puis deux parties F' et G' de A telles que

$$(F' \backslash G') \cup G' \neq F'.$$

A quelle condition sur F et G a-t-on $(F \backslash G) \cup G = F$?

Exercice 2.3. Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Exercice 2.4. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 2.5. Soient E un ensemble, et F, G deux parties de E. Montrer que

$$F \subset G \Longleftrightarrow F \cup G = G \Longleftrightarrow \complement_E F \cup G = E.$$

Exercice 2.6. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \cup B \cup C \; = \; (A \setminus B) \; \cup \; (B \setminus C) \; \cup \; (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$$

Exercice 2.7. Soient A_1, A_2 et A_3 trois parties d'un ensemble E. Donner une écriture plus simple des parties $\complement_E(\complement_E A_1 \cup (\complement_E A_2 \cap \complement_E A_3))$ et $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \complement_E A_2)$.

Exercice 2.8. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, représenter les ensembles suivants :

1. $\{1\} \times \{2, 3, 4\}$
2. $\{0, 2\} \times \{-1, 3\}$
3. $\{1\} \times \mathbb{R}$
4. $[0, 1] \times [1, 2]$
5. $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$
6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
8. $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

Exercice 2.9. Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

1. Pour toute partie A de E, déterminer $E \,\Delta\, A$, $A \,\Delta\, A$, $A \,\Delta\, \complement_E A$ et $\emptyset \,\Delta\, A$.
2. Montrer que
$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$
3. Etant données trois parties A, B et C d'un ensemble E, montrer que :
$$A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice 2.10. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Existe-t-il des parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $C = A \times B$?

2.2 Applications

2.2.1 Images, antécédents

Exercice 2.11. Soit f_1 définie par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

1. Déterminer les images de 0, 1, -2 et $\sqrt{2}$.
2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1, -2 et $\sqrt{2}$.

Exercice 2.12. Pour l'application f_3 définie par :

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y \end{array}$$

1. Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.
2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0 et 1.

Exercice 2.13. Pour l'application f_4 définie par :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x^2, x+5) \end{array}$$

1. Déterminer les images de 0, 1 et -1.
2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$, $(-1,0)$ et $(1,6)$.

Exercice 2.14. On considère la fonction Python suivante :

```
def rac(n):
    for p in range(n):
        c = p*p
        if c > x :
            return p-1
        if c ==x :
            return p
        p = p+1
```

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application qui à un entier x associe `rac`(x).

1. Déterminer les images par f de 0, 1, 2, et 10.
2. Déterminer, s'il y en a, les antécédents par f de 0, 1, 2 et 10.

2.2.2 Image directe et image réciproque

Exercice 2.15. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

1. Déterminer les images directes $f(\{-1, 2\})$; $f([-3, -1])$; $f([-3, 1])$.
2. Déterminer les images réciproques $f^{-1}(\{4\})$; $f^{-1}(\{-1\})$; $f^{-1}([-1, 4])$.

Exercice 2.16. Soit $f : A \to B$ une application, et soient X_1 et X_2 des parties de A. Montrer les propriétés suivantes :

1. si $X_1 \subseteq X_2$, alors $f(X_1) \subseteq f(X_2)$
2. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
3. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 2.17. Soit une application $f : E \to F$ définie sur des ensembles quelconques. Déterminer l'image directe par f des ensembles X_0 et X_1 dans les cas suivants :

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k + 1$; X_0 est l'ensemble des nombres pairs, $X_1 = f(X_0)$.
2. $p \in \mathbb{N}$ étant donné, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par $f(k) = 2k$ si $k \geq p$ et $f(k) = 0$ sinon ; $X_0 = \mathbb{N}$, X_1 est l'ensemble des nombres impairs.

★ **Exercice 2.18.** On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2. \end{array}$$

1. Calculer les images réciproques $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(]-\infty, 0])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(]-1, 1])$, $f^{-1}(]4, +\infty[)$.
2. Calculer les images directes par f des ensembles $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0\}$ et $C = [0, 1] \times [-2, 3]$.

Exercice 2.19. a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x, y) = xy$. Déterminer graphiquement $f^{-1}\big(\{0\}\big)$, $f^{-1}\big(\{1\}\big)$ et $f^{-1}\big(\{-1\}\big)$, puis $f^{-1}\big([1, +\infty[\big)$ et $f^{-1}\big(]-\infty, -1]\big)$.

Exercice 2.20. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x, y) = \sin(y/x)$. Déterminer $f^{-1}\big(\{0\}\big)$.

2.2.3 Composition des applications

Exercice 2.21.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, les expliciter et préciser le domaine sur lequel elles sont définies.

Exercice 2.22. On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

Pour chacune des expressions $f \circ g$ et $g \circ f$, dire si elle a un sens, et si oui, l'expliciter.

2.2.4 Injection, surjection, bijection

Exercice 2.23. On considère les deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d, e\}$. Déterminer toutes les applications de E dans F et dire, pour chacune d'entre elles, si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 2.24. On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+3 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x+5 \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$ et $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 2.25. L'application $h : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{cases}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2.26. Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 2.27. On pose $U =]1, 2[\times]0, \pi[$ et on définit $f : U \to \mathbb{R}^2$ par $f(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. Déterminer $V := f(U)$. L'application f est-elle injective ? bijective ? Soit $g : U \to V$ l'application définie par $g(r, \theta) = f(r, \theta)$. L'application g est-elle bijective ?

Exercice 2.28. Cet exercice permet de se familiariser avec les notions d'injections, surjections, bijections entre ensembles finis. On pourra, une fois l'exercice terminé, rappeler les théorèmes qu'on a (implicitement) utilisés.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. A chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier entre 1 et n. On a ainsi construit une application de $\{a, b, \cdots, z\}$ dans $\{1, 2, \cdots, n\}$.

- Si les entiers attribués sont tous distincts, quelle condition cela implique t-il sur n ?
- Si tous les entiers de 1 à n sont attribués, quelle condition cela implique t-il sur n ?
- Si $n = 26$, vérifier que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Les entiers attribués sont tous distincts.
(2) Tous les entiers de 1 à 26 sont attribués.

Exercice 2.29.

1. On considère l'application suivante :
$$g: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \to & \cos u \end{array}$$, où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
   (a) Si $E = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $F = [0; 1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ?
   (b) $E = [0; \frac{\pi}{2}]$ et $F = [-1; 1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ?
   (c) $E = [0; \pi]$ et $F = [-1; 1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On considère l'application suivante :
$$h: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \to & \sin u \end{array}$$, où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
   Déterminer deux intervalles E et F pour lesquels h est bijective. Sont-ils uniques ?

Exercice 2.30. L'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donnée par $f(k) = k^2+k+1$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.31. On considère les applications f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,x^2) \end{array}$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

★ **Exercice 2.32.** Soit $f : A \to B$ une application, et soient X_1 et X_2 des parties de A.

1. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$?
2. Montrer la propriété suivante : si f est injective, $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.
3. Soient Y_1 et Y_2 des parties de B. À quelle condition a-t-on $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$? $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$?

Exercice 2.33. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer que :

$$f \text{ et } g \text{ surjectives } \Longrightarrow g \circ f \text{ surjective },$$

$$f \text{ et } g \text{ injectives } \Longrightarrow g \circ f \text{ injective.}$$

Exercice 2.34. Dire si les applications f de E dans F suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas où l'application est bijective, déterminer son application réciproque.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $\quad f : (x,y) \mapsto x+y$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2$, $\quad f : (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.
3. $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\quad f : A \mapsto \complement_{\mathbb{N}} A$.

★ **Exercice 2.35.** Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$$

où $E[x]$ est la partie entière de x, c'est-à-dire $E[x] \in \mathbb{N}$ et $E[x] \leq x < E[x] + 1$.

1. Les applications f et g sont-elles bijectives ?
2. Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives ?

★ **Exercice 2.36.** Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
3. On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives, f est-elle bijective ?

★ **Exercice 2.37.** Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est une bijection si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\complement_E A) = \complement_F f(A).$$

Exercice 2.38.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = \sin(x)$. Déterminer $f^{-1}\big(\{0\}\big)$ et $f^{-1}\big(\{2\}\big)$. L'application f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}\big(\mathbb{R}^+\big)$. Dessiner le graphe G_f de f, (on rappelle que $G_f = \big\{(x, \sin(x));\ x \in \mathbb{R}\big\}$).

b) Soit $g : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ l'application définie par $g(x) = \sin(x)$. Vérifier que g est bijective. Déterminer $g^{-1}(0)$, $g^{-1}(1/2)$ et $g^{-1}(1)$. Sur un même graphique, représenter le graphe de g et le graphe de g^{-1}. *On notera* $g^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

Exercice 2.39. Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3 et a un entier tel que $0 \leq a \leq n - 1$. Soit $f : \{0, 1, \cdots, n-1\} \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$ l'application telle que $f(k)$ est le reste de la division euclidienne de $a + k$ par n.

a) Expliciter h quand $n = 7$ et $a = 4$.

b) Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.

Exercice 2.40. Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3. Soit $g : \{0, 1, \cdots, n-1\} \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$ l'application telle que $g(k)$ est le reste de la division euclidienne de k^2 par n. Montrer que l'application g n'est pas injective (indication : chercher un entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et $g(k) = g(k-1)$).

Exercice 2.41. Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $a \in \{1, \cdots, n-1\}$ fixé. Soit $h : \{0, 1, \cdots, n-1\} \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$ l'application telle que $h(k)$ est le reste de la division euclidienne de ak par n.

a) Expliciter h quand $n = 7$ et $a = 4$ (on pourra faire par exemple un tableau de 2 lignes, la première ligne composée des entiers de 0 à 6, et la deuxième ligne composée des entiers h(0),...,h(6)). Expliciter aussi h quand $n = 6$ et $a = 4$.

b) On suppose n premier. Montrer que l'application h est injective. En déduire que f est bijective.

c) On suppose que $a \geq 2$ et que a divise n. Montrer que h n'est pas injective.

Exercice 2.42. Soit f l'application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ définie par $f(x, y) = \{x, y\}$. Quelle est l'image de f ? f est-elle injective ?

2.2.5 Autres exercices

★ **Exercice 2.43.** Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
   Montrer que si f est injective, on : $\forall A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A = f^{-1}(f(A))$.
   Donner un exemple d'application f telle que : $\exists A \in \mathcal{P}(E)\,,\ A \neq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que : $\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.
   Montrer que si f est surjective, on a : $\forall B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f(f^{-1}(B)) = B$.
   Donner un exemple d'application f telle que : $\exists B \in \mathcal{P}(F)\,,\ f(f^{-1}(B)) \neq B$.

★ **Exercice 2.44.** On se donne des ensembles E, F, G et des applications $f : E \to F$ et $g : E \to G$; on cherche dans quelles conditions il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$.

1. On suppose $E = F = G = \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe $h :\ F \to G$ telle que $g = h \circ f$ (si oui, en donner un exemple, et si non, expliquer pourquoi) :
   (a) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2x + 3$
   (b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x + 1$
   (c) $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$
   (d) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$
2. Dans le cas général, démontrer que, si f est injective, on peut trouver h telle que $g = h \circ f$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de h.

Exercice 2.45. *(Bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.)*

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple $(q,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^q(2k+1)$.
2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f \ : \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (q,k) & \longmapsto & 2^q(2k+1) - 1 \end{array} .$$

est une bijection.

★ **Exercice 2.46.** *Fonctions caractéristiques des parties d'un ensemble.* Etant donnée une partie X d'un ensemble E, on définit $f_X : E \to \{0,1\}$ par :

$$\forall e \in E,\ f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f_X lorsque X est la partie de $\mathbb{R}$: $X = [1;2[\cup \{3\}$.

2. Si A et B sont des parties de E, montrer que

$$A = B \Leftrightarrow f_A = f_B.$$

3. Exprimer $f_{A\cap B}$, $f_{A\cup B}$ et $f_{\complement A}$ en fonction de f_A et f_B.
4. La différence symétrique de deux parties A et B est l'ensemble

$$A \,\Delta\, B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

   (a) Exprimer $f_{A \,\Delta\, B}$ en fonction de f_A et f_B.
   (b) En déduire que, pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E, on a :

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$

2.3 Relations binaires

Exercice 2.47. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément z de $\mathbb{C}$.

Exercice 2.48. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tous réels x, y, x' et y' :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff y - 2x = y' - 2x'$$

Montrer que$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$

Exercice 2.49. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^2$ en posant, pour tous entiers naturels a, b, c et d :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + d = b + c$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence respectives de $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$ et $(7, 5)$.
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 2.50. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x(y^2 + 1) = y(x^2 + 1)$$

est une relation d'équivalence. Décrire la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.51. On définit dans $\mathbb{N}^*$ une relation $\preceq$ en posant

$$x \preceq y \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y = x^n.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 2.52. *(Ordre lexicographique).* Sur $\mathbb{N}^2$, on définit la relation $\ll$ par :

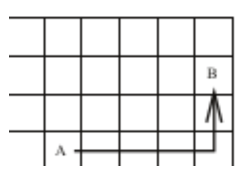
$$(x,y) \ll (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \quad \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y'. \end{cases}$$

1. Vérifier que $\ll$ est un ordre. Est-il total ?
2. Préciser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, l'ensemble des majorants de (x,y) dans $\mathbb{N}^2$ pour $\ll$.
3. Comparer les neuf éléments $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ et $(3,3)$.

★ **Exercice 2.53.** Le *diagramme de Hasse* d'une relation d'ordre sur un ensemble E est un graphe (au sens de l'informatique) dont les sommets sont les éléments de E ; deux sommets x et y sont reliés par une arête si $x < y$ et s'il n'existe pas d'élément intermédiaire z tel que $x < z < y$; dans ce cas on dit que y est un successeur *immédiat* de x et que x est un prédécesseur *immédiat* de y.

1. On ordonne $\mathbb{N}$ par la relation *divise.*
   Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers compris entre 1 et 16. Quels sont les éléments minimaux de l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 1 ? Que peut-on dire d'un entier qui a un et un seul prédécesseur immédiat ?
2. Sur $\mathbb{N}$ on considère la relation R définie par $x \; R \; y$ si et seulement si soit $x = y$, soit x est impair et $x < y$.
   Montrer que la relation R est un ordre. Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8. Y a-t-il pour cet ordre des éléments minimaux ? maximaux ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

★ **Exercice 2.54.** Sur l'ensemble des cases d'un rectangle quadrillé, on définit la relation R par $A \; R \; B$ si l'on peut aller de la case A à la case B en se déplaçant d'abord de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls), comme dans l'exemple ci-dessous :



1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?
2. Mêmes questions, mais en définissant l'ordre sur une partie des cases du damier (ne constituant pas nécessairement un rectangle) : les déplacements ne sont autorisés que si l'on reste dans ces cases.

★ **Exercice 2.55.** Soit E un ensemble.

1. Montrer, pour toutes parties A, B, C, D de E on a l'implication

$$\left\{\begin{array}{l} B \setminus C \subset A \\ \quad \text{et} \\ C \setminus D \subset A \end{array}\right. \Longrightarrow B \setminus D \subset A.$$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_A$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$B\, \mathcal{R}_A\, C \Longleftrightarrow (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset A$$

est une relation d'équivalence. Pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, préciser la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Exercice 2.56. On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation notée $\preccurlyeq$ définie par :

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Soient $A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}$ et $B = \{(1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Étudier l'existence de minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, plus petit élément, plus grand élément pour A et B.

Exercice 2.57. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ définie par

$$x\, \mathcal{R}\, y \textit{ si et seulement si } x + y \textit{ est divisible par 3}$$

1. Donner une représentation graphique de $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ?
3. $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ? antisymétrique ?
4. Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

★ **Exercice 2.58.** Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$: $A\, \mathcal{R}\, B$ si et seulement si pour tout élément x de A, il existe un élément y de B tel que $x \leq y$. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.59.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
   (a) $10^k \equiv 1 \mod 3$,
   (b) $10^k \equiv 1 \mod 9$,
   (c) $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$.
2. Soit n un entier naturel, $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ son écriture en base 10. Autrement dit, les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9 (les *chiffres* du développement en base 10 de n) et on a
$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_0.10^0.$$
   Montrer que
   (a) $n \equiv a_0 \mod 2$,
   (b) $n \equiv a_0 \mod 5$,
   (c) $n \equiv a_0 + 10a_1 \mod 4$,
   (d) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 3$,
   (e) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 9$,
   (f) $n \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k \mod 11$.

   En déduire des critères (bien connus...) de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11.

Chapitre 3

Dénombrement

3.1 Ensembles finis

Exercice 3.1. Soient E, F, G trois ensembles finis. Exprimer le cardinal de $E \cup F \cup G$ en fonction des cardinaux de $E, F, G, E \cap F, F \cap G, G \cap E$ et $E \cap F \cap G$.

★ **Exercice 3.2.** Deux pays sont dits voisins s'ils ont une frontière commune. On suppose qu'il y a un nombre fini de pays et que chaque pays a au moins un voisin. En considérant l'application qui à chaque pays associe son nombre de voisins, montrer qu'il existe au moins deux pays qui ont le même nombre de voisins.

Exercice 3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Expliciter $\mathcal{P}(E_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \text{Card}\, \mathcal{P}(E_n) = 2^n$.

★ **Exercice 3.4.** Dans cet exercice, on note $|E|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini E.

Soit A, B deux ensembles finis non vides.

1. Montrer, par récurrence sur le nombre d'éléments de A, que le nombre d'applications de A dans B vaut $|B|^{|A|}$.
2. En déduire $|\mathcal{P}(A)|$ (on retrouve ainsi un résultat qu'il est indispensable de connaître).

3.2 Problèmes de dénombrement

Exercice 3.5. Combien le mot POIRE a-t-il d'anagrammes ? Même question avec le mot ANANAS et le mot ANAGRAMME.

Exercice 3.6. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points à coordonnées entières forment un quadrillage. Pour aller d'un point à un autre on se déplace en suivant les points du quadrillage par une succession de mouvements horizontaux de gauche à droite ou verticaux de bas en haut.

1. Déterminer le nombre de chemins pour aller du point O au point A de coordonnées $(3, 2)$.
2. Soient p, p', q, q' des entiers tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, M le point de cordonnées (p, q) et N le point de coordonnés (p', q').
   (a) Déterminer le nombre de chemins pour aller de M à N.
   (b) Déterminer le nombre de chemins pour aller de O à N en passant par M.

Exercice 3.7. On considère un jeu de trente-deux cartes. La moitié de ces cartes sont rouges. Les seize autres sont noires. Une *main* est constituée de huit cartes parmi les trente-deux.

1. Quel est le nombre total de *mains* ?
2. Parmi ces mains, combien contiennent exactement
   (a) une carte rouge et sept cartes noires ?
   (b) deux cartes rouges et six cartes noires ?
   (c) trois cartes rouges et cinq cartes noires ?
   (d) quatre cartes rouges et quatre cartes noires ?

Exercice 3.8. Dans un jeu de 32 cartes, une main est constituée de cinq cartes parmi les trente deux. Il y a dans le jeu quatre couleurs : trèfle, pique, carreau et coeur.

a) Combien y a t-il de mains possibles ?

b) Combien y a t-il de mains constituées de cinq trèfles ?

c) Combien y a t-il de mains constituées de cinq cartes de la même couleur ?

d) Combien y a t-il de mains constituées de cinq cartes n'ayant pas toutes la même couleur ?

e) Combien y a t-il de mains constituées de trois trèfles et deux piques ?

f) Combien y a t-il de mains constituées de trois cartes d'une couleur et de deux cartes d'une autre couleur ?

g) Combien y a t-il de façons de classer une main donnée.

Exercice 3.9. Une population est constituée de N_1 femmes et N_2 hommes. On fixe n avec $1 \leq n \leq \min\{N_1, N_2\}$. Une sous population de cette population constituée de n individus sera appelée un échantillon de taille n.

a) Quel est le cardinal N de cette population ?

b) Combien y a t-il d'échantillons de taille n possibles ?

c) Montrer qu'il y a autant d'échantillons de taille $N - n$ que d'échantillons de taille n. En dédure une relation entre $\binom{N}{n}$ et $\binom{N}{N-n}$.

c) Combien y a t-il d'échantillons de taille n constitués que de femmes ? *(combinaison).* Combien y a t-il d'échantillons de taille n constitués de personnes de même sexe ?

d) Combien y a t-il d'échantillons de taille n comportant au moins un homme ?

e) On fixe $0 \leq k \leq n$. Combien y a t-il d'échantillons de taille n constitués de k femmes et $n - k$ hommes ?

f) Combien y a t-il de façons d'ordonner les personnes d'un échantillon de taille n donné dans une liste ?

Exercice 3.10. Les initiales d'une personne sont le couple formé par les premières lettres de son prénom et de son nom. Montrer que dans un village de 677 personnes ou plus, deux personnes au moins ont les mêmes initiales.

Exercice 3.11. Combien d'équipes féminines de basket peut-on former avec 15 filles d'une même classe ? (*Une équipe de basket est constituée de 5 joueuses*)

Exercice 3.12. Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ un ensemble à 12 éléments.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   (a) a et b
   (b) a mais pas b
   (c) b mais pas a
   (d) ni a ni b
2. En déduire la relation $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$
3. Généraliser le résutat obtenu :

$$2 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

★ **Exercice 3.13.**

1. On doit ranger dans p tiroirs ($p \geq 1$), n boules blanches indiscernables ($n \geq 0$). Chaque tiroir peut recevoir entre 0 et n boules.

   Démontrer que le nombre de rangements possibles est égal à $\binom{n+p-1}{p-1}$.

2. Soit $n \geq 0$ un entier. Déterminer le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ qui vérifient

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$$

Exercice 3.14. *(extrait DST 2011-2012)* Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{aligned} f \ : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{aligned}.$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

★ **Exercice 3.15.** Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E.
   Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?
3. Combien y a-t-il de parties X et Y de E telles que $X \subset Y$?

★ **Exercice 3.16.** Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \operatorname{Card} A$.

1. Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
2. Combien y a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, où m est un entier entre p et n ?
3. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Exercice 3.17. Soit x un réel et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Développer $f(x)$.

2. En déduire, si k et n sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

   En déduire la valeur de la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k parcourant l'ensemble des entiers *pairs* comprise entre 1 et n, c'est-à-dire $\sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Exercice 3.18. Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

1. Soit $n \geq p \geq 1$. Montrer que

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

   En déduire la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

2. Retrouver ce résultat en dérivant $f(x) = (1+x)^n$.

Exercice 3.19. *(Formule de Vandermonde)* Montrer que pour tout triplet d'entiers naturels $\{k, m, n\}$ on a

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

(*on pourra dénombrer de 2 façons différentes le nombre de sous ensembles à k éléments dans la réunion $E \cup F$ d'un ensemble E à n éléments et d'un ensemble F à m éléments*).

En déduire en particulier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

3.4 Manipulation de sommes

Exercice 3.20. Ecrire en utilisant le signe $\sum$ les quantités suivantes :

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{100}$
3. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99}$

Exercice 3.21. Soient n un entier positif et $(x_1, \ldots, x_n)$ n réels.

1. Si a est un réel quelconque, montrer que $\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a \sum_{k=1}^{n} x_k + na^2$.
2. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ la moyenne arithmétique des x_k. Vérifier $\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - nm^2$.

Exercice 3.22. Ecrire les expressions suivantes sans le signe $\sum$:

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{j=0}^{n+2}(j+1)^2$
2. $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k(k-1)}$ (on pourra utiliser $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)
3. $\sum_{k=1}^{100} \ln(1 + \frac{1}{k})$
4. $\sum_{k=3}^{30} \frac{k^2-k-2}{k-2}$ (utiliser un changement d'indice $j = k - 2$; on rappelle de plus $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$)

Exercice 3.23. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}$ f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$?

Chapitre 4

Devoirs surveillés des années antérieures

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
2011-2012

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé 1

10 Octobre 2011, Durée 1h
Documents non autorisés

Exercice 1. p et q désignent des propositions logiques.

1. Exprimer sans connecteur $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$ la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (on pourra par exemple s'aider d'une table de vérité).
2. Donner la table de vérité de la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.
3. La proposition $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ est-elle une tautologie (on rappelle qu'une *tautologie* est une proposition qui ne prend que la valeur VRAI) ? Justifier la réponse.

Exercice 2. On note $d(x, y)$ la propriété «x est divisible par y» (x et y s'interprétant comme des entiers naturels). On rappelle qu'un entier naturel est *premier* s'il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même. Écrire sous forme d'une formule avec quantificateurs faisant intervenir la propriété $d(x, y)$, les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel est divisible par 1.
2. Tout entier naturel est divisible par lui-même.
3. 2011 est un nombre premier.

Exercice 3.

1. Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
2. Un truand déclare : "Tous les truands sont des menteurs" (c'est-à-dire des individus qui **mentent toujours**). La proposition entre guillemets est–elle alors vraie ou fausse (on pourra faire un raisonnement par l'absurde) ?

Exercice 4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. On pose $X = A \cup (B \setminus C)$ et $Y = (A \cup B) \setminus C$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. A-t-on nécessairement $X \subset Y$? Justifier la réponse.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique M1MI1002
2011–2012

Devoir surveillé 2

Novembre 2011, Durée 1h, Documents non autorisés

Toutes vos réponses devront être justifiées

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$g(x, y) = x^2 + xy - x \ .$$

1. Montrer que f est injective mais pas surjective. Est-elle bijective ?
2. Déterminer l'image par g de $(0, 1)$, de $(0, 2)$.
3. Montrer que g n'est pas injective.
4. Soit $y \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image de $(1, y)$ par g .
5. L'application g est-elle surjective ?
6. Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui, les expliciter.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E. On définit une relation binaire $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \ \mathcal{R}_X \ B \Leftrightarrow (A \cap X \subseteq B \cap X) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_X$ est une relation réflexive et transitive.
2. Soit $E = \mathbb{N}$ et $X = \{1\}$. Montrer que $\mathcal{R}_X$ n'est pas antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ((x < 0 \land y < 0) \lor (x = 0 \land y = 0) \lor (x > 0 \land y > 0)) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0 .
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Devoir surveillé terminal

16 janvier 2012, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. Formuler en langage courant la proposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}, a < c < b)$$

Exprimer sa négation à l'aide de quantificateurs, puis en langage courant.

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 4.

1. On souhaite déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système

$$(S) : \quad \begin{cases} \mathrm{PGCD}(a,b) = & 15 \\ a + b = & 180 \end{cases}$$

   (a) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels premiers entre eux tels que $x + y = 12$ (on rappelle que deux entiers x et y sont *premiers entre eux* si $\mathrm{PGCD}(x, y) = 1$).

   (b) Montrer que (a, b) est solution du système (S) si et seulement si il existe des entiers naturels a' et b' premiers entre eux tels que $a = 15a'$, $b = 15b'$ et $a' + b' = 12$.

   (c) Déduire de ce qui précède la liste de tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD vaut 15 et la somme 180.

2. Soit
$$f \ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$
$$(x, y) \longmapsto (\mathrm{PGCD}(x, y), x + y)$$

L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.

Exercice 5. Soit E un ensemble fini non vide, et a_0 un élément fixé de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{aligned} f \ : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases} \end{aligned} .$$

1. Montrez que si $\operatorname{Card} A$ est pair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est impair, et que si $\operatorname{Card} A$ est impair alors $\operatorname{Card} f(A)$ est pair.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Premier devoir surveillé

Octobre 2012, Durée 1h00
Documents non autorisés.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Les symboles p et q désignent des propositions logiques.

1. Écrire la table de vérité de la proposition $p \Rightarrow q$.
2. Écrire la proposition $\neg(p \Rightarrow q)$ sans utiliser le connecteur $\Rightarrow$ (donc en n'utilisant que les connecteurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$).
3. Simplifier la proposition $\neg((p \vee \neg q) \Rightarrow q)$.
4. Écrire la proposition $\neg(p \Leftrightarrow q)$ sans utiliser les connecteurs $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$.

Exercice 2. On considère les trois sous-ensembles suivants de $E = \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$:

A l'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs,

B l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 6,

C l'ensemble des éléments de E qui sont des multiples de 9.

1. Déterminer l'ensemble $A \cap (B \cup C)$.
2. Quels sont les éléments de l'ensemble $B \backslash C$? Ceux de $A \backslash (B \backslash C)$?
3. L'ensemble $A \backslash (B \backslash C)$ est-il égal à $(A \cap C) \cup (A \backslash B)$?
4. L'égalité $A \backslash (B \backslash C) = (A \cap C) \cup (A \backslash B)$ est-elle vraie pour n'importe quels ensembles A, B et C ? Justifier votre réponse par une démonstration.

Exercice 3. Jetons un oeil à la figure 4.1, qui représente un très beau graphe. Les lettres sont appelées "sommets" du graphe et les traits "arêtes" du graphe. On notera S l'ensemble des sommets.

On définit la proposition $p(x, y, l)$ par « il existe un chemin du sommet x au sommet y de longueur l »(la longueur étant le nombre d'arêtes empruntées pour aller de x à y). Par exemple, la proposition $p(A, O, 3)$ est vraie, parce qu'on peut aller de A à O en passant par E et J, donc en suivant trois arêtes successives. La proposition $p(A, O, 4)$ est également vraie, puisque l'on peut aussi aller de A à O en passant par D, E et J

tourner svp $\rightarrow$

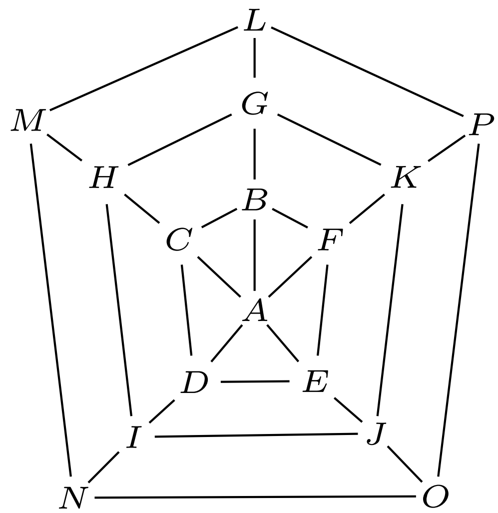


FIGURE 4.1 – Un graphe à 16 sommets

Exprimer les phrases suivantes sous forme d'une proposition logique à l'aide de quantificateurs, de connecteurs et de la proposition p :

1. Entre deux sommets quelconque du graphe, il existe toujours un chemin de longueur 4.
2. On peut aller de A à n'importe quel autre sommet du graphe par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.
3. On ne peut pas toujours aller d'un sommet quelconque du graphe à un autre par un chemin de longueur inférieure ou égale à 3.

Parmi ces trois propositions, lesquelles sont vraies (on ne demande pas de justification) ?

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Deuxième devoir surveillé

19 Novembre 2012, Durée 1h00
Documents non autorisés.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on appelle factorielle de n le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Soit

$$S_n = 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + \cdots + n \cdot (n!), \qquad n \geqslant 1.$$

1. Ecrire S_n en utilisant le signe $\sum$.

2. Calculer $n!$ puis S_n pour $n \leqslant 5$ et remplir le tableau suivant

n	$n!$	S_n
1		
2		
3		
4		
5		

3. Conjecturer une relation simple entre S_n et $(n+1)!$. La démontrer par récurrence.

Exercice 2.

Soit $f \ : \ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x^2, \frac{1}{x^2})$.

1. Calculer $f(-1)$. La fonction f est-elle injective ?

2. Soit $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $yz = 1$. Quels sont les antécédents de (y, z) par f ?
   En déduire que l'image de $\mathbb{R}^*$ par f est $\{(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid yz = 1\}$.
   La fonction f est-elle surjective ?

Exercice 3.

Soient A et B deux ensembles. On note $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ les ensembles des parties de A et B respectivement. Soient

$$E = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y)\}$$

et

$$E_k = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid Card(X) = Card(Y) = k\}.$$

1. Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{c, d, e\}$.
   a. Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$, E_0, E_1, E_2, et E_3.
   b. Quel est le cardinal de E pour ce choix de A et B ?
2. On suppose maintenant que A et B sont finis, de cardinaux respectifs m et n tels que $m \leq n$.
   a. Question de cours : quel est le nombre de parties de A à k éléments ($0 \leqslant k \leqslant m$) ?
   b. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant m$. Donner une expression du cardinal de E_k en termes de coefficients binomiaux.
   c. En déduire une expression du cardinal de E.

FIN

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
2012-2013

Fondamentaux pour
les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé terminal

17 janvier 2013, Durée 1h30
Documents non autorisés.

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants.

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n > 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ .$$

Exercice 2. On considère la relation binaire $\approx$ sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$x \approx y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. A-t-on $\frac{2}{3} \approx \frac{4}{3}$?
2. A-t-on $\frac{2}{3} \approx -\frac{4}{3}$?
3. Montrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence.
4. Quelle est la classe d'équivalence de 0 pour la relation $\approx$?

Exercice 3.

1. Écrire le développement (formule du binôme) de $(x+y)^3$ et $(x+y)^5$.
2. Soient x et y deux entiers relatifs. En utilisant la question précédente, montrer que

$$(x+y)^5 \equiv x^5 + y^5 \mod 5.$$

Exercice 4. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs
et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$ est-elle injective ? Surjective ? Justifiez vos réponses.
2. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ définie par $\varphi(m,n) = \dfrac{m}{n+1}$.
   (a) Décrire l'image réciproque de $\{1\}$ par φ. S'agit-il d'un ensemble fini ?
   (b) L'application φ est-elle injective ? Surjective ?

Suite au dos de la page →

Exercice 5. Répondre par VRAI ou FAUX (sans commentaire) à chacune des questions suivantes (notation : +1 par réponse correcte et -1 par réponse incorrecte ; la note de l'exercice sera la somme des points obtenus si elle est positive, et 0 sinon) :

1. La proposition $(\neg(P \Rightarrow P)) \Rightarrow P$ est une tautologie.
2. La proposition
$$\exists x \in \mathbb{N} \;\; \forall y \in \mathbb{N} \;\; (x > y) \Rightarrow (x + y < 5)$$
est vraie.
3. Pour tous ensembles A et B, on a $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
4. Sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, la relation
$$A \ll B \text{ si } \operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$$
est une relation d'ordre.

Université Bordeaux 1
Licence Sciences et Technologies
2013-2014

Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique
M1MI1002

Devoir surveillé n° 1

18 novembre 2013, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 6. Soient B, S et P les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} B &= \texttt{la marée est basse}, \\ S &= \texttt{il y a du soleil}, \\ P &= \texttt{j'irai à la plage}. \end{aligned}$$

1. Écrire une formule logique utilisant B, S et P pour exprimer la phrase :
   Si la marée est basse et qu'il y a du soleil, alors j'irai à la plage.
2. Écrire la négation de cette formule sans utiliser le symbole $\Longrightarrow$.
3. Écrire en français la négation de la phrase de la question 1.

Exercice 7. Etant donné A, B et C trois parties d'un ensemble E, démontrer l' équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Exprimer, à l'aide de quantificateurs, la proposition : "f n'est pas injective".
2. Que signifient les propositions suivantes pour l'application f ?
   (a) $\exists y \in F$ tel que $\forall x \in E,\ y = f(x)$.
   (b) $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.
3. Écrire et interpréter la négation de la proposition (b).

Exercice 9. Soient f et g les applications définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & (1, x^2) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (y, z) & \longmapsto & y + z - 1 \end{array}$$

1. Déterminer $f(0)$ puis $f(1)$.
2. On considère l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Z}, \mid x \mid \leq 3\}$
   (a) Écrire E en extension ($i.e.$donner la liste de ses éléments).
   (b) Déterminer l'ensemble $f(E)$.

3. Soit $F = \{(0,1)\,;(1,3)\,;(1,4)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Déterminer l'image réciproque de F par f.
4. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
5. Justifier que la composée $g \circ f$ a un sens et en donner une expression.

Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2,\ u_1 = 5$, et pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 2^n + 3^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > u_n$.
4. Soit $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $\Phi(n) = u_n$.
   (a) L'application Φ est-elle injective ?
   (b) Déterminer, s'ils existent, les antécédents par Φ de 2 et ceux de 4.
   (c) L'application Φ est-elle surjective ?

DEVUIP Service scolarité	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2013/2014** **DST D'AUTOMNE** **PARCOURS : MISMI** **Code UE : M1MI1002** **Épreuve : Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique** **Date : 16/01/2014** **Heure : 8h30** **Durée : 1h30** Documents : Non autorisés. Responsable de l'épreuve : R. Coulangeon	

La calculette homologuée par l'université est le seul matériel électronique autorisé.

Exercice 11.

1. Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A et B deux parties de E. Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs la proposition

   "f est surjective".

Exercice 12. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par

$$f(n) = n(n+1).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair. L'application f est-elle surjective ?
2. L'application f est-elle injective ?

Exercice 14. Pour entrer dans un immeuble on doit composer un code qui est constitué d'une lettre suivie de trois chiffres, identiques ou non. La lettre peut être A, B ou C, les chiffres sont des entiers compris entre 1 et 9 inclus.

1. Combien existe-t-il de codes secrets qui commencent par la lettre A ?
2. Combien existe-t-il au total de codes secrets différents ?
3. Combien existe-t-il de codes secrets dont tous les chiffres sont distincts ?

4. Un habitant de l'immeuble, se souvient que le code commence par B et qu'il est suivi des chiffres $3, 5, 7$ dans un ordre qu'il a oublié. Combien d'essais devra-t-il faire au maximum pour ouvrir la porte ?

Exercice 15.

1. Déterminer PGCD$(12345, 11)$ par l'algorithme d'Euclide (on écrira toutes les étapes de l'algorithme).
2. Soit d le PGCD calculé à la question précédente. Trouver un couple d'entiers (u, v) tel que $d = 12345u + 11v$.