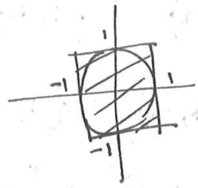
Ex. 2.10.

le cercle $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ n'est pas un produit $A\times B$: puisque pour $-1\le x\le 1$ on trouve y t.q. $x^2+y^2=1$, l'intervalle $[-1,1]$ devrait être contenu dans A. De même, $[-1,1]\subseteq B$. Mais $C\not\supseteq[-1,1]^2$!



Ex. 2.11. $f_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto x^2$

$0\longmapsto 0$, $1\longmapsto 1$, $-2\longmapsto 4$, $\sqrt{2}\longmapsto 2$.

$x^2=0\iff x=0$; $x^2=1\iff x=\pm1$; $x^2=-2$ n'a pas de sol. en $\mathbb{R}$;

$x^2=\sqrt{2}\iff x=\pm\sqrt{(\sqrt{2})}=\pm\,2^{\frac{1}{4}}$.

Ex. 2.12. $f_3:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto x^2+y$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\longmapsto 0$; $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\longmapsto 1$; $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longmapsto 1$; $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\longmapsto 1$

$x^2+y=0\iff y=-x^2\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t^2\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

$x^2+y=1\iff y=1-x^2\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\1-t^2\end{pmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$.

Ex. 2.13. $f_4:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$x\longmapsto(x^2,x+5)$

$0\longmapsto(0,5)$; $1\longmapsto(1,6)$; $-1\longmapsto(1,4)$

$\begin{cases}x^2=0\\x+5=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\x=-5\end{cases}$ pas d'antéc.

$\begin{cases}x^2=-1\\x+5=0\end{cases}\longrightarrow$ pas d'antéc.

$\begin{cases}x^2=1\\x+5=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm1\\x=1\end{cases}\Rightarrow$ antéc. $x=1$.

Ex. 2.14. $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$

$x\longmapsto \mathrm{rac}(x)$

range $(n)=[0,1,2,\dots,n-1]$

c'est $[\sqrt{x}]$ (partie entière de la racine carrée, c-à-d. le plus grand entier p t.q. $p^2\le x$).

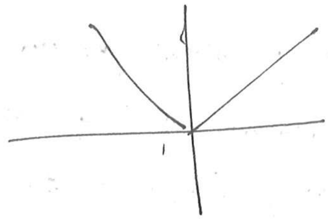
en se désintéressant du programme,

$0\longmapsto 0$, $1\longmapsto 1$, $2\longmapsto 1$, $10\longmapsto 3$

$0=[\sqrt{0}]$; $1=[\sqrt{1}]$; $2=[\sqrt{5}]$, $10=[\sqrt{101}]$ donc chacun des quatre a un antécédent. On a :

$f^{-1}(0)=\{0\}$ $f^{-1}(1)=\{1,2,3\}$, $f^{-1}(2)=\{4,5,6,7,8\}$, $f^{-1}(10)=\{100,101,\dots,120\}$

2.15. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x|$



$f(\{-1,2\}) = \{1,2\}$

$f([-3,-1]) = [1,3]$

$f([-3,1]) = [0,3]$

$f^{-1}(\{4\}) = \{-4,4\}$; $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$; $f^{-1}([-1,4]) = [-4,4]$.

2.16. (i) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$

ii) $y \in f(X_1) \Rightarrow y = f(x), \exists\, x \in X_1 \Rightarrow x \in X_2 \Rightarrow f(x) \in f(X_2) \Rightarrow$ ok.

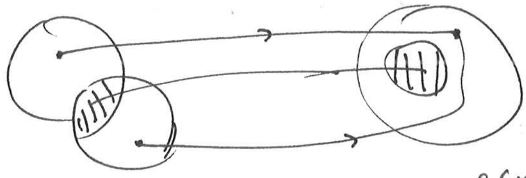
$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$: si $y \in f(X_1 \cup X_2) \Rightarrow \exists\, y = f(x), x \in X_1 \cup X_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X_1$ ~~et~~ ou $x \in X_2 \Rightarrow f(x) \in f(X_1)$ ou $f(x) \in f(X_2) \Rightarrow f(x) \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

la réciproque est vrai par i) : $X_1 \subseteq X_1 \cup X_2 \Rightarrow f(X_1) \in f(X_1 \cup X_2)$.

iii) $y \in f(X_1 \cup X_2) \Rightarrow y = f(x), x \in X_1 \cup X_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in X_1 \Rightarrow f(x) \in f(X_1) \\ x \in X_2 \Rightarrow f(x) \in f(X_2). \end{cases}$

$\supseteq$ faux en gén :



$X_1 = \{1, 2, 3\}$ ~~f(x) ∈ a~~

$X_2 = \{1, 4, 5\}$ ~~dans CX1~~

$f:$
$1 \longmapsto 1$
$2 \longmapsto 2$
$3 \longmapsto 3$
$4 \longmapsto 2$
$5 \longmapsto 5$

$f(X_1) = \{1,2,3\}$

$f(X_2) = \{1,2,5\}$

$f(X_1 \cap X_2) = f(\{1\}) = \{1\}$

$f(X_1) \cap f(X_2) = \{1,2\}$.

Ex. 2.17. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$

$f^{-1}(\{0\})$: $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$f^{-1}(]-\infty, 0]) = f^{-1}(\{0\}) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.
$x^2+y^2 \geq 0$

$f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$
$= \{(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$

$f^{-1}(]-1,1]) = f^{-1}([0,1]) = \{\rho(\cos t, \sin t) \mid \rho \in [0,1], t \in [0,2\pi]\}$

$f(X_1) = \{x^2+y^2 \mid x>0\} = \mathbb{R}_{>0}$

$f([0,1] \times [-2,3]) = \left\{x^2+y^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1, \\ -2 \leq y \leq 3 \end{matrix}\right\} = [0,10]$.

Feuille 3.

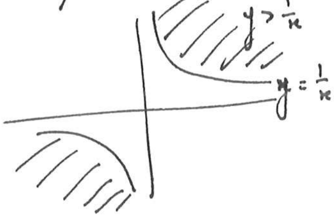
Ex. 2.19. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto xy$

$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \mid xy = 0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

$f^{-1}(\{-1\}) = \{(x,y) \mid xy = -1\} = \{(x,y) \mid x,y \neq 0,\ x = -\frac{1}{y},\ y \in \mathbb{R}^*\} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}^*\right\}$.

$f^{-1}([1,+\infty[) = \{(x,y) \mid xy \geq 1\} = \{(x,y) \mid x,y \neq 0,\ y \geq \frac{1}{x},\ \cancel{y>0}\ x>0\} \cup \{(x,y) \mid x,y \neq 0\ \ y \leq \frac{1}{x},\ x<0\}$



Ex. 2.20. $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \mid \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0\}$ $\sin(\theta) = 0 \iff \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{y}{x}$ non défini si ~~x~~ $x=0$. Donc $x \neq 0$. $(x \in \mathbb{R}^*)$.

Donc $\frac{y}{x} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $y = k\pi x$ $x \neq 0$.

donc $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ k\pi t \end{pmatrix}\ t \in \mathbb{R}^*\right\}$..

2.21. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(f(x)) = g(e^x) = \frac{1}{e^x}$ définie sur tout $\mathbb{R}$.

$f \circ g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

2.22. $f :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, $x \longmapsto \sqrt{x}$. $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln x$

$f \circ g(x) = f(\ln x) = \sqrt{\ln x}$ définie pour $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$ $]1,+\infty[$

(à la rigueur $f \circ g$ non définie sur tout $]0,+\infty[$.).

$g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ définie pour $x > 0$.