université de BORDEAUX

Département de mathématiques

Mémoire de Master 2

Théorèmes des nombres premiers

Guilhem Mureau

Sous la direction de Karim Belabas

Avril 2022

Table des matières

Introduction

En 1837, G.L Dirichlet démontre le théorème de la progression arithmétique, qui énonce que les progressions arithmétiques $P_{a,b} := a\mathbb{N}+b$ (où a et b sont deux entiers premiers entre eux) contiennent une infinité de nombres premiers. La démonstration repose sur des objets introduits par Dirichlet lui-même, à savoir les caractères modulaires et des séries de fonctions, appelées fonctions L (de Dirichlet). Vues comme fonctions de la variable complexe, les fonctions L ont des propriétés analytiques remarquables (prolongements méromorphes, équations fonctionnelles, développement en produits de Hadamard, etc) et ouvrent de nouveaux horizons ; c'est la naissance de la théorie analytique des nombres.

Dans ce mémoire, nous mettons en évidence et nous exploitons ce pont entre l'analyse complexe et l'arithmétique pour démontrer le théorème des nombres premiers, qui énonce que la fonction π de compte des nombres premiers est équivalente à $\frac{x}{\log x}$ quand x tend vers l'infini. Ce résultat fut prouvé indépendamment par J. Hadamard et C. J de La Vallée-Poussin en 1896. La démonstration repose sur l'étude d'une fonction L célèbre, la fonction ζ de Riemann. En réalité, une meilleure approximation de π est la fonction d'écart logarithmique intégrale définie par $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Nous prouvons dans ce mémoire le théorème des nombres premiers sous la forme suivante, dûe à de La Vallée-Poussin, et valable pour une certaine constante absolue $c > 0$:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{1}$$

Plus généralement, il sera question du comportement asymptotique des fonctions $\pi(x\,;a,b)$ de compte des nombres premiers dans la progression arithmétique $P_{a,b}$. Tout comme π est liée à ζ, nous verrons que les fonctions $\pi(x\,;a,b)$ sont en lien avec les fonctions L de Dirichlet. Il apparaitra que le théorème de la progression arithmétique résulte essentiellement de la non annulation des fonctions L en 1, c'est une question difficile, mais nous donnerons une preuve basée sur des outils élémentaires. Ces fonctions ne sont pas *a priori* définies sur tout le plan complexe, il nous faudra les prolonger méromorphiquement à $\mathbb{C}$. En fait, nous serons amenés à considérer les dérivées logarithmiques L'/L des fonctions L ; la localisation de leurs zéros est donc une information cruciale. C'est la formule de Perron, donnée dans la dernière partie, qui fait le lien entre les fonctions sommatoires et les fonctions L. Nous obtiendrons ainsi le comportement asymptotique désiré, à condition de connaitre une région sans zéro un peu à gauche de 1. À ce sujet, nous verrons que le meilleur terme d'erreur que l'on puisse espérer est $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, et que cette optimalité est équivalente à la fameuse Hypothèse de Riemann.

La généralisation de l'identité (1) est le théorème des nombres premiers en progression arithmétique, démontré par de La Vallée-Poussin en 1900 (à noter que la formule ne dépend pas de b, c'est-à-dire qu'il y a une équirépartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques). Ici, la constante $c > 0$ dépend de a.

$$\pi(x;a,b) = \frac{1}{\varphi(a)}\,\mathrm{Li}(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{2}$$

Dans la première partie de ce document nous donnons des résultats d'analyse complexe qui serviront principalement à justifier le développement en produit infini d'une fonction L de Dirichlet. Les deuxième et troisième parties sont plus algébriques, on y développera la notion de série de Dirichlet et de caractères modulaires ; ces derniers nous permettront la « détection » des progressions arithmétiques. La quatrième partie consiste en l'étude des fonctions L de Dirichlet et nous démontrerons les théorèmes des nombres premiers dans la cinquième et dernière partie.

Remerciements

Mes remerciements s'adressent à mon encadrant de mémoire Karim Belabas, professeur de mathématiques à l'Université de Bordeaux, pour la suggestion de ce sujet, ses conseils bibliographiques, ses relectures, ainsi que nos échanges sur le TNP (et bien au-delà). Je remercie également Alexandre Bailleul, AGPR à l'ENS de Paris-Saclay, pour m'avoir encadré trois années auparavant sur le théorème de la progression arithmétique (et sans qui mon sujet de mémoire pour la prépa agrég aurait sans doute été moins ambitieux).

Notations

◇ Sauf mention contraire, un nombre complexe sera noté $s = \sigma + it$.

◇ Le disque ouvert centré en $s \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ est noté $D(s, r)$, d'adhérence $\overline{D(s, r)}$.

◇ Pour tout réel a, on note Ω_a le demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$ définit par $\Omega_a = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \sigma > a\}$.

◇ La fonction log définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ désigne la détermination principale du logarithme, c'est une fonction holomorphe sur son ensemble de définition.

◇ Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est définie par $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$.

◇ $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

◇ Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier sont définis par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$.

◇ Si a et n sont deux entiers, leur pgcd est noté (n, a).

◇ Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, on note $P_{a,b}$ la progression arithmétique $a\mathbb{N} + b$.

◇ Pour les comparaisons asymptotiques on suit les notations de [1]. Soient f à valeurs complexes et g à valeurs réelles, on dit que $f = O(g)$ (notation de Landau) quand $s \to s_0$, s'il existe un voisinage V de x_0 et une constante $C \geq 0$ (qui dépend de s_0 et de V) telle que $|f(x)| \leq Cg(x)$ pour tout $x \in V$.

Si f et g sont définies sur un ensemble quelconque X, on dit que $f \ll g$ (notation de Vinogradov) si pour tout $x \in Y \subset X$ on a l'existence d'une constante C telle que $|f(x)| \leq Cg(x)$ pour tout $x \in Y$. Une telle constante est dite implicite. Souvent, elle dépendra d'autres paramètres, on pourra par exemple noter $\ll_\varepsilon$.

Mettons un peu de couleurs ! Les énoncés relatifs à la fonction ζ de Riemann et au théorème des nombres premiers seront écrits en *bleu*. Ceux en lien avec les fonctions L de Dirichlet et le théorème des nombres premiers en progression arithmétique sont en *vert*. Les autres seront en *gris*.

1 Lemmes d'analyse complexe

1.1 Produits infinis

1.1.1 Convergence uniforme

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls, le *produit infini* des u_n, noté $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$, est la limite de la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)_N$.

Définition. On dit que le produit infini $\prod_n u_n$ **converge** si la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)$ converge vers un nombre complexe non nul.

Théorème 1.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes différents de -1 tendant vers 0. Si la série $\sum_n \log(1+u_n)$ converge, alors le produit infini $\prod_n (1+u_n)$ converge.*

Démonstration. Notons $\Omega = \{u_n \,|\, n \in N\}$. Pour tout $n \in N$, $\log(1+u_n)$ est bien défini puisque l'application qui à $z \in \Omega$ associe $1+z$ est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω ; on peut donc définir $\log(1+u_n)$.
Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, on a $1+u_n \in D(1,1)$ pour $n > n_0$. Pour de tels n,

$$\prod_{k=n_0}^{n} (1+u_k) = \prod_{k=n_0}^{n} \exp\Big(\log(1+u_k)\Big) = \exp\Big(\sum_{k=n_0}^{n} \log(1+u_k)\Big).$$

Si la série $\sum_n \log(1+u_n)$ converge, alors par continuité de l'exponentielle complexe, le produit converge vers

$$\prod_{k<n_0} (1+u_k) \exp\Big(\sum_{k=n_0}^{\infty} \log(1+u_k)\Big).$$

$\square$

La réciproque n'est pas vraie puisque le logarithme complexe n'est pas en général un morphisme. Ce fait sera discuté plus loin.

Corollaire 1.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes différents de -1 tendant vers 0. Si la série $\sum_n u_n$ converge absolument, alors le produit infini $\prod_n (1+u_n)$ converge.*

Démonstration. Puisque $\log(1+u_n) = u_n + o(u_n)$ $(n \to \infty)$, les séries $\sum_n \log(1+u_n)$ et $\sum_n u_n$ sont donc de même nature. $\square$

Le théorème suivant nous garantit que sous certaines conditions, la limite d'un produit de fonctions continues est une fonction continue.

Lemme 1.1. *Si $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$, alors*

$$\prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|) \leq \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} |u_k|\Big) \quad \textit{et} \quad \Big|\prod_{k=1}^{n} (1+u_k) \ -1\Big| \leq \prod_{k=1}^{n} (1+|u_k|) \ -1.$$

Démonstration. Pour la première inégalité, cela résulte de $1+x \leq e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Pour la seconde inégalité, on raisonne par récurrence : on l'initialise trivialement pour $n=1$.
Soit $u_{n+1} \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k)\ -1\Big| &= \Big|\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\ -1\Big)\Big(1+u_{n+1}\Big)\ +u_{n+1}\Big| \\
&\leq \Big|\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\ -1\Big)\Big|(1+|u_{n+1}|)\ +|u_{n+1}| \\
&\leq \Big(\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)\ -1\Big)(1+|u_{n+1}|)\ +|u_{n+1}| \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(1+|u_k|)\ -1.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2 (Convergence uniforme d'un produit de fonctions)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$, toutes bornées. On suppose que la série de fonctions $\sum_n |f_n|$ converge uniformément sur Ω. Alors le produit infini $\prod_n(1+f_n)$ converge uniformément sur Ω vers une fonction f.*

Démonstration. Par le corollaire précédent, la convergence simple de $\sum_n |f_n|$ donne la convergence simple de $\prod_n(1+f_n)$. On note S la somme de la série ; reste à voir que la convergence du produit est uniforme :
Notons pour tout n entier naturel, $S_n = \sum_{k=0}^{n} |f_k|$. Chaque fonction S_n est bornée et une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.
Soit $M > 0$ un majorant de $(S_n)_n$ (i.e $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega,\ S_n(x) \leq M$). Par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \Big|\prod_{n=1}^{N}\Big(1+f_n(x)\Big)\Big| &\leq \prod_{n=1}^{N}\Big(1+|f_n(x)|\Big) \\
&\leq \exp\Big(\sum_{n=1}^{N}|f_n(x)|\Big) \\
&\leq e^M
\end{aligned}$$

Soit maintenant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, et par convergence uniforme de la série, soit N_0 tel que pour tout $x \in \Omega$, $\sum_{n \geq N_0} |f_n(x)| \leq \varepsilon$. On va montrer que le suite $\Big(\prod_{n=0}^{N}(1+f_n)\Big)_N$ est uniformément de Cauchy. Soient $p > q \geq N_0$ et $x \in \Omega$. Par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{n=0}^{p}\Big(1+f_n(x)\Big) - \prod_{n=0}^{q}\Big(1+f_n(x)\Big)\right| &= \Big|\prod_{n=0}^{q}\Big(1+f_n(x)\Big)\Big|\left|\prod_{n=q+1}^{p}(1+f_n(x))\ -1\right| \\
&\leq e^M\left(\exp\Big(\sum_{n=q+1}^{p}|f_n(x)|\Big)\ -1\right) \\
&\leq e^M(e^{\varepsilon}-1).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon \in]0\,;\frac{1}{2}[$, une simple étude de fonction donne $e^{\varepsilon} \leq 1+2\varepsilon$. Finalement,

$$\left|\prod_{n=0}^{p}\Big(1+f_n(x)\Big) - \prod_{n=0}^{q}\Big(1+f_n(x)\Big)\right| \leq 2\varepsilon e^M.$$

Ce qui prouve bien la convergence uniforme du produit. □

1.1.2 Logarithme et produits infinis

Lemme 1.2. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$, toutes bornées sur Ω et telles que $1+f_n$ ne s'annule pas sur Ω. On note pour tout $n \geq 1$, P_n le produit partiel $P_n(s) = \prod_{1\leq k\leq n}(1+f_k(s))$ défini sur Ω. La dérivée logarithmique de P_n est donnée par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\ \forall\, s \in \Omega, \quad \frac{P_n'(s)}{P_n(s)} = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{f_k'(s)}{1+f_k(s)}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geq 2$. On initialise facilement pour $n = 2$, puisque $P_2'(s) = f_1'(s)(1+f_2(s)) + (1+f_1(s))f_2'(s)$. Soit $n \geq 2$, $P_{n+1}(s) = P_n(s) \times (1+f_{n+1}(s))$ d'où,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n+1}'(s)}{P_{n+1}(s)} &= \frac{P_n'(s) \times (1+f_{n+1}(s))}{P_{n+1}(s)} + \frac{P_n(s) \times f_{n+1}'(s)}{P_{n+1}(s)} \\
&= \sum_{1\leq k\leq n} \frac{f_k'(s)}{1+f_k(s)} + \frac{f_{n+1}'(s)}{1+f_{n+1}(s)} \\
&= \sum_{1\leq k\leq n+1} \frac{f_k'(s)}{1+f_k(s)}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses et notations de la proposition précédente, on suppose de plus que le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ converge uniformément sur Ω vers une fonction f et que la suite $(P_n'/P_n)_n$ converge uniformément sur Ω vers une fonction g. Alors, la suite $(P_n')_n$ converge uniformément sur Ω vers $s \mapsto f(s)g(s)$.*

Démonstration. On a, pour tout $n \geq 2$, $P_n' = P_n \times \frac{P_n'}{P_n}$. Le facteur de gauche (resp. de droite) converge uniformément sur Ω vers f (resp. vers g), donc $(P_n')_n$ y converge uniformément (vers $s \mapsto f(s)g(s)$). En effet, si $S_n(s)$ désigne $\frac{P_n'(s)}{P_n(s)}$,

$$\begin{aligned}
\forall s \in \Omega,\ |P_n(s)S_n(s) - f(s)g(s)| &= |P_n(s)(S_n(s) - g(s)) + g(s)(P_n(s) - f(s))| \\
&\leq |P_n(s)| \times |S_n(s) - g(s)| + |g(s)| \times |P_n(s) - f(s)|,
\end{aligned}$$

quantité qui tend bien vers 0 quand n tend vers l'infini (la bornitude des f_n et la convergence uniforme de $\prod_{n\geq 1}(1+f_n)$ entraîne la bornitude de f ; g étant continue sur Ω, elle est bornée sur Ω). □

Dans la suite, on aura besoin de prendre le logarithme complexe d'un produit infini de fonctions à valeurs complexes. Lorsque cela aura un sens, on voudra de plus utiliser la formule $\log \prod f_n = \sum \log f_n$, mais cela n'a aucune raison d'être vrai en général, puisque le logarithme complexe n'est pas un morphisme. Voyons comment y remédier.
Si s_1, s_2 sont des nombres complexes d'arguments $-\pi < \theta_1, \theta_2 < \pi$, alors $\log s_1 s_2 - \log s_1 - \log s_2 = i(\overline{\theta_1 + \theta_2} - \theta_1 - \theta_2)$, où $\overline{\theta_1 + \theta_2}$ est l'unique réel appartenant à $]-\pi\,;\pi[$ tel que $\theta_1 + \theta_2 = \overline{\theta_1 + \theta_2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Avec nos choix sur θ_1, θ_2, on a $k \in \{-1, 0, 1\}$ et donc $\log s_1 s_2 = \log s_1 + \log s_2 + ik\pi$. Une condition suffisante pour avoir la propriété de morphisme est de demander $-\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi$. Une récurrence généralise ce résultat à n'importe quel produit fini $s_1 \dots s_n$, $n \in \mathbb{N}$), sous réserve d'avoir $-\pi < \sum_{j=1}^n \theta_j < \pi$). La proposition suivante répond totalement à notre question.

Proposition 1.1. *Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes vérifiant les hypothèses du théorème (1.2) et telle que $\sum_n |g_n|$ converge uniformément sur Ω. Notons $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n = 1 + g_n$ et supposons de plus que pour tout $s \in \Omega$, $-\pi < \sum_{n\in N} \arg(f_n(s)) < \pi$ alors,*

$$\forall\, s \in \Omega,\ \log\Big(\prod_{n\in\mathrm{N}} f_n(s)\Big) = \sum_{n\in\mathrm{N}} \log f_n(s).$$

Démonstration. D'après le théorème (1.2), $s \mapsto \prod_{n\in N} f_n(s)$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω, donc $\log\Big(\prod_{n\in N} f_n(s)\Big)$ a un sens. Soit $N \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède

$$\forall\, s \in \Omega,\ \log\Big(\prod_{1\le n\le N} f_n(s)\Big) = \sum_{1\le n\le N} \log f_n(s).$$

Soit $s \in \Omega$,

$$\Big|\log\Big(\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(s)\Big) - \sum_{1\le n\le N} \log f_n(s)\Big| = \Big|\sum_{n>N} \log f_n(s)\Big| \le \sum_{n>N} |\log f_n(s)|.$$

Or, la série de terme général $\log f_n(s)$ est de même nature que la série de terme général $g_n(s)$, c'est-à-dire absolument convergente. Finalement,

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \Big|\log\Big(\prod_{n\in N} f_n(s)\Big) - \sum_{1\le n\le N} \log f_n(s)\Big| = 0,$$

ce qui prouve la relation voulue. □

1.2 Zéros des fonctions holomorphes

Dans cette section on énonce des résultats sur les zéros de fonctions holomorphes. Le symbole $\mathbb{D}$ désignera le disque unité ouvert du plan complexe et $\overline{\mathbb{D}}$ son adhérence. On suppose connue la formule de la moyenne, conséquence immédiate de la formule intégrale de Cauchy ; soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, f holomorphe sur Ω et $D(s, R)$ un disque contenu dans Ω, alors on a la formule

$$\forall\, 0 < r < R, \quad f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s + re^{i\theta})\, d\theta.$$

1.2.1 La formule de Jensen

On considère une fonction holomorphe f sur un voisinage de $\overline{D(0, R)}$. Par le principe des zéros isolés, f admet un nombre fini de zéros dans ce disque. La formule de Jensen relie les modules de ces zéros au comportement de f sur le bord du disque.

Proposition 1.2. *Soient $R > 0$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{D(0, R)}$ et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(0) \neq 0$. Notons $s_1, \ldots, s_n$ les éventuels zéros de f dans $\overline{D(0, R)}$, comptés avec multiplicité. Alors, la fonction $\theta \mapsto \log f(Re^{i\theta})$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$ et on a la formule*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})|\, d\theta = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log \frac{R}{|s_k|}$$

Démonstration. Le résultat repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.3. *i) Pour tout $t \geq 0$, la fonction $\theta \mapsto \log|t - e^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$. On a de plus $\int_0^{2\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta = 0$ si $t \leq 1$ et $\int_0^{2\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log t$ si $t > 1$.*

ii) Soit $r > 0$, pour tout $s \in \mathbb{C}$, la fonction $\theta \mapsto \log|s - re^{i\theta}|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$. On a de plus $\int_0^{2\pi} \log|s - e^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log r$ si $|s| \leq r$ et $\int_0^{2\pi} \log|s - e^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log|s|$ si $|s| > r$.

Démonstration. i) Par 2π-périodicité de l'intégrande, on peut considérer l'intervalle d'intégration $[-\pi\,;\pi]$ plutôt que $[0\,;2\pi]$. Si $t \neq 1$, la fonction $\theta \mapsto \log|t - e^{i\theta}|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur $[-\pi\,;\pi]$. Pour $t = 1$, on a la continuité sur $[-\pi\,;\pi] \setminus \{0\}$ et au voisinage de 0, $\log|1 - e^{i\theta}| = \log|1 - (1 + i\theta + o(\theta))| = \log|\theta(-i + o(1))| = \log|\theta| + o(\log|\theta|)$, c'est-à-dire $\log|1 - e^{i\theta}| \sim \log|\theta|$. Comme $u \mapsto \log u$ est intégrable au voisinage de 0^+, on en déduit que $\theta \mapsto \log|t - e^{i\theta}|$ est intégrable sur $[-\pi\,;\pi]$ et donc $I(t) := \int_{-\pi}^{\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta$ est définie pour tout $t \geq 0$. Le théorème de continuité sous l'intégrale s'applique et assure que I est continue en tout $t \neq 1$. On montre la continuité en 1 ; les inégalités $\log|\sin\theta| \leq \log|t - e^{i\theta}| \leq \log(1+t)$ montrent que si $t \in [0\,;2]$, alors $|\log|t - e^{i\theta}|| \leq |\log|\sin\theta|| + \log 3$ est un majorant intégrable pour tout $\theta \in [-\pi\,;\pi]$, donc le théorème de continuité sous l'intégrale donne la continuité de I en 1. Pour prouver le lemme, il suffit donc de montrer que $\int_0^{2\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta = 0$ si $0 \leq t < 1$ et que $\int_0^{2\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta = 2\pi \log t$ si $t > 1$.
Si $t > 1$ est fixé, alors pour tout $s \in \overline{\mathbb{D}}$, $t - s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ donc la fonction $s \mapsto \log(t - s)$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Comme $\log|t - s| = \Re(\log(t - s))$, la formule de la moyenne appliquée à $s \mapsto \log|t - s|$ donne

$$I(t) = \int_0^{2\pi} \log|t - e^{i\theta}|\,d\theta = \Re\Big(\int_0^{2\pi} \log(t - e^{i\theta})\,d\theta\Big) = 2\pi\Re(\log(t - 0)) = 2\pi \log t.$$

Si $0 < t < 1$, on écrit $\log|t - e^{i\theta}| = \log|t - e^{-i\theta}| = \log|e^{i\theta}t - 1| = \log t + \log|\frac{1}{t} - e^{i\theta}|$ donc $I(t) = 2\pi \log t + I(\frac{1}{t})$. Puisque $\frac{1}{t} > 1$, on peut appliquer ce qui précède pour calculer $I(\frac{1}{t}) = -2\pi \log t$, donc $I(t) = 0$.

ii) Soit $s = |s|e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$, on a $\log|s - e^{i\theta}| = \log r + \log|\frac{|s|}{r} - e^{i(\theta - \theta_0)}|$, on en déduit le résultat en appliquant *i)*. ☐

On démontre maintenant la formule de Jensen ; soit $\varepsilon > 0$ tel que f n'admette pas d'autre zéro que les s_i dans $D(0, r + \varepsilon)$, on peut écrire $f(s) = g(s)\prod_{k=1}^{n}(s - s_k)$ où g est holomorphe sur $D(0, r + \varepsilon)$ et ne s'annule pas. Alors, g'/g est holomorphe sur $D(0, r + \varepsilon)$ donc admet une primitive, *i.e* g admet un logarithme φ sur $D(0, r + \varepsilon)$. D'une part, $\log|g| = \Re(\varphi)$ donc d'après la formule de la moyenne,

$$\log|g(0)| = \Re(\varphi)(0) = \Re\Big(\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta})\,d\theta\Big) = \int_0^{2\pi} \Re(\varphi(Re^{i\theta}))\,d\theta = \int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

et par définition de g, $\log|g(0)| = \log|f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \log|s_k|$.

D'autre part, $\log|g(Re^{i\theta})| = \log|f(Re^{i\theta})| - \sum_{k=1}^{n} \log|s_k - Re^{i\theta}|$, et comme g ne s'annule pas, $\log g$ est une fonction holomorphe donc le lemme s'applique : $\theta \mapsto \log|f(Re^{i\theta})|$ est intégrable sur $[0\,;2\pi]$ et de plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} \log|s_k - Re^{i\theta}|\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - n\log R\end{aligned}$$

En mettant les deux expressions ensemble, on obtient

$$\log|f(0)| - \sum_{k=1}^{n} \log|s_k| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - n\log R$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log\frac{R}{|s_k|}.$$

□

Le corollaire qui suit montre comment la formule de Jensen donne des renseignements sur le nombre $m(x)$ de zéros de f dans le disque fermé $\overline{D(0,x)}$. Mieux, on verra qu'une fonction dont la croissance n'est pas « très rapide » a « peu » de zéros dans une région donnée.

Corollaire 1.2. *Sous les notations qui précèdent, supposons de plus que $|s_1| \leq \cdots \leq |s_n|$. Alors, on a la formule*

$$\int_0^R \frac{m(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\, d\theta - \log|f(0)|$$

Démonstration. D'après la formule de Jensen, il s'agit de montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\frac{R}{|s_k|} = \int_0^R \frac{m(x)}{x}\, dx.$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \log\frac{R}{|s_k|} &= n\log R - \sum_{k=1}^{n} \log|s_k| \\
&= n\log R - \sum_{k=1}^{n} (k-(k-1))\log|s_k| \\
&= n\log R - \sum_{k=1}^{n} k\log|s_k| + \sum_{k=0}^{n-1} k\log|s_{k+1}| \\
&= n(\log R - \log|s_n|) + \sum_{k=1}^{n-1} k(\log|s_{k+1}| - \log|s_k|) \\
&= m(|s_n|)\int_{|s_n|}^{R} \frac{dx}{x} + \sum_{k=1}^{n-1} m(|s_k|)\int_{|s_k|}^{|s_{k+1}|} \frac{dx}{x} \\
&= \int_{|s_n|}^{R} \frac{m(x)}{x}\, dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{|s_k|}^{|s_{k+1}|} \frac{m(x)}{x}\, dx \\
&= \int_0^R \frac{m(x)}{x}\, dx.
\end{aligned}$$

□

1.2.2 Développement en produit de Hadamard

Définition. Une fonction entière f est dite **d'ordre au plus** 1 si elle vérifie

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad f(s) \ll_{\varepsilon} \exp(|s|^{1+\varepsilon}).$$

Produit de Hadamard des fonctions d'ordre au plus 1

Proposition 1.3. *Soit f une fonction d'ordre au plus 1 de zéros non nuls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ (comptés avec multiplicité). Alors,*

$$i)\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}} < +\infty$$
$$ii)\ \forall\, s \in \mathbb{C},\ f(s) = s^r e^{a+bs} \prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}}$$

où r est l'ordre de f en 0 et $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Le produit, appelé produit de Hadamard de f, converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Démonstration. $i)$ Soit f d'ordre au plus 1, par définition,

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, A_\varepsilon > 0\ :\ \forall\, s \in \mathbb{C},\ |f(s)| \le A_\varepsilon \exp(|s|^{1+\varepsilon}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on montre que $m(R) \ll_\varepsilon R^{1+\varepsilon}$, ce qui rejoint la remarque comme quoi les zéros d'une fonction d'ordre au plus 1 sont « peu rapprochés ». Pour tout $s = Re^{i\theta}$, on a

$$\log|f(Re^{i\theta})| \le \log(A_\varepsilon) + R^{1+\varepsilon}.$$

Avec le corollaire (1.2),

$$\int_0^R \frac{m(x)}{x}\, dx \le \log(A_\varepsilon) + R^{1+\varepsilon} - \log|f(0)|,$$

donc il existe une constante $K_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $R > 0$ on ait $\int_0^R \frac{m(x)}{x}\, dx \le K_\varepsilon R^{1+\varepsilon}$. Par croissance de $x \mapsto m(x)$ on a,

$$\forall\, R > 0,\ \int_R^{2R} \frac{m(x)}{x}\, dx \ge m(R) \int_R^{2R} \frac{dx}{x} = m(R)\log 2.$$

On obtient ainsi

$$\forall\, R > 0,\ m(R) \le \frac{1}{\log 2} \int_R^{2R} \frac{m(x)}{x}\, dx \le \frac{1}{\log 2} \int_0^{2R} \frac{m(x)}{x}\, dx,$$

soit finalement

$$\forall\, R > 0,\ m(R) \le \frac{K_\varepsilon (2R)^{1+\varepsilon}}{\log 2},\ \text{donc } m(R) \ll_\varepsilon R^{1+\varepsilon}.$$

Quitte à réordonner, on suppose que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ vérifie $|s_n| \le |s_{n+1}|$. Alors, $m(|s_n|) \ge n$ (le disque $\overline{D(0,|s_n|)}$ contient $s_1, \ldots, s_n$) et d'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\ n \le m(|s_n|) \le C_\varepsilon |s_n|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Cela implique

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\ \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}} \le \Big(C_\varepsilon \frac{1}{n}\Big)^{(1+\varepsilon)/(1+\varepsilon/2)},$$

donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{|s_n|^{1+\varepsilon}}$ converge, par comparaison avec une série de Riemann convergente.

$ii)$ Quitte à diviser f par une puissance de s, on peut supposer que f ne s'annule pas en 0. Notons

$g(s) := \prod_{n\in\mathbb{N}_{>0}}(1-\frac{s}{s_n})e^{\frac{s}{s_n}}$. La série de terme général $\Big((1-\frac{s}{s_n})e^{\frac{s}{s_n}}-1\Big)$ converge normalement donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. En effet, $|(1-\frac{s}{s_n})e^{\frac{s}{s_n}}-1| = |e^{\frac{s}{s_n}}(1-\frac{s}{s_n}-e^{-\frac{s}{s_n}})| = |e^{\frac{s}{s_n}}(\frac{s^2}{s_n^2}+o(\frac{s^2}{s_n^2}))|$ lorsque $n\to+\infty$. Soit $K\subset\mathbb{C}$ un compact et $R>0$ tel que K soit contenu dans $D(0,R)$, alors $\sup_{s\in K}|e^{\frac{s}{s_n}}(\frac{s^2}{s_n^2}+o(\frac{s^2}{s_n^2}))| \leq R^2 e^{\frac{R}{|s_0|}}(\frac{1}{|s_n|^2}+o(\frac{1}{|s_n|^2}))$ est sommable d'après ce qui précède. Le théorème (1.2) s'applique à g, qui est donc une fonction entière.
La fonction $h := \frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$ est entière (les pôles sont compensés), donc une primitive $H(s) := \int_0^s h(z)\,dz = \log f(s) - \log g(s) - \log f(0) + \underbrace{\log g(0)}_{=0}$ est également entière. En prenant l'exponentielle, il vient

$$f(s) = f(0)e^{H(s)}g(s).$$

Prenant le log et dérivant deux fois (pour dériver g une première fois on applique (1.3) puis la dérivation terme à terme pour la deuxième fois), on obtient

$$\frac{d}{ds}\Big[\frac{f'(s)}{f(s)}\Big] = H''(s) - 2\sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}}\frac{1}{(s_n-s)^2}. \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que $H''=0$.
Soit $R>0$, posons $g_R(s) := \frac{f(s)}{f(0)}\prod_{|s_n|\leq R}\Big(1-\frac{s}{s_n}\Big)^{-1}$; c'est une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,R)}$ (les pôles et les zéros se compensent). Si $|s|=2R$, alors $|1-\frac{s}{s_n}| \geq |1-|\frac{s}{s_n}|| = |\frac{s}{s_n}|-1 \geq 1$, donc $|g_R(s)| \leq |\frac{f(s)}{f(0)}| = O(\exp(2R)^{1+\varepsilon})$, pour $|s|=2R$ et pour tout $\varepsilon>0$. D'après le principe du maximum, $|g_R(s)| = O(\exp(2R)^{1+\varepsilon})$ pour tout $|s|\leq R$. Comme g_R est holomorphe et ne s'annule pas sur $\overline{D(0,R)}$, la fonction $h_R := \log g_R$ est bien définie et holomorphe sur le même disque et de plus,

$$\forall\,\varepsilon>0, \forall\,|s|\leq R,\ \Re(h_R(s)) \leq K_R R^{1+\varepsilon}. \tag{4}$$

Il nous faut un moyen d'estimer le module des dérivées de h_R à partir du contrôle de sa partie réelle. La réponse est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.4 (de Borel-Carathéodory). *Soient f une fonction analytique dans la boule fermée $\overline{D(0,R)}$ et $A(r)$ le maximum de sa partie réelle prise sur le cercle de rayon r. Alors on a l'inégalité suivante, pour tout $0<r<R$*

$$M(r) = \max_{|s|=r}|f(s)| \leq \frac{2R}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

Si de plus $A(R)\geq 0$,

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \max_{|s|=r}|f^{(n)}(s)| \leq \frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}(A(R)+|f(0)|).$$

Admettons ce résultat pour le moment et terminons la preuve de *ii*). On applique le deuxième point du lemme de Borel-Carathéodory à (4), il vient

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,|s|=r<R,\ \max_{|s|=r}|h_R^{(n)}(s)| \leq \frac{2^{n+1}n!K_R}{(R-r)^{n+1}}R^{2+\varepsilon}.$$

En particulier pour $|s|=\frac{1}{2}R$ on obtient

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ h^{(n)}(s) = O(R^{1-n+\varepsilon}).$$

En utilisant (3) pour $|s| = \frac{1}{2}R$,

$$\begin{aligned} H''(s) &= \frac{d}{ds}\Big[\frac{f'(s)}{f(s)}\Big] + \sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{(s_n - s)^2} \\ &= h''(s) + 2\sum_{|s_n|>R} \frac{1}{(s_n - s)^2} \\ &= O(R^{\varepsilon-1}) + O\Big(\sum_{|s_n|>R} \frac{1}{|s_n|^2}\Big) \end{aligned}$$

Par le principe du maximum, cette comparaison est vraie sur tout le disque $\overline{D(0,\frac{1}{2})}$. Pour ε assez petit, ces deux termes tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$, et comme le terme de gauche ne dépend pas de R, on en déduit que $H'' = 0$, donc H est un polynôme de degré au plus 2. □

Il reste à montrer le lemme de Borel-Carathéodory.

Démonstration. Le résultat est évident si f est constante, sinon on commence par supposer $f(0) = 0$. Alors, $A(r) > A(0) = 0$ pour tout $0 < r < R$. Posons $\phi(s) = \frac{f(s)}{2A(R)-f(s)}$, c'est une fonction holomorphe sur $\overline{D(0,R)}$ puisque le dénominateur ne s'annule pas. En écrivant $f = u + iv$, il vient $|f(s)|^2 = \frac{u^2(s)+v^2(s)}{(2A(R)-u(s))^2+v^2} \leq 1$, puisque $-2A(R) + u(s) \leq u(s) \leq 2A(R) - u(s)$. Le lemme de Schwarz donne

$$\forall\, |s| \leq R,\ |\phi(s)| \leq \frac{|s|}{R},$$

et donc

$$\forall\, |s| = r,\ |f(s)| = \Big|\frac{2A(R)\phi(s)}{1+\phi(s)}\Big| \leq \frac{2A(R)r}{R(1-|\phi(s)|)} \leq \frac{2A(R)r}{R-r},$$

c'est précisément ce que l'on voulait dans ce cas. Supposons maintenant $f(0) \neq 0$, on peut appliquer ce qui précède à $f - f(0)$:

$$\forall\, |s| = r,\ |f(s) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|s|=R} \Re\Big(f(s) - f(0)\Big) \leq \frac{2r}{R-r}(A(R) + |f(0)|).$$

Enfin, comme $|f(s)| - |f(0)| \leq |f(s) - f(0)|$, on en déduit

$$|f(s)| \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

Montrons le deuxième point ; supposons $A \geq 0$ et soient $|s| = r < R$ et γ le cercle de centre s et de rayon $\delta = \frac{1}{2}(R-r)$. Sur γ, on a $|\xi| \leq |s| + \delta = \frac{1}{2}(R+r)$. Le premier point du lemme de Borel-Carathéordory donne

$$\max_{\xi\in\gamma} |f(\xi)| \leq \frac{R + \frac{1}{2}(R+r)}{R - \frac{1}{2}(R+r)}(A(R) + |f(0)|) \leq \frac{4R}{R-r}(A(R) + |f(0)|).$$

En utilsant les formules de Cauchy $f^{(n)}(s) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-s)^{n+1}}\,d\xi$ il vient

$$|f^{(n)}(s)| \leq \frac{n!}{\delta^n}\frac{4R}{R-r}(A(R) + |f(0)|) = \frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}(A(R) + |f(0)|).$$

□

1.3 Miscellanées

Cette section contient des résultats d'analyse complexe donnés sans démonstration, on pourra consulter les références mentionnés pour les détails.

1.3.1 La fonction Γ sur $\mathbb{C}$.

Rappel. La fonction $\Gamma : s \mapsto \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$ définie sur Ω_0 est holomorphe et elle vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$. Cette identité permet d'étendre Γ sur chaque bande Ω_{-n} ; on obtient un prolongement méromorphe de Γ au plan complexe, avec des pôles simples uniquement aux entiers négatifs $-n$, dont les résidus valent $\frac{(-1)^n}{n}$.

Proposition 1.4. *La fonction $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)}$ est une fonction entière d'ordre au plus 1, son développement en produit de Hadamard est*

$$\forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s}\, s \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{s}{n}\Big) e^{-\frac{s}{n}},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Une démonstration de cette proposition figure dans [8] (p. 271-280).

Proposition 1.5 (Formule de Stirling complexe)**.** *On a uniformément pour $a \le \sigma \le b$ et $|t| \ge 1$*

$$|\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\pi|t|} \Big(1 + O(t^{-1})\Big),$$

où la constante dépend uniquement de a et de b.

Une démonstration consiste à prendre le logarithme complexe dans le développement de $1/\Gamma$. Pour les détails, on pourra consulter voir [4] (p. 149-151). Dans ces pages, on trouve aussi le résultat suivant.

Proposition 1.6. *On a uniformément dans tout angle $|\arg(s)| \le \pi - \varepsilon$*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log |s| + O(s^{-1}),$$

où la constante ne dépend que de ε.

1.3.2 Principes de Phragmén-Lindelöf

Le principe de Phragmén-Lindelöf est un raffinement du principe du maximum dans des secteurs angulaires. On pourra regarder dans [4] (p. 177-181) et [7] (p. 256-258).

Théorème 1.4 (de Phragmén-Lindelöf)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un secteur angulaire $S = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \theta_1 \le \arg s \le \theta_2\}$ d'angle central $\theta_2 - \theta_1 =: \pi/\lambda$. Supposons que sur la frontière de S (ce sont deux demi-droites) on ait $|f(s)| \le M$ et qu'il existe $0 < \delta < \lambda$ tel que $f(s) = O(\exp(\delta|s|))$, quand $s \in S$ et $|s| \to +\infty$. Alors,*

$$\forall\, s \in S, \quad |f(s)| \le M.$$

Pour contrôler la croissance de séries de Dirichlet, on aura besoin du corollaire suivant.

Corollaire 1.3. *Soit f une fonction holomorphe sur la bande verticale $A \leq \sigma \leq B$ et soient $A < \alpha < \beta < B$ tels que dans la bande $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, $f(s) \ll \exp(|s|^\lambda)$, pour un certain $\lambda \geq 0$. On suppose de plus que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha + it) \leq C(\alpha)|s|^{D(\alpha)} \quad \textit{et} \quad f(\beta + it) \ll D(\beta)|s|^{D(\beta)}.$$

Alors on a la majoration dans toute la bande,

$$|f(\sigma + it)| \ll C(\alpha)^{l(\sigma)} D(\beta)^{1-l(\sigma)} |s|^{l(\sigma)D(\alpha)+(1-l(\sigma))D(\beta)},$$

où l est la fonction affine valant 1 en α et 0 en β.

2 Fonctions arithmétiques et séries de Dirichlet

2.1 Fonctions arithmétiques

2.1.1 Exemples fondamentaux

Définition. On appelle **fonction arithmétique** toute application définie sur $\mathbb{N}_{>0}$ à valeurs complexes. On dit qu'une fonction arithmétique f est **multiplicative** si pour tous $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ premiers entre eux on a $f(mn) = f(m)f(n)$. Si cette propriété est vérifiée pour tous couples (m, n) non nécessairement premiers entre eux, on dit que f est **complètement multiplicative**.

Donnons quelques exemples importants pour la suite.

Exemples. La fonction de Möbius est définie par

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \end{cases}$$

On vérifie aisément que cette fonction est multiplicative (mais pas complètement multiplicative).

L'indicatrice d'Euler bien connue

$$\varphi(n) = |\{a \in \{1, \ldots, n\} \mid (a, n) = 1\}| = |(\mathbb{Z}/nZ)^\times|,$$

c'est une fonction multiplicative ; cela provient du théorème des restes chinois.

La fonction de von Mangoldt, définie par

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \text{ où } p \text{ est un nombre premier et } k \geq 1 \text{ un entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas multiplicative, mais ô combien importante pour la suite !

On notera également

$$\delta_1(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad \mathbf{1}(n) := 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Montrons un premier résultat sur la fonction de Möbius

Proposition 2.1. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_1(n).$$

Démonstration. Le résultat pour $n = 1$ est évident. Si $n \geq 2$, on écrit $n = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$ avec $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ et $r \geq 1$, de sorte que les diviseurs d de n tels que $\mu(d) \neq 0$ sont de la forme $d = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$ avec $e_i \in \{0, 1\}$. En groupant la somme suivant le nombre i de facteurs premiers de d, on obtient

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i = (1-1)^r = 0.$$

□

Pour nous motiver un peu, disons que nous serons amenés à évaluer des fonctions sommatoires de la forme $F(x,z) = \sum_{\substack{n\le x\\(n,P(z))=1}} f(n)$, où f est arithmétique et $P(z) = \prod_{p<z} p$, c'est-à-dire que l'on somme sur les entiers $n \le x$ n'ayant encore facteur premier plus petit que z. La proposition précédente permettant de « détecter » la condition $n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} F(x,z) &= \sum_{\substack{n\le x\\(n,P(z))=1}} f(n) \\ &= \sum_{n\le x}\Big(\sum_{d\mid(n,P(z))}\mu(d)\Big)f(n) \\ &= \sum_{d\mid P(z)}\mu(d)\sum_{\substack{n\le x\\ d\mid n}} f(n) \\ &= \sum_{d\mid P(z)}\mu(d)A_d(x), \end{aligned}$$

où $A_d(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ d\mid n}} f(n)$ est d'apparence plus simple à calculer.

2.1.2 L'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions arithmétiques

L'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions arithmétiques est naturellement muni d'une addition qui en fait un groupe abélien. On peut rajouter une loi sur $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

Proposition 2.2. *Pour $f, g \in \mathcal{A}$, on appelle produit de Dirichlet de f et de g et on note $f * g$ la fonction arithmétique définie par $(f*g)(n) := \sum_{d\mid n} f(d)g(n/d)$.*
Alors, $(\mathcal{A}, +, *)$ est un anneau commutatif de neutre la fonction δ_1.

Exemple. Nous aurions aussi pu définir la fonction de von Mangoldt par

$$\Lambda = \mu * \log \tag{5}$$

En effet, pour $n \ge 1$ on a $(\mu * \log)(n) = \sum_{d\mid n}\mu(d)\log(n/d) = \delta_1(n)\log n - \sum_{d\mid n}\mu(d)\log d = -\sum_{d\mid n}\mu(d)\log d$, c'est-à-dire $\mu*\log = -\mu\log*\mathbf{1}$. Ainsi, si $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ sont premiers entre eux, on a $(\mu*\log)(mn) = -\sum_{d\mid m}\sum_{t\mid n}\mu(dt)\log(dt) = -\sum_{d\mid m}\mu(d)\sum_{t\mid n}\mu(t)(\log d+\log t) = \sum_{d\mid m}\mu(d)(-\delta_1(n)\log d + (\mu*\log)(n)) = \delta_1(n)(\mu*\log)(m) + \delta_1(m)(\mu*\log)(n)$. On en déduit que $(\mu*\log)(n)$ est nul si n n'est pas une puissance d'un nombre premier. Ensuite, si $n = p^k$ on a $(\mu*\log)(n) = -(\mu\log*\mathbf{1})(n) = -\sum_{i=0}^k \mu(p^i)\log(p^i) = -\log p\sum_{i=0}^k i\mu(p^i) = -\log p \times (0-1) = \log p$.

Remarque. Si $f \in \mathcal{A}$ est inversible d'inverse $g \in \mathcal{A}$, on a $\sum_{d\mid n} f(d)g(n/d) = \delta_1(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, en particulier pour $n = 1$, on doit avoir $f(1) \ne 0$. En fait, cette condition est aussi suffisante ; si $f(1) \ne 0$, on construit $g(n)$ par récurrence en prenant $g(1) = f(1)^{-1}$ et $g(n) = f(1)^{-1}\sum_{\substack{d\mid n\\ d<n}} f(n/d)g(d)$ et on vérifie que $f * g = \delta_1$. Nous pouvons reformuler la proposition (2.1) de la façon suivante

Théorème 2.1. *La fonction de Möbius est l'inverse de la fonction arithmétique $\mathbf{1}$ pour le produit de Dirichlet, i.e*

$$\mathbf{1} * \mu = \delta_1$$

On en déduit la formule suivante, dite d'inversion.

Théorème 2.2. *Soient $f, g \in \mathcal{A}$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$i) \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad n \geq 1$$

$$ii) \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d), \quad n \geq 1$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $i)$ est équivalent à $g = f * \mathbf{1}$ et que $ii)$ est équivalent à $f = g * \mu$, et d'appliquer le théorème (2.1). $\square$

2.2 Séries de Dirichlet

2.2.1 Définitions et convergence

Définition. Soit f est une fonction arithmétique, la **série de Dirichlet associée à** f est

$$D_f(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Une fonction arithmétique f dont la série de Dirichlet associée a une région de convergence non vide est dite à **croissance modérée**.

Exemple. Pour f=$\mathbf{1}$, on a $D_f = \zeta$, qui est en quelque sorte la série de Dirichlet la plus « simple ».

Le résultat suivant donne des informations sur l'éventuelle région de convergence d'une série de Dirichlet.

Proposition 2.3. *Soit f une fonction arithmétique.*
$i)$ Si $f(n) = O(n^\beta)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors la série de Dirichlet $D_f(s)$ converge absolument pour tout $s \in \Omega_{\beta+1}$, uniformément sur tout compact, et définit dans cette région une fonction holomorphe $D_f(s)$ de s.
$ii)$ Réciproquement, si la série converge pour $s_0 \in \mathbb{C}$, on a $f(n) \ll n^{\sigma_0}$.

Démonstration. $i)$ Pour tout $(s, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}_{>0}$, $|f(n)n^{-s}| = |f(n)|n^{-\sigma} \ll n^{\beta-\sigma}$. D'après le critère de Riemann, $D_f(s)$ converge absolument pour tout $\sigma > \beta + 1$. Ensuite, il faut vérifier les hypothèses du théorème d'holomorphie sous l'intégrale : pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $s \mapsto f(n)n^{-s}$ est holomorphe sur le demi-plan $\Omega_{\beta+1}$, et si $K \subset \Omega_{\beta+1}$ est un compact où $\Re(K) \subset [a\,; b]$, on a pour tout $(s, n) \in K \times \mathbb{N}_{>0}$, $|f(n)n^{-s}| \leq |f(n)|n^{-a} = O(n^{\beta-a})$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.
$ii)$ La convergence de $D_f(s_0)$ implique que les termes tendent vers 0, en particulier ils sont bornés donc $f(n)n^{-\sigma_0} \ll 1$. $\square$

Proposition 2.4. *Soient f et g des fonctions arithmétiques à croissance modérée. Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que les séries de Dirichlet $D_f(s)$ et $D_g(s)$ convergent absolument, on a*

$$D_f(s)D_g(s) = D_{f*g}(s) \tag{6}$$

Démonstration. Pour σ assez grand, les deux séries convergent absolument donc leur produit de Cauchy également. Or, ce dernier vaut précisément $D_{f*g}(s)$. $\square$

Remarque. Le théorème (2.1) est équivalent à $D_\mu(s)\zeta(s) = 1$, en particulier on retrouve le fait que $\mu * \mathbf{1} = \delta_1$. Plus généralement, la formule d'inversion (2.2) « $f = \mu * g$ ssi $g = f * \mathbf{1}$ » se traduit en termes de séries de Dirichlet (lorsque les séries convergent) par la tautologie « $D_f(s) = \zeta(s)^{-1}D_g(s)$ ssi $D_g(s) = \zeta(s)D_f(s)$ ».

2.2.2 Développement en produit Eulérien

Dans cette section nous montrons que les séries de Dirchlet des fonctions multiplicatives se développent en un produit infini indéxé sur l'ensemble des nombres premiers. Cette propriété fondamentale nous permettra d'étudier les progressions arithmétiques de nombres premiers à partir de séries de Dirichlet bien spécifiques. Commençons par le cas de la fonction ζ, dû à Euler.

Théorème 2.3 (Produit d'Euler)**.** *Soit $s \in \Omega_1$,*

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

où le produit est pris sur l'ensemble des nombres premiers.

Démonstration. Soit $N \geq 2$ un entier et P_N l'ensemble de tous les entiers dont les facteurs premiers sont inférieurs à N (on note $p_1, \dots, p_{r_N}$ ces facteurs premiers). On se sert de la formule qui donne la somme d'une suite géométrique (valable pour $\sigma > 0$) : $\Sigma_{i=0}^{\infty} q^{-is} = (1 - q^{-s})^{-1}$. Ces séries étant toutes absolument convergentes, on en déduit que le produit de leur somme n'est autre que la somme de leur produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} &= \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{k_{r_N} \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{k_1 s} \dots p_{r_N}^{k_{r_N} s}} \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_{r_N} = 1}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_{r_N}^{k_r})^s} \\
&= \sum_{n \in P_N} \frac{1}{n^s},
\end{aligned}$$

Mais,

$$\sum_{n \in P_N} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n \notin P_N} \frac{1}{n^s}$$

Et de plus,

$$0 \leq \Big| \sum_{n \notin P_N} \frac{1}{n^s} \Big| \leq \sum_{n \notin P_N} \Big| \frac{1}{n^s} \Big| = \sum_{n \notin P_N} \frac{1}{n^{\Re(s)}} \leq \sum_{n > N} \frac{1}{n^{\Re(s)}},$$

quantité qui tend vers 0 quand $N \to \infty$ (puisque $\sigma > 1$ et par le critère de Riemann), ce qui prouve la convergence. $\square$

Remarque. Pour $s > 1$ réel, un développement en série de Taylor montre facilement que $\log \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_p p^{-1} + r(s)$, où r est une fonction bornée au voisinage de 1. D'après le théorème précédent et par continuité du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_{>0}$, $\log \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \log \zeta(s)$, et donc

$\sum_p p^{-1} + r(s) = \log \zeta(s)$. En faisant tendre s vers 1, on obtient la divergence de $\sum_p p^{-1}$ (puisque la série harmonique diverge), ce qui redémontre l'infinité des nombres premiers.

Nous montrons un résultat plus général que le précédent, qui porte sur les séries de Dirichlet de fonctions multiplicatives.

Produit Eulérien pour les fonctions multiplicatives

Théorème 2.4. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative telle que $D_f(s)$ a une région de convergence non vide. Alors, pour tout s tel que cette série converge absolument, on a la formule*

$$D_f(s) = \prod_p \Big(\sum_{k \geq 0} f(p^k) p^{-ks} \Big).$$

En particulier si f est complètement multiplicative on a le développement en produit Eulérien

$$D_f(s) = \prod_p \Big(1 - f(p) p^{-s} \Big)^{-1}.$$

La preuve est similaire à celle du théorème précédent.

Démonstration. Si f est multiplicative, remarquons que $g(n) = f(n) n^{-s}$ l'est aussi. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| < +\infty. \tag{7}$$

Tout revient alors à montrer que pour g multiplicative et vérifiant (7) on a la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \prod_p \Big(\sum_{k \geq 0} g(p^k) \Big)$$

Soit $N \geq 2$ un entier, par les mêmes arguments (et mêmes notations) que précedemmment, on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq N} \Big(\sum_{k \geq 0} g(p^k) \Big) &= \sum_{k_1, \ldots, k_{r_N} \geq 1} g(p_1^{k_1} \ldots p_{r_N}^{k_{r_N}}) \\ &= \sum_{n \in P_N} g(n), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que g est multiplicative. De plus,

$$\begin{aligned} \Big| \prod_{p \leq N} \Big(\sum_{k \geq 0} g(p^k) \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \Big| &= \Big| \sum_{n \notin P_N} g(n) \Big| \\ &\leq \sum_{n \notin P_N} |g(n)| \\ &\leq \sum_{n > N} |g(n)|. \end{aligned}$$

La relation (7) nous dit que $\sum_{n>N} |g(n)|$ tend vers 0 quand N vers 1'infini ; on peut alors conclure. $\square$

Remarque. Avec les notations qui précèdent, si on suppose de plus que f est majorée par 1 en module (ce cas nous intéressera plus loin), alors la formule du produit Eulérien est vérifiée pour tout s tel que $\sigma > 1$. C'est par exemple le cas pour $f = \mu$, on obtient la formule valable pour tout $\sigma > 1$

$$\sum_{n\geq 1} \mu(n)n^{-s} = \prod_p (1 + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \dots) = \prod_p (1 - p^{-s}) = \zeta(s)^{-1}. \tag{8}$$

2.2.3 Dérivée logarithmique

Combinons les résultats des deux dernières sections pour obtenir des résultats sur les séries de Dirichlet.

Proposition 2.5. *Soit f une fonction arithmétique à croissance modérée telle que $D_f(s)$ converge absolument pour $\sigma > \sigma_0$. Alors, pour $\sigma > \sigma_0$ la dérivée de $D_f(s)$ est*

$$D'_f(s) = D_{-f\log}(s) \tag{9}$$

Démonstration. D'après la proposition (2.3), $D_f(s)$ définit une fonction holomorphe dans la région où elle converge absolument. Comme $\frac{d}{ds}(n^{-s}) = -(\log n)n^{-s}$, et par convergence uniforme de la série, on peut dériver terme à terme $\frac{d}{ds}\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s} = \sum_{n\geq 1} -f(n)\log(n)n^{-s} = D_{-f\log}(s)$. □

Proposition 2.6. *Pour tout $s \in \Omega_1$, la série de Dirichlet $D_\Lambda(s)$ converge absolument et on a*

$$D_\Lambda(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \tag{10}$$

Démonstration. Il suffit de dériver le produit Eulérien $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, ce qui est justifié par le théorème (1.3) à ζ ; il vient alors

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{-(\log p)p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \sum_p \sum_{k\geq 1} (\log p)p^{-ks}.$$

En réordonnant les termes comme dans la démonstration du produit Eulérien, on obtient finalement

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)n^{-s} = D_\Lambda(s).$$

□

Définition. La fonction sommatoire de Λ est la fonction définie par

$$\forall\, x \geq 0, \quad \Psi(x) := \sum_{1\leq n\leq x} \Lambda(n).$$

Plus généralement si f est une fonction arithmétique,

$$\forall\, x \geq 0, \quad M_f(x) := \sum_{1\leq n\leq x} f(n)$$

sera appelée **fonction sommatoire** de f.

Dans le cadre de progressions arithmétiques, on définit également

$$\forall\, x \geq 0, \quad \Psi(x\,;a,b) := \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \in P_{a,b}}} \Lambda(n).$$

Le résultat suivant sera énoncé et démontré dans le cadre plus général des progressions arithmétiques dans le théorème (3.1). On est en mesure d'énoncer une assertion équivalente au théorème des nombres premiers, sous la forme (1) :

Théorème 2.5. *Le théorème des nombres premiers sous la forme* (1) *est équivalent à*

$$\Psi(x) = x + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big), \quad x \to +\infty$$

Voyons maintenant comment intégrer les progressions arithmétiques à notre problème. Il nous faut trouver un moyen de « détecter » lorsqu'un entier n s'écrit $a + kb$, où $k \in \mathbb{N}$, c'est le rôle joué par les caractères, notion développée dans la section suivante.

3 Caractères d'un groupe abélien fini

3.1 Dualité et orthogonalité

3.1.1 Définitions

Soit G un groupe abélien fini, noté multiplicativement.

Définition. On appelle **caractère** de G tout morphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes. Les caractères de G forment un ensemble que l'on appelle **dual** de G et qu'on note $\hat{G}$.

La lettre χ désignera toujours un caractère.

Proposition 3.1. *$\hat{G}$ est un groupe pour la multiplication (c'est $Hom(G, \mathbb{C}^*)$).*

Démonstration. Il est clair que le produit de deux caractères est encore un caractère. On note χ_0 et on appelle *caractère unité* le caractère $g \mapsto 1$ pour tout $g \in G$; c'est clairement un neutre du dual. Soit χ fixé, on construit $\bar{\chi}$ comme suit : pour $g \in G, \chi(g) = \overline{\chi(g)}$ (le conjugué complexe de $\chi(g)$). G étant fini, g est aussi d'ordre fini (par le théorème de Lagrange), disons $g^\mu = 1_G$, $\mu \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\chi(g)^\mu = \chi(g^\mu) = \chi(1_G) = 1$, donc $\chi(g)$ est une racine μ-ième de l'unité. Dans le groupe des racines μ-ième de l'unité, $\chi(g)$ a pour inverse $\overline{\chi(g)}$; au vue de sa définition, il est clair que $\bar{\chi}$ est l'inverse de χ dans $\hat{G}$. De plus, $\bar{\chi}$ est encore un élément du dual : $\overline{\chi}(g_1g_2) = \overline{\chi(g_1g_2)} = \overline{\chi(g_1)\chi(g_2)} = \overline{\chi(g_1)}\ \overline{\chi(g_2)} = \overline{\chi}(g_1)\bar{\chi}(g_2)$. ☐

Proposition 3.2. *Si G est cyclique et d'ordre n, alors le dual de G est également cyclique et du même ordre.*

Démonstration. Supposons G cyclique d'ordre n, soit s un générateur et χ un caractère de G. L'élément $w = \chi(s)$ vérifie $w^n = 1$, autrement dit, w est une racine n-ième de l'unité. Inversement, si w est une racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$, $s^a \mapsto w^a$ définit un caractère de G. Ainsi, $\chi \mapsto \chi(s)$ est un isomorphisme de $\hat{G}$ sur μ_n, le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$; en particulier, $|\hat{G}| = |G|$. ☐

Proposition 3.3. *Soit H un sous-groupe de G. Tout caractère de H peut être prolongé en un caractère de G.*

Démonstration. Par récurrence forte sur l'indice de H dans G : Si $(G : H) = 1$, alors $H = G$ et il n'y a rien à montrer. Soit maintenant $(G : H) > 1$, x un élément de G n'appartenant pas à H, et n le plus petit entier > 1 tel que $x^n \in H$ (qui existe nécessairement puisque G est fini, au pire n est l'ordre de x) ; soit χ un caractère de H et $t = \chi(x^n)$, on choisit alors une racine n-ième de t (dans $\mathbb{C}^*$) : $w^n = t$; soit H' le sous-groupe engendré par H et x, tout élément h' de H' s'écrit $h' = hx^a$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $h \in H$. Posons $\chi'(h') = \chi(h)w^a$. On vérifie aisément que $\chi : H' \to \mathbb{C}^*$ est un caractère de H' prolongeant χ. Comme $H \subsetneq H'$, $|H| < |H'|$ et par le théorème de Lagrange, $(G : H') < (G : H)$, l'hypothèse de récurrence permet alors de prolonger χ' en un caractère de G tout entier. ☐

Proposition 3.4. *$\rho : \hat{G} \to \hat{H}$; $(\chi \mapsto \chi_{|H})$ est un morphisme surjectif ; son noyau se compose des caractères de G triviaux sur H (les prolongements du caractère unité de H en caractères de G). On a un isomorphe entre le noyau de ρ et le dual de (G/H).*

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \ker\rho &\to \widehat{(G/H)} \\ \chi &\mapsto \Big((gH) \mapsto \chi(g)\Big) \end{aligned}$$

est bien définie, on vérifie facilement que c'est un morphisme de groupes injectif. On montre la surjectivité : π désigne la projection canonique $G \to G/H$; $(g \mapsto gH)$ et soit $\psi \in \widehat{(G/H)}$. On vérifie que $\psi \circ \pi \in \hat{G}$ et plus précisément, pour $g \in G$, $(\psi \circ \pi)(g) = \psi(gH)$. En restriction à H, on voit clairement que $\psi \circ \pi$ est trivial, c'est-à-dire $\psi \circ \pi \in \ker\rho$. De plus, $\varphi(\psi \circ \pi)(gH) = (\psi \circ \pi)(g) = \psi(gH)$; donc $\varphi(\psi \circ \pi) = \psi$, d'où la surjectivité de φ. ☐

Corollaire 3.1. *Équation des cardinaux :* $|\hat{G}| = |\widehat{G/H}| \times |\hat{H}|$.

Démonstration. Le théorème de factorisation nous dit qu'on a un isomorphisme entre $\hat{G}/\ker\rho$ et $\operatorname{Im}\rho = \hat{H}$ (par sujectivité), en passant aux cardinaux (qui sont tous finis) on obtient $|\hat{G}| = |\widehat{G/H}| \times |\hat{H}|$. ☐

Proposition 3.5. *$\hat{G}$ est du même ordre que G.*

Démonstration. Le résultat se démontre aussi par récurrence forte, sur l'ordre n de G cette fois-ci. Pour $n = 1$, le cas est trivial ($\hat{G} = \{\chi_0\}$). Pour $n \geq 2$, soit $x \neq 1$ et H le sous-groupe engendré par x ; d'après le corollaire précédent, l'ordre de G est égal au produit des ordres de $\hat{H}$ et de $\widehat{(G/H)}$. Par la proposition (3.2), et comme H est cyclique, $\hat{H}$ est aussi cyclique et du même ordre ; comme $|H| > 1$, $|(G/H)| < n$; l'hypothèse de récurrence permet de conclure que $\hat{G}$ est du même ordre que G. ☐

Remarque. En décomposant G en produit de groupes cycliques, on pourrait montrer que $\hat{G}$ est isomorphe (non canoniquement en général) à G.

Proposition 3.6. *L'application $\varepsilon : G \to \hat{\hat{G}}$; $g \mapsto \Big(\chi \mapsto \chi(g)\Big)$ est un isomorphisme de G dans son bidual.*

Démonstration. C'est bien un morphisme de groupes ; d'après la proposition (3.5), G et son bidual sont du même ordre, il suffit donc de démontrer 1'injectivité i.e, si $x \neq 1$ est un élément de G, il existe un caractère χ de G tel que $\chi(x) \neq 1$. Or, soit H le sous-groupe cyclique engendré par x, dont 1'ordre est n ; d'après la proposition (3.2), H est isomorphe à μ_n et par construction, il est clair qu'il existe un caractère χ de H tel que $\chi(x) \neq 1$. La proposition (3.3) permet enfin de prolonger χ en un caractère de G. ☐

3.1.2 Relations d'orthogonalité

Proposition 3.7. *Si $\chi \in \hat{G}$, alors on a la relation suivante :*

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} 0 & si\ \chi \neq \varepsilon_a \\ |G| & sinon \end{cases}$$

Démonstration. Le cas où $\chi = \chi_0$ est trivial. Soit $\chi \neq \chi_0$ un caractère de G et $y \in G$ tel que $\chi(y) \neq 1$. Il est clair que $\sigma_y : G \to G\,;\,(x \mapsto xy)$ est une permutation de G. On a ainsi :

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(\sigma_y(x)) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x),$$

d'où,

$$\big(1 - \chi(y)\big) \sum_{x \in G} \chi(x) = 0.$$

Puisque $\chi(y) \neq 1$, on peut conclure que $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$. □

Remarque. La terminologie vient du fait suivant : les caractères de G forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes sur G muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$.

Corollaire 3.2. *Si $x \in G$, alors on a la relation suivante :*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ |G| & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $\hat{G}$ au lieu de G. □

3.2 Caractères de Dirichlet

Définition. Soit $a \geq 1$ un entier, un **caractère modulo** a est un caractère du groupe $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$ des inversibles modulo a.

Par définition, les caractères modulo a sont complètement multiplicatifs et de plus on peut les prolonger par 0 à $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$:

$$\forall\, n \notin (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times,\ \chi(n) := 0.$$

On en déduit des applications arithmétiques :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\ \chi(n + a) = \chi(n).$$

i.e $\chi(n)$ ne dépend que de la classe de n modulo a.

Le **caractère de Dirichlet** associé à χ (modulo a) désigne le prolongement de χ à $\mathbb{N}_{>0}$; c'est une fonction arithmétique complètement multiplicative. Dans la suite, on notera ε_a le caractère de Dirichlet associé au caractère trivial modulo a.

Enfin, puisque tout caractère de Dirichlet (modulo a) χ vérifie $(\chi(-1))^2 = 1$, on dira que χ est **pair** si $\chi(-1) = 1$, et que χ est **impair** sinon.

Proposition 3.8. *Il y a exactement $\varphi(a)$ caractères de Dirichlet modulo a.*

Démonstration. Soit ψ un caractère de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$, le groupe des inversibles modulo a ; il est clair que ψ définit un unique caractère χ modulo a par : $\chi(n) = 0$ si $(n, a) > 1$ et $\chi(n) = \psi(r)$ où $n = aq + r$ et $(r, a) = 1$. Il y a donc autant de caractères de Dirichlet modulo a que de caractères du groupe

$(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$, dont le cardinal est $|(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times| = \varphi(a)$, d'après la proposition (3.5). □

Exemple. Pour $a = 4$, on trouve deux caractères de Dirichlet modulo 4 : le caractère trivial $\varepsilon_4 \;:\; n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et un caractère pair d'ordre 2 : $\chi_4 \;:\; n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

La proposition qui suit est fondamentale, elle montre comment « détecter » les progressions arithmétiques.

Proposition 3.9. *Si $(a,b) = 1$ et $f = \mathbf{1}_{P_{a,b}}$, alors $f = \dfrac{1}{\varphi(a)} \displaystyle\sum_{\chi \pmod a} \overline{\chi(b)}\chi$.*

Démonstration. Si $(n,a) > 1$, alors $f(n) = 0 = (\varphi(a))^{-1}\sum_\chi \overline{\chi(b)}\chi(n)$. Si $(n,a) = 1$ et $n \neq b \pmod a$, avec la notation de la proposition précédente : $\sum_\chi \overline{\chi(b)}\chi(n) = \sum_\psi \psi(nb^{-1}) = 0 = f(n)$ d'après les relations d'orthogonalité et puisque $nb^{-1} \neq 1 \pmod a$. Soit enfin $(n,a) = 1$ et $n = b \pmod a$, alors $\sum_\chi \overline{\chi(b)}\chi(n) = \sum_\chi \psi(nb^{-1}) = \varphi(a)$. Dans tous les cas on a bien $f(n) = (\varphi(a))^{-1}\sum_\chi \overline{\chi(b)}\chi(n)$. □

Définition. Soient $a \geq 1$ un entier et χ un caractère modulo a, et $d \geq 2$ un entier. Partant de χ, on peut construire un caractère de Dirichlet modulo da de la façon suivante

$$\tilde{\chi} \;:\; n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (n,da) > 1 \\ \chi(n) & \text{si } (n,da) = 1 \ (\Rightarrow (n,a) = 1) \end{cases}$$

Nous dirons alors que $\tilde{\chi}$ est **induit** par χ. Un caractère de Dirichlet χ modulo a est dit **primitif** s'il n'est induit par aucun caractère de Dirichlet modulo d, où d est un diviseur propre de a. Dans ce cas, l'entier a est alors appelé **conducteur** de χ.

Proposition 3.10. *Tout caractère de Dirichlet est induit par un unique caractère primitif.*

Dans la suite, le conducteur de χ désignera le conducteur de χ^*.

Démonstration. Nous montrons le résultat par récurrence forte sur $a \geq 1$. L'initialisation à $a = 1$ est triviale, supposons le résultat prouvé au rang $a \geq 1$ et soit χ un caractère de Dirichlet modulo $a+1$. Si χ est primitif, on a terminé, sinon χ est induit par un caractère de Dirichlet χ' modulo $d \,|\, a$, $d \neq 1, a$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à χ' ; il existe un caractère primitif χ^* qui induit χ' et donc qui induit également χ.
Pour l'unicité, il suffit de considérer $d \neq 1$ minimal pour la propriété « $d \mid a$ et χ est induit par un caractère primitif modulo d ». □

Montrons une application directe de la formule (3.9). La fonction $\Psi(x\,;a,b) := \displaystyle\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in P_{a,b}}} \Lambda(n)$ vérifie

$$\begin{aligned} \Psi(x\,;a,b) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\mathbf{1}_{P_{a,b}} \\ &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\Big(\frac{1}{\varphi(a)}\sum_\chi \overline{\chi(b)}\chi(n)\Big). \end{aligned}$$

En permutant les sommes, il vient la relation importante :

Proposition 3.11.
$$\Psi(x\,;a,b)=\frac{1}{\varphi(a)}\sum_{\chi}\overline{\chi(b)}\Big(\sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n)\Big).$$

3.3 Formulation équivalente du théorème des nombres premiers

Terminons la section en faisant écho à la promesse du théorème (2.5). Nous sommes en mesure d'énoncer un résultat équivalent au théorème des nombres premiers sous la forme (2), dont on remarquera que (1) est le cas particulier $a=2$, $b=1$.

Formulation équivalente du théorème des nombres premiers

Théorème 3.1. *L'énoncé* (2) *est équivalent à*
$$\Psi(x\,;a,b)=\frac{x}{\varphi(a)}+O(xe^{-c\sqrt{\log x}}). \tag{11}$$

Démonstration. Nous démontrons seulement la condition suffisante ; supposons que $\Psi(x\,;a,b)=\dfrac{x}{\varphi(a)}+O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$ et montrons (2).

$$\pi(x\,;a,b)=\sum_{\substack{p\le x\\ p\in P_{a,b}}}1=\sum_{\substack{p\le x\\ p\in P_{a,b}}}\frac{\log p}{\log p}=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in P_{a,b}}}\frac{\Lambda(n)}{\log n}-\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2\\ p^k\in P_{a,b}}}\frac{\log p}{\log p^k}=:\Theta(x\,;a,b)-R(x\,;a,b)$$

Les indices de la deuxième somme portent sur $p^k\le x$ *i.e* $2\le k\le\frac{\log x}{\log p}$, d'où la comparaison
$$R(x\,;a,b)\le\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ 2\le k\le\frac{\log x}{\log p}}}\log p\le\frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{\log 2}.$$

donc $R(x\,;a,b)=O(\sqrt{x}(\log x)^2)$. Pour l'autre terme, on effectue une transformation d'Abel. Notons N la partie entière de x,

$$\begin{aligned}\Theta(x\,;a,b)&=\sum_{n\le N}\frac{1}{\log n}\Big(\Psi(n\,;a,b)-\Psi(n-1\,;a,b)\Big)\\&=\frac{\Psi(N\,;a,b)}{\log N}-\sum_{2\le n\le N-1}\Psi(n\,;a,b)\Big(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\Big)\\&=\frac{\Psi(N\,;a,b)}{\log N}-\sum_{2\le n\le N-1}\Psi(n\,;a,b)\int_n^{n+1}\frac{dt}{t(\log t)^2}\\&=\frac{\Psi(N\,;a,b)}{\log N}-\sum_{2\le n\le N-1}\int_n^{n+1}\frac{\Psi(t\,;a,b)}{t(\log t)^2}\,dt\\&=\frac{\Psi(N\,;a,b)}{\log N}-\int_2^N\frac{\Psi(t\,;a,b)}{t(\log t)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Comme $\Psi(t\,;a,b)$ est constant égal à $\Psi(x\,;a,b)$ pour $N \le t \le x$, on obtient

$$\Theta(x\,;a,b) = \frac{\Psi(x\,;a,b)}{\log x} + \int_2^x \frac{\Psi(t\,;a,b)}{t(\log t)^2}\,dt.$$

Or, une intégration par parties donne

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Theta(x\,;a,b) - \frac{1}{\varphi(a)}\,\mathrm{Li}(x) &= \frac{\Psi(x\,;a,b) - x/\varphi(a)}{\log x} + \int_2^x \frac{\Psi(t;a,b) - t/\varphi(a)}{t(\log t)^2}\,dt + O(1) \\
&= O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}}{\log x} + \int_2^x \frac{t\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log t}}}{t(\log t)^2}\,dt\Big) \\
&= O\Big(\frac{x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}}{\log x} + x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}} \int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^2}\Big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la croissance de $t \mapsto t\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log t}}$, si c est suffisamment petit (il apparaitra clairement dans la suite que cela ne pose pas un problème). Comme l'intégrale de Bertrand ci-dessus est convergente, on a finalement

$$\Theta(x\,;a,b) - \frac{1}{\varphi(a)}\,\mathrm{Li}(x) = O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Grâce à l'estimation sur $R(x\,;a,b)$,

$$\pi(x\,;a,b) = \frac{1}{\varphi(a)}\,\mathrm{Li}(x) + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}).$$

$\square$

4 Fonctions L de Dirichlet

4.1 Définitions et propriétés fondamentales

Définition. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo a. On appelle fonction L de χ la série de Dirichlet définie sur Ω_1 par

$$L(s,\chi) := \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s}$$

Remarque. Cette définition a bien un sens puisque $|\chi(n)| = 0$ ou 1 donc la série converge absolument sur Ω_1. Elle y définie une fonction holomorphe d'après les résultats sur les séries de Dirichlet, et admet un développement Eulérien (χ est complètement multiplicative) :

$$\forall\, s \in \Omega_1,\ L(s,\chi) = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

Exemple. Pour ε_a le caractère trivial modulo a on trouve

$$\forall\, s \in \Omega_1,\ L(s,\varepsilon_a) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,a)=1}} n^{-s} = \prod_{p\nmid a}(1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)\prod_{p\mid a}(1-p^{-s}), \tag{12}$$

ce qui montre que $L(\varepsilon_a, s)$ et ζ ne différent que d'un nombre fini de facteurs Eulériens. Par conséquent, les propriétés analytiques de ces deux fonctions sont les mêmes, ce que l'on détaillera.

Proposition 4.1. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo a. Pour $s \in \Omega_1$, on a les formules*

$$i)\ \ \frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{n\geq 1}\mu(n)\chi(n)n^{-s} \quad ; \quad ii)\ \ -L'(s,\chi) = \sum_{n\geq 1}\log(n)\chi(n)n^{-s}$$

$$iii)\ \ -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s}$$

Démonstration. $i)$ On utilise le développement en produit Eulérien

$$\begin{aligned}\frac{1}{L(s,\chi)} = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s}) &= \prod_p (\mu(1)\chi(p)^0p^0 + \mu(p)\chi(p)^1p^{-s} \underbrace{+\mu(p^2)\chi(p)^2p^{-2s}+\cdots)}_{=0 \text{ car } \mu(p^k)=0 \text{ si } k\geq 2}\\ &= \prod_p \sum_{k\geq 1}\mu(p^k)\chi(p)^kp^{-sk}\\ &= \sum_{n\geq 1}\mu(n)\chi(n)n^{-s},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la multiplicativité de la fonction μ de Möbius et la complète multiplicativité de χ.
$ii)$ Il suffit d'appliquer la formule (9) à la série de Dirichlet $L(s,\chi)$.
$iii)$ On utilise $i)$, $ii)$ et les formules (6) et (5)

$$\begin{aligned}&-L'(s,\chi)\times\frac{1}{L(s,\chi)} = D_{(\log\cdot\chi)*(\mu\cdot\chi)}(s) = \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{d\mid n}\log(d)\chi(d)\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\chi\Big(\frac{n}{d}\Big)\Big)n^{-s}\\ &= \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{d\mid n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\log(d)\Big)\chi(n)n^{-s} = \sum_{n\geq 1}(\mu*\log)(n)\chi(n)n^{-s} = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\chi(n)n^{-s}\end{aligned}$$

$\square$

La proposition suivante montre que les caractères primitifs contiennent essentiellement toutes les informations sur les caractères, et en particulier leurs fonctions L.

Proposition 4.2. *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo a induit par le caractère primitif χ^* de conducteur $a^* \mid a$. On a la formule*

$$\forall\, s \in \Omega_1,\ \ L(s,\chi) = L(s,\chi^*) \prod_{p \,\mid\, \frac{a}{a^*}} (1 - \chi^*(p)p^{-s}).$$

Démonstration. Posons $d = \frac{a}{a^*}$. Tout comme dans l'exemple précédent

$$L(s,\chi) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,da^*)=1}} = \chi^*(n)n^{-s} = \sum_{\substack{n\geq 1\\(n,d)=1}} = \chi^*(n)n^{-s} = \prod_{p\nmid d}(1-\chi(p)^*p^{-s})^{-1} = L(s,\chi^*)\prod_{p\mid d}(1-\chi^*(p)p^{-s}).$$

$\square$

4.2 Prolongement méromorphe des fonctions L

Dans cette section nous allons établir un prolongement méromorphe des fonctions L de Dirichlet à $\mathbb{C}$. Nous faisons le choix de donner en détail les démonstrations pour le cas particulier de ζ (qui correspond à $\chi = \varepsilon_1$), le cas général suit les mêmes idées mais fait intervenir des termes supplémentaires, que nous expliciterons. Commençons par une formule importante, qui relie une fonction à sa transformée de Fourier.

4.2.1 La formule sommatoire de Poisson

Formule sommatoire de Poisson

Théorème 4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$i)\ \exists\, M > 0,\, \alpha > 1 : \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha} \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

Remarque. En particulier pour $x = 0$, on obtient la formule $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $f_n : x \mapsto f(x+2\pi n)$ et $F : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$. On montre que cette dernière est bien définie sur $\mathbb{R}$: Soit $K > 0$, pour tout $x \in [-K;K]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi|n| \geq K$, on a $|x+2\pi n| \geq 2\pi|n| - x \geq \pi|n|$. On obtient alors la majoration $|f_n(x)| = |f(x+2\pi n)| \leq \frac{M}{(1+|x+2\pi n|)^\alpha} \leq \frac{M}{(1+\pi|n|)^\alpha}$, qui définit le terme général d'une série convergente, d'après le critère de Riemann. La majoration est vérifiée pour $|n|$ suffisamment grand. Les autres termes sont uniformément bornés sur K car f est bornée sur les compacts. Ainsi, les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$

et $\sum_{n\leq -1} f_n$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Cela montre que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue, de plus c'est une fonction 2π-périodique. Calculons ses coefficients de Fourier : Soit $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-imt}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t)\Big)e^{-imt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi} f(t+2\pi n)e^{-imt}\,dt\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u)e^{-im(u-2\pi n)}\,dt\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-imu}\,du = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(m),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la convergence normale de la série définissant F pour intervertir les intégrales, et le changement de variable affine $u = t + 2\pi n$. D'après l'hypothèse $ii)$ sur f et le calcul mené, on en déduit que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty$. F est continue sur $\mathbb{R}$ et sa série de Fourier converge normalement donc $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n)e^{inx}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant, on trouve bien la relation cherchée. □

Proposition 4.3. *La fonction Thêta de Jacobi définie sur $\mathbb{R}_{>0}$ par $\theta : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Démonstration. On rappelle que si $\alpha > 0$, la transformée de Fourier de $g_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t^2}$ est $\hat{g_\alpha} : \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{-\xi^2}{4\alpha}}$ (relation qui s'obtient par exemple à l'aide de l'équation différentielle vérifiée par g_α et les propriétés de la transformée de Fourier). Fixons $x > 0$ et prenons $\alpha = \frac{x}{4\pi} > 0$, alors $\hat{g_\alpha} : \xi \mapsto \frac{2\pi}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{x}}$ et g_α vérifie les hypothèses du théorème (4.1). On applique la formule sommatoire de Poisson à g_α :

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{4\pi^2 n^2 x}{4\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi n^2}{x}},\ \text{c'est-à-dire } \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

□

4.2.2 Le cas particulier de ζ

Prolongement méromorphe de la fonction ζ à $\mathbb{C}$

Théorème 4.2. *La fonction ζ de Riemann se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ avec un pôle simple en 1, de résidu 1.*
De plus, la fonction prolongée vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(\frac{1-s}{2})}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

En posant $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, cela définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en 0 et en 1, de résidus 1. L'équation fonctionnelle se réecrit alors

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Démonstration. Soient $s \in \Omega_1$ et $n \in \mathbb{N}_{>0}$. On effectue le changement de variable $x = \frac{t}{\pi n^2}$ dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t}\, dt \\ &= (\pi n^2)^{\frac{s}{2}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx\end{aligned}$$

En sommant sur $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on obtient la formule :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}\, dx\Big)$$

On voudrait intervertir les intégrales. Si $\sigma > 1$, la formule précédente appliquée à σ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} |x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x}|\, dx\Big) = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\Big(\frac{\sigma}{2}\Big)\zeta(\sigma) < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\tilde{\theta}(x)\, dx, \tag{13}$$

où $\tilde{\theta}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ vérifie $\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{2}(\theta(x) - 1)$ et donc l'équation fonctionnelle $\tilde{\theta}(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\,\tilde{\theta}(x) + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}$. On réécrit l'équation (1) et on fait le changement de variable $y = 1/x$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\tilde{\theta}(x)\, dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\tilde{\theta}(x)\, dx \\ &= \int_1^{+\infty} y^{-\frac{s}{2}-1}\tilde{\theta}\Big(\frac{1}{y}\Big)\, dy + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\tilde{\theta}(x)\, dx \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(x)(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\, dx}_{=:I(s)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{s}{2}-1})\, dx}_{=\frac{1}{s(1-s)}}\end{aligned}$$

On montre à l'aide du théorème d'holomorphie sous l'intégrale que I est entière. D'une part, pour tout $x > 1$, $s \mapsto \tilde{\theta}(x)(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})$ est entière. On remarque aussi que $\tilde{\theta}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} \leq \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}} = O(e^{-\pi x})$, quand $x \to +\infty$. Par croissances comparées, cela montre que pour tout $s \in \mathbb{C}$, $x \mapsto \tilde{\theta}(x)(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})$ est intégrable sur $]1;+\infty[$. Si $K \subset \mathbb{C}$ est un compact, avec $\Re(K) \subset [a\,;b]$, pour tout $(x,s) \in]1\,;+\infty[\times K$, $|\tilde{\theta}(x)(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})| \leq \tilde{\theta}(x)(x^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{b}{2}-1})$ est un majorant intégrable. En vertu de ce qui précède, la fonction $s \mapsto \pi^{\frac{s}{2}}(\Gamma(\frac{s}{2}))^{-1}(I(s) + \frac{1}{s(1-s)})$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et coïncide avec ζ sur Ω_1. Par le principe du prolongement analytique, c'est l'unique prolongement méromorphe de ζ à $\mathbb{C}$ (on note encore ζ le prolongement). De plus, le terme $I(s) + \frac{1}{s(1-s)}$ est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$, ce qui fournit l'équation fonctionnelle :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = I(s) + \frac{1}{s(1-s)} = I(1-s) + \frac{1}{(1-s)s} = \pi^{-(\frac{1-s}{2})}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

On traite maintenant les singularités, pour cela on rappelle le lemme d'Abel :

Lemme 4.1 (d'Abel). *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,; +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > n_0$,*

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) = \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt + \int_{n_0}^{N} \{t\} f'(t)\,dt.$$

Appliqué à la fonction ζ, cela donne :

$$\forall s \in \Omega_1,\ \forall N \in \mathbb{N}_{>2}, \quad \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{dt}{t^s} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}.$$

Au passage, c'est une manière de prolonger ζ au demi-plan Ω_0 ; si $s \in \Omega_0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}$ converge absolument par le critère de Riemann et définit une fonction holomorphe sur Ω_0. On peut alors écrire :

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1}\Big) = \frac{s}{s-1} - \underbrace{s\int_1^{+\infty}\{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}}_{\text{holomorphe sur }\Omega_0},$$

expression qui coïncide avec ζ sur Ω_1 (dans ce cas on a bien $\lim_{N\to+\infty}\frac{N^{1-s}}{s-1} = 0$). On récupère la comparaison asymptotique qui nous intéresse pour conclure : au voisinage de 1, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$. Cela montre que 1 est un pôle simple de ζ, de résidu 1.

En se servant de l'équation fonctionnelle fraichement montrée, au voisinage de 0 :

$$\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)}_{\underset{s\to 0}{\longrightarrow}\sqrt{\pi}}\underbrace{\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)^{-1}}_{=\frac{s}{2}+o(\frac{s}{2})}\underbrace{\zeta(1-s)}_{=-\frac{1}{s}+O(1)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

La deuxième accolade est obtenue en considérant le prolongement méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, et dont 0 est un pôle simple de résidu 1. Au voisinage de 0, on a donc un développement en série de Laurent $\Gamma(s) = \frac{1}{s} + O(1)$, ce qui donne $(\Gamma(s))^{-1} = s + o(s)$.
Le prolongement de ζ n'admet donc pas de singularité en 0, ce qui achève la démonstration. ☐

4.2.3 Le cas général

Les résultats obtenus sur la fonction ζ sont vraies dans le cadre plus général des fonctions L de Dirichlet. Pour cela, il nous faut définir des fonctions dépendant des progressions arithmétiques et jouant le rôle de la fonction θ vue précedemment.

Proposition 4.4. *Pour $x > 0$, la fonction*

$$\theta(x\,; a, b) := \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\in P_{a,b}}}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(x\,; a, b) = \frac{1}{a\sqrt{x}}\sum_{\beta\,(mod\,a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2 x}\,; a, \beta\Big) e^{\frac{2i\pi b\beta}{a}}$$

Démonstration. On réécrit

$$\theta(x\,;a,b) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(ma+b)^2 x}$$

Soit $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{4\pi}(ta+2\pi b)^2 x}$ a pour transformée de Fourier $\xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4\pi}(ta+2\pi b)^2 x} e^{-it\xi}\, dt = \frac{1}{a} e^{\frac{2i\pi b\xi}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{4\pi}t^2} e^{-it(\frac{\xi}{a})}\, dt = \frac{1}{a} e^{\frac{2i\pi b\xi}{a}} \hat{g_\alpha}(\frac{\xi}{a})$, avec $\alpha = \frac{x}{4\pi}$; ce qui donne $\xi \mapsto \frac{2\pi}{a\sqrt{x}} e^{\frac{2i\pi b\xi}{a}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{xa^2}}$. D'après la formule de Poisson,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(ma+b)^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi m^2}{xa^2}} e^{\frac{2i\pi bm}{a}}$$

Or, $e^{\frac{2i\pi bm}{a}}$ ne dépend que de la classe de m modulo a. On peut grouper les termes de la somme de droite ayant même reste modulo a, on obtient la relation voulue

$$\theta(x\,;a,b) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(ma+b)^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{\beta \,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2 x}\,;a,\beta\Big) e^{\frac{2i\pi b\beta}{a}}$$

□

Définition. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo a. Notons

$$\theta(x\,;\chi) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(n) e^{-\pi n^2 y}$$

Proposition 4.5. *Si χ est primitif, alors*

$$\forall\, x > 0,\ \ \theta(x\,;\chi) = \frac{\tau(\chi)}{a\sqrt{x}}\, \theta\Big(\frac{1}{a^2 x}\,;\bar{\chi}\Big),$$

où l'on a noté $\tau(\chi) = \sum_{x\,(mod\, a)} \chi(x) e^{\frac{2i\pi x}{a}}$ la somme de Gauss associée à χ.

Démonstration. Soit $x > 0$. Comme précédemment, on somme suivant les restes modulo a. On utilise la formule de la proposition précédente sur chacun des termes

$$\begin{aligned}\theta(x\,;\chi) &= \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{b\,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(b)\theta(x\,;a,b) = \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{b\,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(b) \sum_{\beta\,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2x}\,;a,\beta\Big) e^{\frac{2i\pi b\beta}{a}} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{\beta\,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2x}\,;a,\beta\Big) \sum_{b\,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(b) e^{\frac{2i\pi b\beta}{a}} = \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{\beta\,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2x}\,;a,\beta\Big)\bar{\chi}(\beta) \sum_{b\,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(b\beta) e^{\frac{2i\pi b\beta}{a}}\end{aligned}$$

On aimerait faire un changement de variable dans la dernière somme, cela est possible si β et a sont premiers entre eux, puisque dans ce cas, $b \mapsto b\beta$ est une bijection $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. Autrement, il faut montrer un petit résultat sur les sommes de Gauss :

Lemme 4.2. *Soit χ un caractère de Dirichlet primitif modulo a. Pour tout entier $n \geq 1$ on a*

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{b\,(mod\, a)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi nb}{a}}$$

Démonstration. Le cas où n et a sont premiers entre eux est déjà traité et n'utilise pas le fait que χ soit primitif. Dans l'autre cas, $\chi(n) = 0$ et on va donc montrer que la somme est nulle. On s'inspire de la démonstration des formules d'orthogonalité sur les caractères. Soit $d = (n, a) > 1$, on écrit $n = dn_1$ et $a = da_1$ avec n_1 et a_1 premiers entre eux. On calcule

$$\sum_{b \,(\mathrm{mod}\, a)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi nb}{a}} = \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, da_1)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi n_1 b}{a_1}} = \sum_{b_1 \,(\mathrm{mod}\, a_1)} e^{\frac{2i\pi n_1 b_1}{a_1}} \underbrace{\sum_{\substack{b \,(\mathrm{mod}\, da_1) \\ b = b_1 \,(\mathrm{mod}\, a_1)}} \bar{\chi}(b)}_{=: S(b_1)}$$

Pour tout $c \in (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$ on a $S(b_1 c) = \sum_{\substack{b \,(\mathrm{mod}\, da_1) \\ b = b_1 c \,(\mathrm{mod}\, a_1)}} \bar{\chi}(b) = \chi(c) \sum_{\substack{b \,(\mathrm{mod}\, da_1) \\ b = b_1 c \,(\mathrm{mod}\, a_1)}} \bar{\chi}(bc) = \chi(c) S(b_1)$, et si de plus $c = 1 \,(\mathrm{mod}\, a_1)$ on a $S(b_1) = \chi(c) S(b_1)$, *i.e* $(1 - \chi(c)) S(b_1) = 0$. Il reste à voir qu'on peut trouver un tel c tel que $\chi(c) \neq 0$. Si ce n'était pas le cas, alors le noyau de χ contiendrait celui de la réduction de χ à $(\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z})^\times$, c'est absurde puisque χ est supposé primitif. On conclut que $S(b_1) = 0$ pour tout b_1, ce qui achève la démonstration. □

Revenons en à notre calcul de $\theta(x\,;\chi)$

$$\theta(x\,;\chi) = \frac{1}{a\sqrt{x}} \sum_{\beta \,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2 x}\,; a, \beta\Big) \bar{\chi}(\beta) \tau(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{a\sqrt{x}} \sum_{\beta \,(\mathrm{mod}\, a)} \theta\Big(\frac{1}{a^2 x}\,; a, \beta\Big) \bar{\chi}(\beta) = \frac{\tau\big(\chi)}{a\sqrt{x}} \theta\big(\frac{1}{a^2 x}\,; \bar{\chi}\big).$$

□

Remarque. La formule obtenue dans le lemme permet de calculer $|\tau(\chi)| = |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{a}$. En prenant le carré du module, $|\tau(\bar{\chi})|^2 = |\chi(n)\tau(\bar{\chi})|^2 = |\sum_{b \,(\mathrm{mod}\, a)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi nb}{a}}|^2$. En sommant sur les n modulo a, $|\tau(\chi)|^2 \varphi(a) = \sum_{n \,(\mathrm{mod}\, a)} |\sum_{b \,(\mathrm{mod}\, a)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi nb}{a}}|^2 = \sum_{n \,(\mathrm{mod}\, a)} (\sum_{b \,(\mathrm{mod}\, a)} \bar{\chi}(b) e^{\frac{2i\pi nb}{a}}) (\sum_{c \,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(c) e^{\frac{-2i\pi nc}{a}})$ $= \sum_{b,c \,(\mathrm{mod}\, a)} \chi(c) \bar{\chi}(b) \sum_{n \,(\mathrm{mod}\, a)} e^{\frac{2i\pi n(b-c)}{a}}$. Puisque la somme sur n vaut 0 si $x \neq y$ et q sinon, et d'après les relations d'othogonalité (3.7), on trouve finalement $|\tau(\chi)|^2 \varphi(a) = \varphi(a) a$, et on obtient alors $|\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{a}$.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème analogue à (4.2) pour les fonctions L de Dirichlet. Notons que le cas du caractère trivial ε_a est exceptionnel et conduit à l'apparition d'un pôle de sa fonction L (nous l'avons déjà vu pour ζ, qui est un cas particulier). Dans les autres cas, les fonctions L se prolongent en des fonctions entières.
Pour alléger les notations, on introduit

i) $\delta(\chi) = 1$ si $\chi = \varepsilon_a$ et $\delta(\chi) = 0$ sinon.
ii) $t_\chi = 0$ si χ est pair et $t_\chi = 1$ si χ est impair.
iii) $W(\chi) = \tau(\chi)/\sqrt{a}$, est de module 1 d'après la remarque qui précéde.
iv) $\varepsilon(\chi) = i^{-t_\chi} W(\chi)$, est de module 1.

À la lumière de la proposition (4.2), il suffit de considérer les fonctions L de caractères primitifs. Remarquons que le cas du caractère primitif trivial, *i.e* $a = 1$ a déjà été traité ; c'est la fonction ζ.

Prolongement des fonctions L de Dirichlet à $\mathbb{C}$

Théorème 4.3. *1) Si χ n'est pas trivial, la fonction $L(s,\chi)$ se prolonge en une fonction entière.*
Plus précisément, si χ est non trivial et primitif, la fonction définie par

$$\xi(s,\chi) = \pi^{-\frac{s+t_\chi}{2}} \Gamma\Big(\frac{s+t_\chi}{2}\Big) L(s,\chi)$$

est entière et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(s,\chi) = a^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \xi(1-s,\bar{\chi}).$$

2) Si $\chi = \varepsilon_a$ est trivial, la fonction $L(s,\chi)$ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec un pôle simple en 1, de résidu $\frac{\varphi(a)}{a}$.

Démonstration. Le point 1) se traite comme dans la démonstration de (4.2) ; par exemples pour les caractères pairs près on coupe l'intégrale à a^{-1} au lieu de 1 et on utilise l'équation fonctionnelle de $\theta(x\,;\chi)$ donnée par la proprosition (4.5). Le fait que $\chi(n) = 0$ assure que $2\sum_{n\geq 1} \chi(n) e^{-\pi n x^2} = \theta(x\,;\chi)$, c'est ce phénomène qui empêche l'apparition de pôles. Dans le cas d'un caractère impair, la fonction $\theta(x\,;\chi)$ est nulle, on utilise d'autres fonctions comme par exemple $\theta_1(x\,;\chi) = \sum_{n\in P_{a,b}} n\chi(n) e^{-\pi n^2 x}$. Pour 2), tout provient de la formule (12) et du théorème (4.2). En particulier le résidu en 1 de $L(\varepsilon_a, s) = \zeta(s)\prod_{p|a}(1-p^{-s})$ vaut $1 \times \prod_{p|a}(1-\frac{1}{p}) = \frac{\varphi(a)}{a}$. □

4.3 Première localisation des zéros

Les fonctions L de Dirichlet maintenant prolongées, une question naturelle (et importante !) qui se pose est de savoir où elles s'annulent.

Proposition 4.6. *Les fonctions L de Dirichlet ne s'annulent pas sur Ω_1.*

Démonstration. Il suffit de développer les fonctions L en produit Eulérien, et de voir qu'aucun facteur n'est nul sur Ω_1. □

La suite du mémoire est essentiellement consacrée à une chose : avoir un résultat plus fort que cette proposition. Comme nous le verrons avec la formule de Perron, une région sans zéro à gauche de 1 nous permettra de démontrer le théorème des nombres premiers, et plus la région sera grande, meilleur sera le terme d'erreur. Une application directe des équations fonctionnelles de (4.2) et de (4.3) est le théorème suivant.

Théorème 4.4 (zéros triviaux des fonctions L)**.** *Si χ est primitif et pair (resp. impair), alors $L(s,\chi)$ a des zéros en $s = -2k$, où $k \in \mathbb{N}_{>0}$ (resp. $s = -2k-1$, où $k \in \mathbb{N}$). Si de plus χ est non trivial, $L(s,\chi)$ s'annule en* 0.

Démonstration. Traitons seulement le cas des caractères pairs, les arguments sont les mêmes pour les caractères impairs.
Le cas particulier du caractère primitif trivial (*i.e* $L(s,\chi) = \zeta(s)$) doit être traité à part : avec les notations du théorème (4.2), $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ est méromorphe avec des pôles simples en $s = 0$ et

$s=1$. Puisque la fonction Γ a des pôles (simples) aux entiers négatifs, la fonction $s \mapsto \Gamma(\frac{s}{2})$ a des pôles (simples) aux entiers $-2k,\ k \in \mathbb{N}$. La fonction ξ étant holomorphe aux entiers $-2k,\ k \in \mathbb{N}_{>0}$, la fonction ζ doit s'annuler en ces points.
Pour des caractères primitifs non triviaux, le théorème (4.3) assure que $\xi(s,\chi) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})L(s,\chi)$ est entière. Puisque $s \mapsto \Gamma(\frac{s}{2})$ a des pôles (simples) aux entiers $-2k,\ k \in \mathbb{N}$, la fonction $L(s,\chi)$ doit s'annuler en ces points. □

Le fait que les fonctions L ne s'annulent pas en 1 consititue un résultat non trivial, nous y consacrons la section suivante. Il apparaîtra que la difficulté est significativement plus grande dans le cas des caractères réels. Pour traiter ce problème, nous aurons besoin de techniques de calculs de sommes, basées sur le lemme d'Abel.

4.3.1 $L(1,\chi) \neq 0$ si χ n'est pas trivial.

Proposition 4.7.

$$\prod_{\chi \pmod a} L(s,\chi) \geq 1, \quad \textit{pour } s>1.$$

Démonstration. Pour $s>1$ et comme $|\chi(p)p^{-s}|<1$,

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \pmod a} \log L(s,\chi) &= \sum_{\chi \pmod a}\sum_{p} \log\Big(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\Big) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ \chi,p}} \frac{\chi(p^n)}{np^{ns}} \\ &= \sum_{p,n\geq 1}\frac{1}{np^{ns}}\Big(\sum_{\chi \pmod a}\chi(p^n)\Big) = \varphi(a)\sum_{\substack{n\geq 1\\ p^n=1 \pmod a}}\frac{1}{np^{ns}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations d'orthogonalité (3.7). Ainsi, $\sum_\chi \log L(s,\chi) \geq 0$ et par croissance de l'exponentielle, $\prod_\chi L(s,\chi) \geq e^0 = 1$. □

Proposition 4.8. *$L(1,\chi)\neq 0$, si $\chi \neq \bar{\chi}$.*

Démonstration. Pour s proche de 1 posons

$$\zeta_a(s) := \prod_{\chi \pmod a} L(s,\chi).$$

Soit $\chi_1 \neq \varepsilon_a$ un caractère non réel (i.e $\chi_1 \neq \overline{\chi_1}$) tel que $L(1,\chi_1)=0$. Alors, $L(s,\overline{\chi_1}) = \prod_p (1-\overline{\chi_1}(p)p^{-s}) = \prod_p \overline{(1-\chi_1(p)p^{-s})} = \overline{L(s,\chi_1)}$, donc on a aussi $L(1,\overline{\chi_1})=0$. Par analycité au voisinage de 1,

$$L(s,\chi_1) = O(s-1) \ \text{ et } \ L(s,\overline{\chi_1}) = O(s-1).$$

D'autre part, le théorème (4.3) donne à la fois $L(s,\varepsilon_a) = O(\frac{1}{s-1})$ et $L(s,\chi)=O(1)$ si $\chi\neq\varepsilon_a$, au voisinage de 1. En appliquant la proposition précédente,

$$\begin{aligned}1 \leq \zeta_a(s) &= L(s,\varepsilon_a)\times L(s,\chi_1)\times L(s,\overline{\chi_1}) \times \prod_{\chi\neq \varepsilon_a,\chi_1,\overline{\chi_1}} L(s,\chi) \\ &= O\Big(\frac{1}{s-1}\Big)\times O\Big((s-1)^2\Big)\times O(1) = O(s-1),\end{aligned}$$

ce qui est absurde ! Nous avons montré que si χ est non réel, alors $L(1,\chi)\neq 0$. □

Traitons maintenant le cas plus « complexe » des caractères réels, en suivant la méthode de Gelfond et Linnik. Pour cela, nous aurons besoin du procédé de sommation de Lambert, une conséquence du théorème de Hardy :

Théorème 4.5 (de Hardy)**.** *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *une série convergente et* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions réelles, positives, bornées et vérifiant :*

$$f_n(x) \ \geq f_{n+1}(x), \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Alors,

$$\sum_{n\geq 0} a_n f \text{ est uniformément convergente sur } [0\,;1].$$

$$\text{En particulier, } x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(x) \text{ est une fonction continue sur } [0\,;1].$$

Démonstration. On utilise les mêmes arguments que pour le lemme d'Abel ; Soient $m, m' \in \mathbb{N}$, $m \leq m'$ et $x \in [0\,;1]$,

$$\sum_{n=m}^{m'} a_n f_n(x) = \sum_{n=m}^{m'-1} (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)(f_n(x) - f_{n+1}(x)) + (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m'}) f_{m'}(x).$$

D'après le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq m \geq m_0 \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| \ < \varepsilon).$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $m' > m \geq m_0$ des entiers. Notons $M = \sup_{x\in[0;1]} f_m(x) < +\infty$, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=m}^{m'} a_n f_n(x)\Big| &\leq \sum_{n=m}^{m'-1} |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n||f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m'}||f_{m'}(x)| \\
&\leq \varepsilon \sum_{n=m}^{m'-1} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| + \varepsilon |f_{m'}(x)| \\
&= \varepsilon \Big(\sum_{n=m}^{m'-1} (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \ + f_{m'}(x) \Big) \\
&\leq M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy uniforme permet de conclure. □

Corollaire 4.1 (Procédé de sommation de Lambert)**.** *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *est une série convergente, alors*

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n\geq 0} \frac{n a_n x^n}{1-x^n}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \ : \ [0\,;1] \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto \frac{1-x}{1-x^n} n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème de Hardy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction positive et bornée (puisque continue) sur $[0\,;1]$ et $f_n(1) = 1$. Pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1-x}{1-x^n} n x^n - \frac{1-x}{1-x^{n+1}} (n+1) x^{n+1} = \frac{(1-x)^2 x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} (n - x - x^2 - \cdots - x^n) \geq 0.$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <1}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <1}} \frac{1-x}{(1-x)(1+\cdots+x^{n-1})} n x^n = 1.$$

Le théorème de Hardy donne la conclusion :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <1}} \sum_{n\geq 0} f_n(x) a_n = \sum_{n\geq 0} a_n \lim_{\substack{x\to 1\\ <1}} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

□

Théorème 4.6. *Soit ε une fonction arithmétique complètement multiplicative à valeurs dans $\{-1;0;1\}$ telle que :*

$$\forall N \in \mathbb{N}_{>0},\ \Big|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon(n)\Big| \leq h \quad (h \geq 1 \text{ donné}).$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{n} \geq \frac{1}{8h}\,; \quad \text{en particulier si } \chi \neq \varepsilon_a,\ L(1,\chi) \geq \frac{1}{8\varphi(a)} \neq 0.$$

Démonstration. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) n^{-1}$ converge d'après l'hypothèse ci-dessus et le critère d'Abel. La technique ici utilisée par Gelfond et Linnik est d'encadrer sa somme L par le procédé de sommation de Lambert (4.1) que l'on rappelle ; si a_n est le terme général d'une série convergente, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{\substack{x\longrightarrow 1\\ <1}} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n x^n}{1-x^n}.$$

Dans notre cas cela donne :

$$L = \lim_{\substack{x\longrightarrow 1\\ <1}} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n) x^n}{1-x^n} =: \lim_{\substack{x\longrightarrow 1\\ <1}} f(x).$$

Posons $x = e^{-y}$, on voit que :

$$\begin{aligned} f(x) = (1-e^{-y}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n) e^{-ny}}{1-e^{-ny}} &= (1-e^{-y}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{e^{ny}-1} \\ &\sim y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{e^{ny}-1}, \quad y \underset{>0}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Il sera préférable de réécrire L comme $\lim_{y \underset{>0}{\longrightarrow} 0} F(y) := \lim_{y \underset{>0}{\longrightarrow} 0} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{e^{ny}-1}$. Nous allons montrer deux choses :

1. $F(y)$ n'est pas très petit quand $y \underset{>0}{\longrightarrow} 0$, au sens où $F(y) \geq \delta\sqrt{y}$.
2. $|L - F(y)|$ est très petit quand $y \underset{>0}{\longrightarrow} 0$, au sens où $|L - F(y)| \leq Cy$.

En particulier, cela interdira à L d'être nul.

1. Posons $F(y) = yG(y)$; on a le développement en série géométrique $\frac{1}{e^{ky}-1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lky}$,

$$G(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k) \Big(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-kly}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} \Big(\sum_{kl=n} \varepsilon(k)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny},$$

avec $b_n = \sum_{d|n} \varepsilon(d)$. En écrivant la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, les diviseurs d de n sont les $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, où $1 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, \dots, 1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Puisque ε est complètement multiplicative :

$$b_n = \sum_{\substack{1 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \\ \dots \\ 1 \leq \beta_k \leq \alpha_k}} (\varepsilon(p_1))^{\beta_1} \dots (\varepsilon(p_k))^{\beta_k} = \sum_{\beta_1=1}^{\alpha_1} (\varepsilon(p_1))^{\beta_1} \ \dots \ \sum_{\beta_k=1}^{\alpha_k} (\varepsilon(p_k))^{\beta_k} = \prod_{i=1}^{k} c_i,$$

avec $c_i = 1 + \varepsilon(p_i) + \dots + \varepsilon(p_i)^{\alpha_i}$, pour tout $1 \leq i \leq k$. Comme ε ne prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ on a $c_s \geq 0$ et par suite $b_n \geq 0$. Si n est un carré parfait, tous les α_s sont pairs donc $c_s \geq 1$ et ainsi $b_n \geq 1$.
Si on ne retient que les n qui sont des carrés parfaits : pour $y > 0$, $G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \geq \sum_{q=1}^{\infty} e^{-q^2 y}$; en comparant à une intégrale de Gauss :

$$G(y) + 1 \geq \sum_{q=0}^{\infty} e^{-q^2 y} \geq \int_0^{\infty} e^{-t^2 y}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}},$$

d'où la minoration

$$F(y) \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{y} - y.$$

2. Pour tout $y > 0$,

$$L - F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{n} - y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{e^{ny} - 1} = y \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) \Big(\frac{1}{ny} - \frac{1}{e^{ny} - 1} \Big) := y \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) \varphi(ny),$$

où $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}$, $(t > 0)$. La fonction φ se prolonge par continuité en 0 car $\varphi(t) = \frac{e^t - t - 1}{t(e^t - 1)} \sim \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$ quand $t \underset{>0}{\longrightarrow} 0$; on pose donc $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. De plus, pour tout $t > 0$, $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{e^t}{(e^t-1)^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(\operatorname{ch} t - 1)} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4 \operatorname{sh} t^2/2} \leq -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4\, t^2/2} = 0$, d'après l'inégalité $\operatorname{sh} u \geq u$, pour $u \geq 0$.
Posons $b_n = y\, \varphi(ny)$, $A_n = \varepsilon(1) + \dots + \varepsilon(n)$, pour $n \geq 1$ et $A_0 = 0$; une transformation d'Abel donne

$$L - F(y) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N.$$

Puisque $(A_n)_n$ est bornée et $(b_n)_n$ est décroissante de limite 0,

$$L - F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Ainsi,

$$|L - F(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1}) \leq h \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = h b_1 = h y \varphi(y) \leq h y \varphi(0).$$

Finalement on a la majoration

$$|L - F(y)| \leq h \frac{y}{2}.$$

On peut conclure à l'aide des deux inégalités obtenues ; plus précisément, pour $y > 0$, l'inégalité triangulaire inverse nous donne

$$L \geq F(y) - |L - F(y)| \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{y} - y\Big(1 + \frac{h}{2}\Big).$$

En posant le changement de variable $z = \sqrt{y}$, $L \geq \sup_{z>0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} z - z^2(1 + \frac{h}{2})$; une étude de fonction montre que le sup est atteint lorsque la dérivée s'annule, soit pour $z = \frac{\sqrt{\pi}}{2(h+2)}$, cela donne :

$$L \geq \frac{\pi}{4(h+2)} - \frac{\pi}{8(h+2)} = \frac{\pi}{8(h+2)} \geq \frac{\pi}{24h} \geq \frac{1}{8h}.$$

□

4.3.2 Le théorème de la progression arithmétique

Théorème de la progression arithmétique

Théorème 4.7 (de Dirichlet, 1837)**.** *Si a et b sont deux entiers premiers entre eux, la progression arithmétique $P_{a,b}$ contient une infinité de nombres premiers. Plus précisément,*

$$\sum_{p \in P_{a,b}} p^{-s} \sim \frac{1}{\varphi(a)} \log \frac{1}{s-1}, \quad \textit{quand } s \textit{ réel } \underset{>1}{\longrightarrow} 1. \tag{14}$$

Démonstration. Soit s réel > 1, la proposition (3.9) permet d'écrire

$$\sum_{p \in P_{a,b}} p^{-s} = \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, a)} \overline{\chi(b)} \Big(\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \Big) := \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, a)} \overline{\chi(b)} f_\chi(s). \tag{15}$$

Nous allons voir que $f_\chi(s)$ se comporte essentiellement comme $\log L(s,\chi)$ (cette dernière est bien définie puisque $L(s,\chi)$ ne s'annule pas sur Ω_1), plus précisément que $\log L(s,\chi) = f_\chi(s) + r_\chi(s)$, où r_χ est une fonction bornée sur Ω_1. On admet pour le moment que les hypothèses de la proposition (1.1) sont vérifiées, en prenant le logarithme dans le produit Eulérien il vient

$$\log L(s,\chi) = \sum_p - \log \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big) = \sum_p \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(p^n)}{np^{ns}} \Big) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\chi(p^n)}{np^{ns}} =: f_\chi(s) + r_\chi(s).$$

De plus, on peut majorer

$$|r_\chi(s)| \leq \sum_p \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np^{ns}} \leq \sum_p \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{ns}} = \sum_p \frac{1}{p^{2s}(1 - \frac{1}{p})} \leq \sum_p \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

En reportant dans (15) il vient

$$\sum_{p \in P_{a,b}} p^{-s} = \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, a)} \overline{\chi(b)} \Big(\log L(s,\chi) - r_\chi(s) \Big) = \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, a)} \overline{\chi(b)} \log L(s,\chi) \; + O(1),$$

au voisinage de 1. Or, si χ n'est pas trivial, nous avons vu que $L(1,\chi) \neq 0$ donc par continuité, $\log L(s,\chi)$ est bornée au voisinage de 1. Finalement quand $s \underset{>1}{\longrightarrow} 1$,

$$\sum_{p \in P_{a,b}} p^{-s} = \frac{1}{\varphi(a)} \log L(s,\varepsilon_a) + O(1) \sim \frac{1}{\varphi(a)} \log \frac{1}{s-1},$$

où l'on a utilisé le fait que $L(s,\varepsilon_a) = \zeta(s) \prod_{p|a}(1 - p^{-s})$ donc $L(s,\varepsilon_a) \sim \frac{1}{s-1}$, d'après (4.2) et comme 1 n'est pas valeur d'adhérence de ces fonctions quand s tend vers 1, l'équivalent passe au logarithme.

Il reste à justifier l'utilisation de la proposition (1.1). Soit s un complexe fixé de partie réelle $\sigma > 2$. Le nombre complexe $1-\chi(p)p^{-s}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon $p^{-\sigma}$. Or, $1-p^{-\sigma}+ip^{-\sigma}$ a un argument plus grand que tous les points de ce cercle (faire un dessin). En utilisant l'inégalité $\tan^{-1}(x) \leq x$ vraie pour tout $x \geq 0$ il vient

$$\Big|\sum_p \arg\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\Big| \leq \sum_p \tan^{-1}\left(\frac{1}{p^\sigma-1}\right) \leq \sum_p \frac{1}{p^\sigma-1} < \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\sigma} < \frac{\pi^2}{6} < \pi.$$

D'après (1.1), l'identité $\log L(s,\chi) = \sum_p \log(1-\chi(p)p^{-s})$ est vraie sur toute la demie-droite réelle $s \geq 2$. Le principe des zéros isolés appliqué à ces deux fonctions holomorphes prolonge l'égalité à Ω_1 (et en particulier pour s réel > 1). $\square$

5 Les théorèmes des nombres premiers

5.1 Les formules de Perron effectives

Première formule de Perron effective

Théorème 5.1. *Soit f une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet converge pour $\kappa > \kappa_0$. Posant $\kappa' = \max(0, \kappa_0)$, pour tous $s \in \Omega_{\kappa'}$, $T \geq 1$ et $x \geq 1$, on a la formule :*

$$M_f(x) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} D_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds \;+\; O\Big(x^\kappa \sum_{n\geq 1} \frac{|f(n)|}{n^\kappa(1+T|\log(\frac{x}{n})|)}\Big).$$

Démonstration. On commence par montrer un lemme sur la fonction h définie sur $\mathbb{R}_{>0}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Lemme 5.1. *Pour tous κ, T, T' positifs, on a :*

$$\begin{aligned} &i) \quad \Big|h(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \frac{x^s}{s}\,ds\Big| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi|\log x|}\Big(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\Big) \\ &ii) \quad \Big|h(1) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\Big| \leq \frac{2\kappa}{T+\kappa} \end{aligned}$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $x > 1$. Soient k un entier naturel assez grand et $\mathcal{R}_k$ le rectangle de sommets $\kappa - iT'$, $\kappa + iT$, $\kappa - k + T$, $\kappa - k - T'$. La fonction $s \mapsto x^s s^{-1}$ a dans $\mathcal{R}_k$ un unique pôle (simple) en 0, de résidu 1. D'après le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_k} \frac{x^s}{s}\,ds = 1 = h(x).$$

Or, on a des majorations sur les côtés haut, bas et gauche. En effet,

$$\Big|\int_{\kappa+iT}^{\kappa-k+iT} \frac{x^s}{s}\,ds\Big| = \Big|\int_0^{-k} \frac{x^{\kappa+t+iT}}{\kappa+t+iT}\,dt\Big| \leq \int_{-k}^0 \frac{x^{\kappa+t}}{T}\,dt = \frac{x^\kappa}{T}\Big[\frac{e^{t\log x}}{\log x}\Big]_{-k}^0 \leq \frac{x^\kappa}{T|\log x|}.$$

Le même calcul donne

$$\Big|\int_{\kappa-k-iT'}^{\kappa-iT'} x^s s^{-1}\,ds\Big| \leq \frac{x^\kappa}{T'|\log x|},$$

et de plus

$$\Big|\int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'} \frac{x^s}{s}\,ds\Big| = \Big|\int_T^{-T'} i\frac{x^{\kappa-k+it}}{\kappa-k+it}\,dt\Big| \leq \int_{-T'}^{T} \frac{x^{\kappa-k}}{|\kappa-k+it|}\,dt \leq \frac{x^{\kappa-k}}{k-\kappa}(T+T').$$

Ainsi,

$$\Big|h(x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \frac{x^s}{s}\,ds\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\mathcal{R}_k} \frac{x^s}{s}\,ds - \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \frac{x^s}{s}\,ds\Big| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi|\log x|}\Big(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\Big) + \frac{x^{\kappa-k}}{2\pi(k-\kappa)}(T+T').$$

En faisant tendre $k \to +\infty$, on obtient la majoration souhaitée. Pour le cas où $0 < x < 1$, le raisonnement est le même en remplaçant k par $-k$; si $\mathcal{R}'_k$ est le rectangle associé, on a $\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_k} x^s s^{-1}\,ds = 0 =$

$h(x)$ et les deux premières majorations sont identiques. Pour la troisième on obtient $\left|\int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'}\frac{x^s}{s}\,ds\right| \leq \frac{x^{\kappa+k}}{k+\kappa}(T+T')$, ce qui permet également de conclure. Enfin, il reste à traiter le cas où $x=1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\log(|\kappa+iT|e^{i\arg(\kappa+iT)})-\log(|\kappa-iT|e^{i\arg(\kappa-iT)})\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\arg(\kappa+iT)-\arg(\kappa-iT)\Big)\\ &= \frac{1}{\pi}\arg(\kappa+iT)\\ &= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\Big(\frac{T}{\kappa}\Big).\end{aligned}$$

Or, une étude de fonction montre que pour tout $y>0$ on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(y) \leq \frac{2}{1+y}.$$

En divisant par π, il vient

$$h(1)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} \leq \frac{2}{1+\frac{T}{\kappa}} = \frac{2\kappa}{T+\kappa}.$$

□

On peut maintenant montrer la formule de Perron. Il suffit pour cela de montrer qu'à $\kappa>0$ fixé on a uniformément en $y>0$ et en $T>0$ la comparaison

$$\Big|\,h(y)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\,\Big| = O\Big(\frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}\Big). \tag{16}$$

En effet, en prenant $y=\frac{x}{n}$, multipliant par $f(n)$ et en sommant sur $n\in\mathbb{N}_{>0}$, on obtient la formule annoncée. Si $T|\log y|>1$, on a en particulier $y\neq 1$ donc le point $i)$ du lemme donne $|\,h(y)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}y^s s^{-1}\,ds\,| \leq \frac{y^\kappa}{\pi T|\log y|} = O\Big(\frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}\Big)$ (car $\frac{1}{T|\log y|}\leq\frac{2}{1+T|\log y|}$ par hypothèse). Sinon, on écrit

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{y^s}{s}\,ds = y^\kappa\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} \;+\; y^\kappa\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{y^{i\Im(s)}-1}{s}\,ds.$$

La deuxième intégrale vérifie

$$\Big|\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}(y^{i\Im(s)}-1)s^{-1}\,ds\Big| \leq \int_{-T}^{T}|i(y^{it}-1)(\kappa+it)^{-1}|\,dt \ll \int_0^T|(e^{it\log y}-1)t^{-1}|\,dt \leq T|\log y| \leq 1.$$

Pour la première intégrale on a d'après $ii)$ du lemme

$$y^\kappa\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} \ll y^\kappa\Big|\frac{1}{2}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s}\Big| \ll \frac{\kappa}{T+\kappa}y^\kappa \ll y^\kappa.$$

Comme $\dfrac{1}{1+T|\log y|}\geq 2$ par hypothèse, on obtient bien

$$\Big|\,h(y)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{y^s}{s}\,ds\,\Big| \ll y^\kappa \ll \frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}.$$

Cela prouve (16) dans les deux cas. □

Deuxième formule de Perron effective

Corollaire 5.1. *Soit f une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet converge pour $\sigma > \sigma_0$. On suppose qu'il existe une fonction croissante B qui majore $|f|$ ainsi qu'un réel $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $\sigma > \sigma_0$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \ll \frac{1}{(\sigma - \sigma_0)^\alpha}.$$

Alors on a pour $x \geq 2$, $T \geq 2$, $\sigma \leq \sigma_0$ et $\kappa := \sigma_0 - \sigma + \frac{1}{\log x}$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} D_f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw \ + \ O\Big(x^{\sigma_0 - \sigma} \frac{(\log x)^\alpha}{T} + \frac{B(2x)}{x^\sigma}\Big(1 + x\frac{\log T}{T}\Big)\Big).$$

Démonstration. Posons $g(n) = f(n)n^{-s}$, de sorte que $\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^s} = M_g(x)$. La formule de Perron (5.1) appliquée à cette fonction donne

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} D_f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw \ + \ O\Big(x^\kappa \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n)|}{n^{\kappa + \sigma}(1 + T|\log(\frac{x}{n})|)}\Big).$$

Si $n \notin [\frac{1}{2}x\,;2x]$, alors $\frac{x}{n} \geq 2$ donc $\frac{1}{1+T|\log(x/n)|} \ll T^{-1}$ et la contribution de ces entiers dans la série est $\ll x^\kappa T^{-1} \sum_{n \geq 1} \frac{|f(n)|}{n^{\kappa+\sigma}}$. Par hypothèse, cette quantité est $\ll x^\kappa T^{-1}(\kappa + \sigma - \sigma_0)^{-\alpha} \ll x^{\sigma_0 - \sigma} T^{-1} (\log x)^\alpha$. (car $x^\kappa = x^{\sigma_0 - \sigma}\mathrm{e} \ll x^{\sigma_0 - \sigma}$).

Maintenant si $n \in [\frac{1}{2}x\,;2x]$, on écrit $n = N + h$, avec N l'entier le plus proche de x. On a $-\frac{x}{2} - 1 \leq h \leq x + 1$ et comme N/x est proche de 1, d'après le développement de Taylor du logarithme au voisinage de 1, $|\log(x/(N+h))| = |\log(N/x + h/x)| \gg |h|/x$. La contribution supplémentaire est

$$\begin{aligned} x^{-\sigma} \sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq 2x} \frac{|f(n)|}{n^{\kappa+\sigma}(1 + T|\log(\frac{x}{n})|)} &\ll \frac{B(2x)}{x^\sigma} \sum_{0 \leq h \leq x+1} \frac{1}{1 + \frac{Th}{x}} \\ &\ll \frac{B(2x)}{x^\sigma}\Big(1 + \sum_{1 \leq h \leq \frac{x}{T}} 1 + \sum_{\frac{x}{T} < h \leq x+1} \frac{x}{Th}\Big), \end{aligned}$$

en effet pour la dernière somme on a $h > \dfrac{x}{T}$ donc $\dfrac{Th}{x} > 1$ et $\dfrac{1}{1 + \frac{Th}{x}} \leq 2\dfrac{x}{Th}$. On estime trivialement la première somme et pour la seconde, une comparaison série-intégrale donne

$$\frac{x}{T} \sum_{\frac{x}{T} < h \leq x+1} \frac{1}{h} \ll \frac{x}{T} \log \frac{T(x+1)}{x} \ll x\frac{\log T}{T}.$$

Finalement,

$$x^{-\sigma} \sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq 2x} \frac{|f(n)|}{n^{\kappa+\sigma}(1 + T|\log(\frac{x}{n})|)} \ll \frac{B(2x)}{x^\sigma}\Big(1 + x\frac{\log T}{T}\Big).$$

En sommant les deux estimations, on trouve bien la majoration voulue. □

5.2 Zéros non triviaux des fonctions L

5.2.1 Croissance et développement en produit de Hadamard

La proposition suivante montre comment la symétrie par rapport à $s = \frac{1}{2}$ des fonctions ξ de (4.3) donne des informations sur la croissance des fonctions L dans des bandes verticales du plan complexe $A \leq \sigma \leq B$. Pour la bande $0 \leq \sigma \leq 1$ qui nous intéressera par la suite, la question est plus délicate. L'idée à retenir est que dans ces régions, les fonctions L sont à croissance polynomiale comme fonction de a et de s, et uniformément en χ.

Proposition 5.1.
i) Pour tout $\sigma > 0$,

$$|L(\sigma + it, \chi)| \leq \zeta(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma - 1}.$$

ii) Soit $A > 0$, *on a uniformément pour* $-A \leq \sigma < 0$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* χ *modulo* a,

$$|L(\sigma + it, \chi)| \ll (a(|t| + 2))^{\frac{1}{2} - \sigma}.$$

iii) Pour $0 \leq \sigma \leq 1$ *et pour tout* t *réel,* χ *modulo* a,

$$|L(\sigma + it, \chi)| \ll \frac{\delta(\chi)}{|s - 1|} + (a|t| + 2)^{\frac{1 - \sigma + \varepsilon}{2}},$$

pour tout $\varepsilon > 0$, *et où la constante dépend uniquement de* ε.

Démonstration. i) On sait que $L(s, \chi)$ converge absolument dans Ω_1 et

$$|L(s, \chi)| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma).$$

Comme ζ a un unique pôle simple en $s = 1$, on a bien $\zeta(s) \ll \frac{1}{s-1}$ dans cette région.

ii) Pour $\sigma < 0$, on va utiliser l'équation fonctionnelle de (4.3) pour se ramener dans Ω_1. Si on suppose χ primitif, en notant $\gamma(s) = \pi^{-(s+t_\chi)/2}\Gamma\Big(\frac{s+t_\chi}{2}\Big)$, le théorème donne :

$$|L(s, \chi)| = a^{\frac{1}{2} - \sigma}\Big|\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}\Big|\,|L(1 - s, \bar{\chi})| \leq a^{\frac{1}{2} - \sigma}\Big|\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}\Big|\zeta(1 - \sigma). \tag{17}$$

La formule de Stirling complexe donne, pour $-A \leq \sigma < 0$,

$$|\gamma(\sigma + it)| = \sqrt{2}\,\Big|\frac{t}{2\pi}\Big|^{\frac{\sigma + t_\chi}{2}} e^{\frac{-\pi|t|}{2}}\Big(1 + O(t^{-1})\Big) \quad \text{et} \quad |\gamma(1 - \sigma - it)| = \sqrt{2}\,\Big|\frac{t}{2\pi}\Big|^{\frac{t_\chi - \sigma}{2}} e^{\frac{-\pi|t|}{2}}\Big(1 + O(t^{-1})\Big),$$

quand $|t| \geq 1$ et où les constantes dépendent seulement de A. En prenant le quotient on trouve :

$$\Big|\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}\Big| = \Big|\frac{t}{2\pi}\Big|^{\frac{1}{2} - \sigma}\Big(1 + O(t^{-1})\Big) \ll |t|^{\frac{1}{2} - \sigma}.$$

Comme $\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}$ est borné pour $|t| \leq 1$, on a $|\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}| \ll (|t| + 2)^{\frac{1}{2} - \sigma}$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\Big|\frac{\gamma(1-s)}{\gamma(s)}\Big| \ll (|t| + 2)^{\frac{1}{2} - \sigma}.$$

En reportant dans (17) et comme ζ est bornée pour $\sigma < 0$, on obtient la comparaison annoncée. Si χ n'est pas primitif, la proposition (4.2) et ce qui précède permettent d'écrire

$$L(s,\chi) \ll (a^*(|t|+2))^{\frac{1}{2}-\sigma} \prod_{p|\frac{a}{a^*}} (1+p^{-\sigma}).$$

Or, $\prod_{p|\frac{a}{a^*}}(1+p^{-\sigma}) = \sum_{\tilde{d}} \tilde{d}^{-\sigma}$, où la somme est prise sur les diviseurs de $\frac{a}{a^*}$ sans facteurs carrés. Comme chacun de ces facteurs est plus petit que $\frac{a}{a^*}$, et que le nombre de termes est borné devant $\sqrt{\frac{a}{a^*}}$, on en déduit que $\prod_{p|\frac{a}{a^*}}(1+p^{-\sigma}) \ll \left(\frac{a}{a^*}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}$.

iii) C'est le point délicat ; on cherche à utiliser le principe de Phragmén-Lindelöf (1.3). Avec les mêmes notations, prenons $\varepsilon > 0$, $\alpha = -\varepsilon$, $\beta = 1+\varepsilon$ et par exemple $A = 2\alpha,\ B = 2\beta$. En $\beta > 1$, on se retrouve dans le cas *i*) et comme $|L(\beta+it)| \leq \zeta(\beta)$, on a $D(\beta) = 0$ et $C(\beta) = \zeta(\beta)$. En $\alpha < 0$, on retouve le cas *ii*) et plus précisément,

$$\forall\,|t|>1,\ |L(\alpha+it,\chi)| = O\Big((a(|t|+2))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big) \leq C|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big(a\Big(1+\frac{2}{|t|}\Big)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big) \leq Ca^{\frac{1}{2}+\varepsilon}|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

où C est une constante. On prend alors $D(\alpha) = \frac{1}{2}+\varepsilon$ et $C(\alpha) = Ca^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ .Il nous faut maintenant une comparaison à l'intérieur de la bande. Supposons d'abord χ primitif non trivial et pair. En reprenant la preuve de (4.3), il vient

$$\forall\,\alpha \leq \sigma \leq \beta, \quad \xi(s,\chi) \ll (1+a^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \theta(x\,;\chi)(x^{\frac{\sigma}{2}} + x^{\frac{1-\sigma}{2}})\,dx \ll 1+a^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

puisque $\theta(x\,;\chi) \ll e^{-\pi x}$ pour tout χ et tout $x \geq 1$. Ainsi,

$$|L(s,\chi)| = \pi^{\frac{\sigma}{2}}\Big|\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big|^{-1}\xi(s,\chi) \ll \pi^{\frac{\sigma}{2}}\Big|\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big|^{-1}(1+a^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

D'après la formule de Stirling complexe (1.5) :

$$L(s,\chi) = O\Big(\frac{\pi^{\frac{\sigma}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}+\varepsilon})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\frac{t}{2}|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\pi|\frac{t}{2}|}(1+O(\frac{1}{t}))}\Big) = O(e^{|s|\lambda}),$$

pour tout $\lambda > \frac{\pi}{2}$. La proposition (1.3) s'applique :

$$\forall\,\alpha \leq \sigma \leq \beta,\ \forall\,|t|>1, \quad |L(\sigma+it,\chi)| \leq (Ca^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^{l(\sigma)}\zeta(1+\varepsilon)^{1-l(\sigma)}|t|^{l(\sigma)(\frac{1}{2}+\varepsilon)} = O\Big((a|t|)^{l(\sigma)(\frac{1+2\varepsilon}{2})}\Big),$$

où $l(\sigma) = -\frac{\sigma}{1+2\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \frac{1}{1+2\varepsilon}(1+\varepsilon-\sigma)$. Avec le même raisonnement que dans *ii*) pour $|t| \geq 1$,

$$\forall\,\alpha \leq \sigma \leq \beta,\ \forall\,t \in \mathbb{R},\ |L(\sigma+it,\chi)| = O\Big((a(|t|+2))^{\frac{1-\sigma+\varepsilon}{2}}\Big).$$

Le raisonnement est le même pour les caractères imapirs. En tenant compte du fait que χ peut être trivial,

$$\forall\,\alpha \leq \sigma \leq \beta,\ \forall\,t \in \mathbb{R},\ |L(\sigma+it,\chi)| = O\Big(\frac{\delta(\chi)}{|s-1|} + (a|t|+2)^{\frac{1-\sigma+\varepsilon}{2}}\Big).$$

□

Remarque. Dans [2] (p. 149) on retrouve que ζ est à croissance polynomiale dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$. La démonstration est plus élémentaire et repose sur une sommation d'Abel.

Corollaire 5.2. *Soit χ un caractère de Dirichlet. Avec les notations du théorème (4.3),*

$$f(s) = (s(s-1))^{\delta(\chi)}\xi(s,\chi)$$

est une fonction entière d'ordre au plus 1, ne s'annulant pas en $s = 0$.

Démonstration. Il résulte des théorèmes (4.2) et (4.3) que f est entière et ne s'annule pas en $s = 0$ (un éventuel zéro de ξ en ce point apparait pour χ trivial, avec ordre -1, il est donc compensé). D'après la proposition précédente, $L(s,\chi)$ est à croissance polynomiale, et comme $s \mapsto \Gamma(s/2)^{-1}$ est d'ordre au plus 1, f est elle-même d'ordre au plus 1. □

Il est temps d'appliquer ce que l'on sait sur les fonctions entières d'ordre au plus 1.

Proposition 5.2. *Soit χ un caractère de Dirichlet primitif. La fonction $L(s,\chi)$ a une infinité de zéros $\neq 0$ dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$.*

Démonstration. Avec les notations du corollaire précédent, les zéros de f dans la bande critique sont des zéros de $L(s,\chi)$, puisque le facteur Γ ne s'annule pas dans cette bande. D'après le corollaire précédent et la proposition (1.3), il existe des constantes a et b telles que

$$\forall\, s \in \mathbb{C}, \quad f(s) = e^{a+bs} \prod_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}},$$

où (s_n) est la suite (éventuellement finie) des zéros non nuls de f comptés avec multiplicité. Par symétrie par rapport à $1/2$, et comme aucun des facteurs de f ne sont nuls pour $\sigma > 1$, les zéros de f sont tous situés dans la bande critique :

$$\forall\, s \in \mathbb{C}, \quad f(s) = e^{a+bs} \prod_{\substack{n \in \mathbb{N}_{>0} \\ 0 \leq \Re(s_n) \leq 1}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}}.$$

Si f n'avait qu'un nombre fini de zéros, alors f s'écrirait $f(s) = e^{a+b's}P(s)$, avec $b' \in \mathbb{C}$ est une constante et P une fonction polynômiale. Or, $f(\sigma) \sim \sigma^{2\delta(\chi)}\pi^{-\sigma/2}\Gamma(\sigma/2)$ quand $\sigma \to +\infty$ (on a utilisé le fait que $L(\sigma,\chi) = 1 + \sum_{n \geq 2} \chi(n) n^{\sigma} \to 1$ quand $\sigma \to +\infty$, qui s'obtient par convergence dominée). D'après la formule de Stirling (réelle) :

$$f(\sigma) \sim \sigma^{2\delta(\chi)}\pi^{-\frac{\sigma}{2}}\sqrt{\pi\sigma}\Big(\frac{\sigma}{2e}\Big)^{\sigma}, \text{ quand } \sigma \to +\infty.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre σ vers l'infini, puisque $\frac{f(\sigma)}{e^{a+b'\sigma}P(\sigma)} \to +\infty$. □

Définition. Les zéros d'une fonction L de Dirichlet situés dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$ sont appelés **zéros non triviaux**, en opposition aux zéros triviaux calculés dans (4.4).

Remarque importante. Le but du jeu maintenant est de trouver une région du plan complexe un peu à gauche de 1 où les fonctions L ne s'annulent pas. De fait, dans une telle région la fonction $L'(s,\chi)/L(s,\chi) = D_{\Lambda\chi}(s)$ est bien définie et holomorphe. Gardons à l'esprit que la fonction

sommatoire associée à cette série de Dirichlet est liée à la fonction $\Psi(x\,;a,b)$ via (3.11) et donc au théorème des nombres premiers grâce à l'équivalence (3.1). La trame est claire : des estimations sur $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ dans cette région donneront un comportement asymptotique de $\Psi(x\,;a,b)$ via la formule de Perron (5.1), et on obtiendra alors le théorème des nombres premiers.
À partir de maintenant, **nous faisons le choix de nous restreindre au cas de** ζ. Les énoncés qui vont suivre proviennent de résultats plus généraux sur les fonctions L ; nous nous contenterons de les énoncer et nous renvoyons à [1] pour les détails.

5.2.2 Région sans zéros

Avant d'aller voir ce qui se passe à gauche de 1, on commence par montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur la droite verticale $\sigma = 1$. Cela résulte d'une inégalité pour le moins surprenante, dûe à de La Vallée-Poussin.

Théorème 5.2 (de La Vallée-Poussin)**.** *Soit f une fonction arithmétique à valeurs positives, dont la série de Dirichlet converge pour $\sigma > \sigma_0$. Alors,*

$$\forall\, s \in \Omega_{\sigma_0}, \quad 3D_f(\sigma) + 4\Re(D_f(\sigma+it)) + \Re(D_f(\sigma+2it)) \geq 0.$$

Démonstration. Soient $s \in \Omega_{\sigma_0}$ et $n \geq 1$, alors

$$\frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(n)}{n^\sigma(\cos(t\log n) + i\sin(t\log n))} = \frac{f(n)}{n^\sigma}\Big(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n)\Big).$$

Ainsi,

$$3D_f(\sigma) + 4\Re(D_f(\sigma+it)) + \Re(D_f(\sigma+2it)) = \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^\sigma}V(t\log n),$$

où $V(\theta) := 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta$ définie pour $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie $V(\theta) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0$, ce qui permet de conclure. ☐

Non annulation de $\zeta(1+it)$.

Corollaire 5.3. *La fonction ζ de Riemann ne s'annule pas sur la droite verticale $\sigma = 1$.*

Démonstration. Soit $s \in \Omega_1$, d'après la formule du produit Eulérien,

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{p^{-ks}}{k} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s}.$$

En appliquant l'inégalité de de La Vallée-Poussin à cette série de Dirichlet qui converge pour $\sigma > 1$ et en prenant l'exponentielle, on obtient

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1. \tag{18}$$

Supposons alors que ζ ait un zéro en $s = 1 + it_0$, avec $t_0 \neq 0$. Par continuité de ζ en s, on a $\zeta(\sigma+it_0) \ll \sigma - 1$ dans un voisinage de s inclus dans Ω_1. D'autre part pour $\sigma > 1$, $\zeta(\sigma) \ll (\sigma-1)^{-1}$ (ζ a un pôle simple en 1) et $\zeta(\sigma+2it_0) \ll 1$ (ζ est holomorphe en ce point). Il vient

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it_0)|^4|\zeta(\sigma+2it_0)| \ll \sigma - 1, \text{ pour } \sigma > 1.$$

Cela contredit l'équation (18) lorsque $\sigma \underset{>1}{\longrightarrow} 1$. $\square$

Nous savions déjà grâce au produit Eulérien que ζ ne s'annulait pas pour $\sigma > 1$, on vient de voir que c'est encore vrai sur le demi-plan fermé. Dans le théorème suivant, nous construisons une région plus grande, un peu à gauche de zéro, où ζ ne s'annule pas (*c.f* Fig. 1).

Région sans zéro de ζ.

Théorème 5.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que ζ ne possède aucun zéro dans la région du plan complexe définie par l'inégalité*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(2+|t|)}.$$

Démonstration. D'après la proposition (4.1), la série de Dirichlet $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$ converge pour $s \in \Omega_1$. Comme c'est une série à coefficients positifs, on peut lui appliquer l'inégalité de de La Vallée-Poussin ; pour tous $\sigma > 1$ et t réel,

$$-3\,\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\,\Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\Big) - \Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\Big) \geq 0. \tag{19}$$

D'une part,

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1).$$

D'autre part la fonction f du corollaire (5.2) se développe en produit de Hadamard ; il existe des constantes a et b' telles que

$$\forall\, s \in \mathbb{C}, \quad s(s-1)\xi(s) = e^{a+b's} \prod_{n\in\mathbb{N}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}},$$

où $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des zéros non triviaux de la fonction ζ. Par définition de ξ,

$$\forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)}\, e^{a+b's}\, \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)^{-1} \prod_{n\in\mathbb{N}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}} = \frac{e^{a+bs}}{2(s-1)} \Gamma\Big(\frac{s}{2} + 1\Big)^{-1} \prod_{n\in\mathbb{N}} \Big(1 - \frac{s}{s_n}\Big) e^{\frac{s}{s_n}},$$

avec la constante $b = b' + \frac{\log \pi}{2}$. Si s n'est pas un pôle ni un zéro de ζ, l'opposé de la dérivée logarithmique de ζ (*c.f.* (1.3)) est

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -b + \frac{1}{s-1} + \frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{2\Gamma(\frac{s}{2}+1)} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s - s_n}\Big). \tag{20}$$

Le terme relatif à Γ vaut $\log|s| + O(s^{-1})$, d'après (1.6). Si $\sigma > 1$, alors s_n et $s - s_n$ sont de parties réelles positives donc la partie réelle de la série est positive. Pour $0 \leq \sigma \leq 2$ et $|t| \geq 2$ il vient alors

$$-\Re\Big(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big) \leq -b + \Re\Big(\frac{1}{s-1}\Big) + \log|s| + O(s^{-1}) = O(\log|t|).$$

Si l'on prend en considération un zéro de la bande critique $s_n = \sigma_n + it_n$, un pôle simple apparaît dans la série et on obtient, toujours pour $0 \leq \sigma \leq 2$,

$$-\Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+it_n)}{\zeta(\sigma+it_n)}\Big) \leq O(\log|t_n|) - \Re\Big(\frac{1}{s - s_n}\Big).$$

En reportant ces deux estimations dans (19) on trouve (ici $t = t_n$)

$$\frac{3}{\sigma-1} + O(1) + O(\log|t|) - \frac{4}{\sigma-\sigma_n} \geq -3\,\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\,\Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\Big) \underbrace{-\,\Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\Big)}_{\leq 0 \text{ par positivité de } \Lambda} \geq 0.$$

On en déduit l'existence d'une constante $c_1 \geq 0$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\sigma_n} > -c_1\log|t| &\iff \frac{1}{4}(\sigma-\sigma_n) > \frac{1}{c_1\log|t| + \frac{3}{\sigma-1}}\\ &\iff 1-\sigma_n > \frac{1-(\sigma-1)c_1\log|t|}{c_1\log|t| + \frac{3}{\sigma-1}}.\end{aligned}$$

En prenant $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_1\log|t|}$, il vient

$$1-\sigma_n > \frac{c_2}{\log|t|} \text{ donc } \sigma_n < 1 - \frac{c_2}{\log|t|},$$

avec $c_2 = \frac{1}{14c_1} \geq 0$; cela implique le résultat annoncé si $|t| \geq 2$. Quitte à réduire la constante c_2, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_n < 1 - \frac{c_2}{\log(2+|t_n|)}$, ce qui achève la démonstration. □

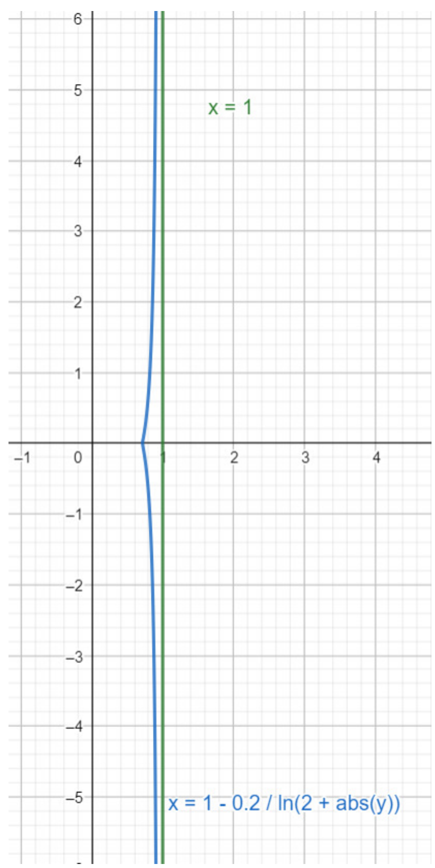

Fig. 1

Dans le cas d'une fonction L de Dirichlet, la région que nous venons de voir peut, pour au plus un caractère modulo a, contenir un zéro de L. Plus précisément :

Région sans zéro des fonctions L.

Théorème 5.4. *Il existe une constante $c > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $a \geq 1$, il existe au plus un caractère χ modulo a tel que $L(s, \chi)$ ait un zéro dans la région*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log a(|t| + 2)}.$$

*Le caractère exceptionnel, s'il existe, est un caractère réel primitif χ_e et $L(s, \chi_e)$ a un unique zéro σ_e dans cette région. De plus, σ_e est **réel** et c'est un pôle simple de L'/L, de résidu -1.*

Démonstration. On pourra consulter [1] (p.65-77). □

5.3 Les théorèmes

5.3.1 Le théorème des nombres premiers

Majoration de ζ'/ζ.

Théorème 5.5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait pour $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log |t|+2}$,*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \frac{1}{|s-1|} + \log(|t| + 2).$$

Démonstration. D'après le théorème (19), il existe une constante $c > 0$ telle que tout zéro non trivial $s_n = \sigma_n + it_n$ de ζ satisfasse à

$$\sigma_n < 1 - \frac{8c}{\log(|t_n| + 2)}.$$

Quitte à réduire la région sans zéro, nous pouvons supposer que $0 < c < \frac{1}{16}$. Montrons que cela implique pour tous $t \geq 3$ et $\sigma \geq 1 - \frac{4c}{\log t} > \frac{3}{4}$,

$$\min_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \Re\left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s - s_n}\right) \geq 0 \tag{21}$$

Lorsque $|s - s_n| > \frac{1}{2}|s_n|$, en posant $\theta := \frac{2|s-s_n|}{|s_n|} \geq 1$ il vient pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\begin{aligned}
\Re\left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s - s_n}\right) &= \frac{\sigma_n}{|s_n|^2} + \frac{\sigma - \sigma_n}{|\sigma - \sigma_n|^2} \\
&= \frac{1}{|\sigma - \sigma_n|^2}\left(\frac{\sigma_n \theta^2}{4} + \sigma - \sigma_n\right) \\
&\geq \frac{1}{|\sigma - \sigma_n|^2}\left(\sigma - \frac{3}{4}\sigma_n\right) \\
&\geq \frac{1}{|\sigma - \sigma_n|^2}\left(\sigma - \frac{3}{4}\right) > 0,
\end{aligned}$$

car $\sigma_n \leq 1$ et $\sigma > \frac{3}{4}$. Cela montre (21) dans ce cas. Maintenant si $|s - s_n| \leq \frac{1}{2}|s_n|$, on a $|t - t_n|^2 \leq \frac{1}{4}|s_n|^2 = \frac{1}{4}(\sigma_n^2 + t_n^2) \leq \frac{1}{4}(1 + |t_n|)^2$, donc $|t - t_n| \leq \frac{1}{2}(|t_n| + 1)$ et avec l'inégalité triangulaire, $|t_n| \leq 2t + 2$.

Ensuite, comme $t \geq 3$, on a $(t-1)^2 \geq 3$ donc $t^2 \geq 2t+4$ et $2\log t \geq \log(2t+4)$ d'où

$$\sigma_n < 1 - \frac{8c}{\log(|t_n|+2)} < 1 - \frac{8c}{\log(2t+4)} \leq 1 - \frac{4c}{\log t} \leq \sigma.$$

Cela montre que $\Re\Big(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s-s_n}\Big) = \frac{\sigma_n}{|s_n|^2} + \frac{\sigma-\sigma_n}{|\sigma-\sigma_n|^2}$ est positif, et prouve (21) dans le second cas. En utilisant cela dans (20), on trouve pour $|t| \geq 4$ et $\sigma \geq 1 - \frac{4c}{\log t}$

$$-\Re\Big(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big) \leq K \log t,$$

avec K une constante absolue. Nous allons vérifier les hypothèses du lemme de Borel-Carathéorody (1.4) sur un cercle convenable. Quitte à prendre une constante plus grande par la suite, on peut chercher à établir l'inégalité $|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| \leq K \log t$ avec $s = \sigma + it$ fixé, où $t \geq 5$ et $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t}$. Posons $\eta = \frac{c}{\log t}$ et soit $s_0 = 1 + \eta + it$. Alors pour tout ω de module 4η, le complexe $s_0 + \omega =: \sigma' + it'$ vérifie $t' \geq t - \frac{4c}{\log t} \geq 5 - \frac{4c}{\log 5} \geq 4$, car $0 < c < \frac{1}{16}$ et aussi $\sigma' \geq 1 - \frac{4c}{\log t'}$. En appliquant l'inégalité précédente,

$$-\Re\Big(\frac{\zeta'(s_0+\omega)}{\zeta(s_0+\omega)}\Big) \leq 2K \log t.$$

La fonction définie par

$$f(\omega) := \frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} - \frac{\zeta'(s_0+\omega)}{\zeta(s_0+\omega)}$$

est bien définie et est holomorphe sur le disque $\overline{D(0,4\eta)}$. Avec les notations du lemme de Borel-Carathéodory (1.4) (ici $f(0)=0$) on a $A(4\eta) = 2K\log t + |\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}|$ et comme $|s - s_0| = \eta + 1 - \sigma \leq 2\eta$,

$$|f(s)| \leq \frac{2 \times 2\eta}{4\eta - 2\eta}\Big(2K\log t + \Big|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\Big|\Big), \text{ donc } \Big|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big| \leq 4K\log t + 3\Big|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\Big|.$$

Pour le terme de droite, on a $|\zeta'(s_0)/\zeta(s_0)| \leq \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)n^{-1-\eta} = \eta^{-1} + O(1) \ll \log t$. On obtient bien la majoration annoncée. □

Remarque. Comme $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log|t|}$, la majoration du théorème précédent se reformule en

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le théorème des nombres premiers, sous la forme (1).

Le théorème des nombres premiers

Théorème 5.6 (Hadamard - de La Vallée Poussin, 1896)**.** *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $x \to +\infty$,*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big).$$

Démonstration. D'après (3.1), il est équivalent de montrer que $\Psi(x) = x + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log c}}\Big)$. Puisque $\Lambda(n) \leq \log n$ et $|\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)| \ll 1/(\sigma-1)$ pour $\sigma > 1$, la seconde formule de Perron (5.1) appliquée à D_Λ avec $s=0$ et $\sigma_0=1$ donne, pour tous $x\geq 2$, $T\geq 2$,

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\frac{x^w}{w}\,dw \;+\; \underbrace{O\Big(x\frac{\log x}{T}+\log 2x\Big(1+x\frac{\log T}{T}\Big)\Big)}_{=O\left(\log x\left(1+\frac{x\log T}{T}\right)\right)},$$

avec $\kappa = 1+\frac{1}{\log x}$ (on a ainsi $|\zeta'(w)/\zeta(w)|\ll \log x$ sur la droite verticale d'intégration). D'après le théorème (5.3), il existe une constante positive c_0 telle que la seule singularité de l'intégrande dans le rectangle $\mathcal{R}$ défini par $|t|\leq T$ et $1-\frac{c_0}{\log T}\leq\sigma\leq\kappa$, soit en $w=1$. Ce résidu vaut x et d'après le théorème des résidus,

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\frac{x^w}{w}\,dw = x-\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{G}}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\frac{x^w}{w}\,dw,$$

où $\mathcal{G}$ est la ligne brisée obtenue en enlevant à $\mathcal{R}$ le côté droit. La majoration $|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}|\ll\log T$ du théorème (5.5) est vraie pour tout $s\in\mathcal{G}$. On en déduit des majorations sur les contributions des segments horizontaux, par exemple pour le segment du haut :

$$\int_{1-\frac{c_0}{\log T}+iT}^{\kappa+iT}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\frac{x^w}{w}\,dw \ll \log T\int_{1-\frac{c_0}{\log T}}^{\kappa}\left|\frac{x^{u+iT}}{u+iT}\right|du \ll \frac{\log T}{T}\int_{1-\frac{c_0}{\log T}}^{\kappa}x^u\,du \ll x^\kappa\frac{\log T}{T}\ll x\frac{\log T}{T}.$$

La majoration est identique sur le segment du bas ; elles sont absorbées dans le $O\Big(\log x\Big(1+x\frac{\log T}{T}\Big)\Big)$. Pour le segment de gauche,

$$\begin{aligned}\int_{1-\frac{c_0}{\log T}-iT}^{1-\frac{c_0}{\log T}+iT}\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\frac{x^w}{w}\,dw &\ll (\log T)x^{1-\frac{c_0}{\log T}}\int_1^T\frac{du}{u}\\ &= x\exp\Big(-c_0\frac{\log x}{\log T}\Big)(\log T)^2\end{aligned}$$

En prenant $T=\mathrm{e}^{\sqrt{c_0\log x}}$, on trouve un ordre de grandeur

$$O\Big((x\log x)\mathrm{e}^{-\sqrt{c_0\log x}}\Big) = O\Big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\Big),$$

pour toute constante $c<\sqrt{c_0}$. Comme ici $O\Big(\log x\Big(1+x\frac{\log T}{T}\Big)\Big) = O\Big(\log x\Big(1+x\frac{\sqrt{c_0\log x}}{\exp(\sqrt{c_0\log x})}\Big)\Big)$ et pour tout $c<\sqrt{c_0}$,

$$\log x\Big(1+x\frac{\sqrt{c_0\log x}}{\exp(\sqrt{c_0\log x})}\Big)\times\frac{\exp(c\sqrt{\log x})}{x} = y\exp(c\sqrt{y}-y)+\sqrt{c_0y}\exp\Big((c-\sqrt{c_0})\sqrt{y}\Big)$$

tend vers 0 quand $y=\log x$ tend vers l'infini. Finalement, l'intégrale sur $\mathcal{G}$ est de l'ordre annoncé, ce qui achève la démonstration du théorème des nombres premiers ! □

5.3.2 Le théorème des nombres premiers en progression arithmétique

Majoration de L'/L.

Théorème 5.7. *Il existe une constante $c>0$ telle que l'on ait pour $\sigma\geq 1-\frac{c}{\log(a|t|+2)}$*

$$\frac{L'(s)}{L(s)}\ll\frac{\delta(\chi)}{|s-1|}+\frac{1}{|s-\sigma_e|}+(\log(|t|+2))^2.$$

Démonstration. On pourra se référer à [1] (p.65-77). $\square$

Le théorème des nombres premiers en progression arithmétique

Théorème 5.8 (de La Vallée-Poussin, 1900)**.** *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $x \to +\infty$,*

$$\pi(x\,; a, b) = \frac{1}{\varphi(a)} \operatorname{Li}(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle du théorème du théorème des nombres premiers, à cela près qu'il ne faut pas passer trop près du zéro exceptionnel. Nous déplaçons le rectangle $\mathcal{R}$ (voir Fig. 3) pour intégrer suffisament à droite de l'éventuel zéro (par exemple à distance plus grande que $\frac{1}{\log x}$ pour avoir la majoration $L'(s,\chi)/L(s,\chi) \ll \log x + (\log(|t|+2))^2$ sur tout le rectangle), cela est possible en prenant T suffisamment grand, et car ici a est fixé (il se trouve que lorsque a tend vers l'infini, les zéros exceptionnels tendraient vers 1 ! Voir [1] (p.79) pour obtenir une formule où le zéro intervient). D'après (3.11) et la seconde formule de Perron,

$$\Psi(x; a, b) = -\frac{1}{\varphi(a)} \frac{1}{2i\pi} \sum_{\chi} \overline{\chi(b)} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{L'(w,\chi)}{L(w,\chi)} \frac{x^w}{w}\, dw + O\Big(\log x \Big(1 + \frac{x \log T}{T}\Big)\Big).$$

Le théorème des résidus donne (le seul pôle est donc en 1, lorsque χ est trivial)

$$-\frac{1}{\varphi(a)} \frac{1}{2i\pi} \sum_{\chi} \overline{\chi(b)} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{L'(w,\chi)}{L(w,\chi)} \frac{x^w}{w}\, dw = \frac{x}{\varphi(a)} - \frac{1}{\varphi(a)} \frac{1}{2i\pi} \sum_{\chi} \overline{\chi(b)} \int_{\mathcal{G}} \frac{L'(w,\chi)}{L(w,\chi)} \frac{x^w}{w}\, dw.$$

On peut ensuite majorer chacune des intégrales du membre de droite grâce à la majoration $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \ll \log x + (\log(|t|+2))^2$. En choisissant $T = \mathrm{e}^{\sqrt{c \log x}}$ (x est pris suffisamment grand), on obtient ainsi

$$\Psi(x; a, b) = \frac{x}{\varphi(a)} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

$\square$

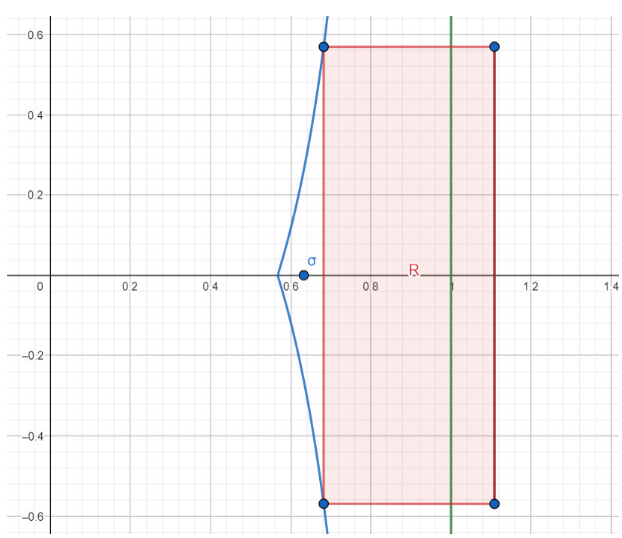

Fig. 3

5.3.3 Discussion sur l'Hypothèse de Riemann

Notons $A = \{\xi \in \mathbb{R} \,|\, \Psi(x) = x + O(x^\xi)\}$, c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le plus petit terme d'erreur que l'on puisse espérer est donné par l'inf de cet ensemble. Le théorème suivant fait le lien avec la distribution des zéros de la fonction ζ dans la bande critique.

Théorème 5.9. *Si α désigne la borne inf de A, on a l'identité*

$$\alpha = \sup_s \sigma,$$

où le sup est pris sur l'ensemble des zéros non triviaux $s = \sigma + it$ de ζ.

Démonstration. Pour $\sigma > 1$, une transformation d'Abel donne

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \Lambda(1) + s\int_1^{+\infty} \Psi(t) t^{-s-1}\, dt = s\int_1^{+\infty} \Psi(t) t^{-s-1}\, dt.$$

Posons $R(x) := \Psi(x) - x$, alors

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{+\infty} (R(t)+t) t^{-s-1}\, dt = \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_1^{+\infty} R(t) t^{-s-1}\, dt.$$

Par définition de α, on a $R(t) \ll_\varepsilon t^{\alpha+\varepsilon}$ donc l'intégrale ci-dessus est convergente dès que $\sigma > \alpha+\varepsilon$, par le critère de Riemann. D'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, la relation précédente définit un prolongement méromorphe de ζ'/ζ sur Ω_α, avec une unique singularité en $s = 1$. En particulier, cela implique que ζ n'a pas de zéro pour $\sigma > \alpha$; cela prouve l'inégalité $\sup_s \sigma \leq \alpha$. La réciproque est plus difficile et nécessite d'étendre la majoration de ζ'/ζ puis d'appliquer la seconde formule de Perron, on renvoie à [2] (p.175) pour les détails. □

Nous terminons ce document par un corollaire découlant immédiatement du théorème précédent.

Terme reste et Hypothèse de Riemann.

Corollaire 5.4. *L'Hypothèse de Riemann est équivalente à*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \Psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

qui est équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Références

[1] E. Kowalski, *Un cours de théorie analytique des nombres*, Cours Spécialisés collection SMF, 2004.

[2] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés collection SMF, 1995.

[3] A. Alaoui, H. Quéffelec, C. Sacré, V. Vassallo, *Quelques aspects des mathématiques actuelles,* Ellipses, 1998.

[4] E.C Titschmarsh, *Theory of functions*, 2nd edition, Oxford university press, 1939.

[5] J-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, puf, 1970.

[6] G. H. Hardy, *Theorems connected with Abel's theorem on power series,* 1906.

[7] E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[8] A. Bailleul, *Produits infinis*, PDF disponible en ligne.
`http://abailleul.perso.math.cnrs.fr/Notes/Produits%20infinis.pdf`

[9] F. De Marçay, *Analyse complexe*, PDF disponible en ligne.
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~merker/Enseignement/Analyse-Complexe/analyse-complexe-pdflatex.pdf`