# TP : Outils de simulation

May 10, 2016

# Chapter 1

# Initialisation Scilab

## Calculatrice matricielle

**Exercice 1. Système Unix** Créer sous Unix un répertoire de travail `outil_simulation` dans votre home répertoire. Créer un sous répertoire TP1. Savoir se déplacer dans l'arborescence. Savoir utiliser les commandes `ls, pwd, cd, mkdir` etc.

**Exercice 2. Protection des données** Protéger votre répectoire avec la commande unix `chmod`.

**Exercice 3. Lancement scilab** Lancer l'application Scilab. Savoir se déplacer dans l'arborescence sous Scilab. Connaitre la notion du répertoire courant.

**Exercice 4. Matrice, vecteur** Soit $A = [1, 2, 0; 4, 5, 6; 7, 8, 9]$; $V = [1; 2; 3]$, calculer $A^{-1}$, $A \times V$, $A + 0.2 * A$, diagonal de $A$, valeur propre de $A$. La matrice $B$ telle $B(i, j) = A(i, j) * A(i, j)$. La matrice $C$ telle que $C = AA'$.

**Exercice 5. Editeur Scilab** Savoir éditer un programme Scilab : Ecrire les codes de l'exercice précédent dans un fichier, et executer ce programme.

**Exercice 6. help** Savoir utiliser l'aide de Scilab.

**Exercice 7.** Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = & 3 \\ x_1 + 4x_3 + 5x_4 & = & -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

**Exercice 8.** Soit `=[1.23, %pi, %e]; b = [1+2*3/4, 5^3, 6e-7];`, comment construire la matrice `A = [1.23, %pi, %e; 1+2` à l'aide du vecteur `a,b`?, comment construire le vecteur `c = [1.23, %pi, %e 1+2*3/4, 5^3, 6e-7]`?

**Exercice 9. progressions arithmétiques**

1. Construire un tableau `pa1` d'une progressions arithmétiques de 1 à 12.
2. Construire un tableau `pa2` d'une progressions arithmétiques de 1 à 12, à raison de 2.
3. Construire un tableau `pa3` d'une progressions arithmétiques de 6 à 1. à raison -1.
4. Construire un tableau `pa4` d'une progressions arithmétiques de -5 à 5. à raison 0.1

**Exercice 10. progressions arithmétiques 2** Refaire exercice précédent avec la fonction `linspace`.

**Exercice 11. Matrices Speciales**

1. Définir une matrice identité $4 \times 4$.
2. Une matrice nulle $2 \times 3$

3. Une matrice $3 \times 4$ rempli de 1.
4. Une matrice $3 \times 4$ rempli de nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

**Exercice 12. Extraction d'un vecteur ou d'une matrice** Comment extraire de l'indice 2 à 8 d'un vecteur de $1 \times 10$. Comment extraire la troisième colonne une matrice $4 \times 5$?

**Exercice 13. Fonction agissant sur des matrices** La plupart des fonctions mathématiques de Scilab agissent naturellement termes à termes, sur les matrices. (`sqrt, exp, sin, tan, log`). Faire quelques expériences.

**Exercice 14. Taille d'une matrice** Utiliser la function `size`, `length` pour connaitre la taille d'un vecteur, d'une matrice. Soit `a=rand(3,4);`, Comment retrouver le nombre de ligne et le nombre de colonne de la matrice a.

**Exercice 15. sum, cumsum, prod, cumprod** Soit $a = rand(1, 10)$, calculer la somme de a. Calculer les sommes cumulés de a. Avec la fonction `prod` calculer 10! avec `cumprod`, calculer les factoriels de 1, 2, ..., 10;

# Calculatrice graphique

**Exercice 16.** Soit $t = 0 : \pi/20 : 2\pi$, tracer le graphe de $\sin(t)$ et celui de $\exp(sin(t))$. superposer les deux graphiques, et ajouter légende, ajouter titre, ajouter xlabel et ylabel

**Exercice 17. Refroidissement d'un corps** A l'instant $t = 0$, on plonge un corps de température $Q_0$ (température initiale) dans un milieu de température $Q_{\text{as}}$ (température asymptotique). Supposons que la température du milieu demeure constante (par exemple, une tasse de café dans une salle à manger). Comment la température du corps $Q(t)$ va-t-elle évoluer de $Q_0$ vers $Q_{\text{as}}$ ? Avec Newton, admettons que la variation de température est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle du milieu.

1. Etablir l'équation differentielle que satisfait $Q(t)$.
2. Sachant que, dans une pièce à $20^0$C, une tasse de café passe de $70^0$C $40^0$C en 8 minutes,
   (a) Calculer $k$.
   (b) calculez le temps nécessaire pour que le café passe de $70^0$C à $20^0$C;
3. Sachant que $Q_0 = 70$, résoudre le probleme de Cauchy et tracer la fonction $Q(t)$.

**Exercice 18. les options plot2d et plot** Dans cet exercice on va utiliser les quelques options indipensable de la fonction `plot2d`.

1. Soit `X=linspace(-2,2,101)` un vecteur de ligne. Tracer la fonction `exp(-X.^2)` sans aucune option.
2. Tracer `exp(-X.^2)` avec different coulours.
3. Tracer `exp(-X.^2)` avec marker `plot2d(X,exp(-X.^2),-3)`.
4. Tracer `exp(-X.^2)` en ajoutant une legende.
5. Tracer `exp(-X.^2)` en ajoutant un titre.
6. Tracer `exp(-X.^2)` avec `plot` avec option LineWidth.

**Exercice 19. Graphique 3D avec concour2d, surf** On defini deux vecteurs `X=linspace(-3,1,101)`, `Y=linspace(-2,2,51)`,

1. Construire une grille de coordonnee (X,Y) à l'aide de `meshgrid`
2. Soit `Z=exp(-x.^2)*exp(-y.^2)`
3. Tracer la surface Z avec `contour2d` et `surf`.

**Exercice 20.** On défini une fonction à valeur dans $R^2$ avec `[X,Y]=meshgrid(-8:0.5:8); R = sqrt(X.^2+Y.^2); Z=sin(R)/R`, tracer $Z$ avec la fonction `mesh`., tracer $Z$ avec la fonction `surf`

**Exercice 21. plot fonction animee avec comet** tracer la `exp(-X.^2)` avec comet.

**Exercice 22. tracer un cercle**. On peut définir un cercle par une courbe parametré : $r = 2, t \in [0, 2\pi]$ , $x = 2\cos(t), y = 2\sin(t)$. Tracer ce cercle avec `plot2d`, tracer le avec `comet`.

**Exercice 23.** **tracer une spirale** On peut définir une spirale par une courbe parametré $r \in [0:2], x = r\cos(t), y = r * \sin(t)$. tracer la spirale avec `plot2d` et `comet`;

**Exercice 24.** **objets graphiques 1** Pour l'instant, chaque tracé graphique a été fait dans une seule fenêtre. Il est possible d'ouvrir différentes fenêtres graphiqes, définir différents repères das une même figure.

1. Suppression de toutes les fenetres graphques avec la fonction `xdel(winsid(1))`;
2. Créer une fenetre graphique avec `scf` et tracer une courbe $\sin(t)$ par example.
3. Créer un deuxième fenetre graphique avec `scf` et tracer une deuxième courbe $\cos(t)$.
4. connaitre la notion de la fenetre courant.
5. Detruire la premiere fenetre mais pas la deuxieme.

xclick();

**Exercice 25.** **objets graphiques 2** On peut aussi manipuler les objets graphiques

1. Définir une fenetre par une declaration $f = scf(1)$, et modifier les propriété de la fenetre.
   (a) Déplacer vers la droite de 100 pixels.
   (b) change sa taille a [500, 500]
   (c) changer le titre

**Exercice 26.** **impression et sauvegarder les graphiques** Savoir sauvergarder un graphqie, savoir exporter un graphique.

## Entré et sortie

**Exercice 27.** **Entre et sortie standart** Savoir utiliser la fonction `input`. Savoir utiliser emulator C languange function `printf`

1. à l'aide de `input` entree une valeur (10) à la variable n;
2. imprimer en sorti standart la valeur de n à l'aide `disp`.
3. imprimer en sorti standart la valeur de n à l'aide `printf`.

**Exercice 28.** **Entre et sortie par disque dur** Savoir utiliser la fonction `save` et `load`.

1. Ouvrir une session scilab et creer plusieurs variables. Par exemple, `A=rand(100,100), B=linspace(-2,2,10)`.
2. Savegarder sur disque dur tous les variables crées pendant cette session, et quitter scilab (ou détruir les variables) , re ouvrir une session Scilab et récuperer tous les variables avec la fonction `load`.
3. Savegarder sur disque dur seulement la matrice A. Et quitter la session scilab, ouvrir une session scilab, et récuperer la variable A.

## Scripts et fonctions

**Exercice 29.** **scripts** Ecrire un script qui permet de calculer les racines d'un polynome de degrée deux avec comme coefficients (a,b,c)

**Exercice 30.** **matrice tridiagonale** Soit `n=10;B=eye(n,n)`. Définir une matrice tridiagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer inverse de la matrice.

**Exercice 31.** **matrice tridiagonale sparse** La matrice $A$ et $B$ définie ci-dessus sont très creuses, utilser la nation de matrice creuse et redéfinir A et B.

n=10; A=sparse(eye(n,n)); B=2*A; for i=1:n-1 B(i,i+1)=1; end for i=1:n-1 B(i+1,i)=1; end

**Exercice 32.** **function** Ecrire une function qui a pour entree les coefficients (a,b,c) et qui a pour sortie les deux racines d'un polynôme de degré 2.

**Exercice 33.** **function avec test des arguments** Dans certains cas, il est néssaire de tester les arguments d'une fonction, leur nombre les types des arguments en entrée, dimension et valeurs, on peut intialiser des arguments par défauts s'ils ne sont pas fournis. Ecrire une fonction qui permet de résoudre un polynôme de degré 2 tout en vérifiant que les arguments sont corrects.

**Exercice 34.** **factorial** Définir une fonction qui permet de calculer le factoriel de n.

**Exercice 35.** **combinaison** Définir une fonction qui permet de calculer $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

# Chapter 2

# Equations différentielles

**Exercice 1.** Trouver les solutions réelles de l'équation differentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' - y = 0$$

Quelle est la solution vérifiant $y(1) = 2$ ? Tracer la solution.

**Exercice 2.** Trouver les solutions qu'admet l'équation différentielle $y' + y \ln 5 = 0$ sur $R$. Résoudre le problème de Cauchy. Tracer la solution.

$$\begin{cases} y' + y \ln 5 &= 0 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Soit l'équation différentielle

$$xy' + y = x^3$$

1. Résoudre l'équation sur $[1, \infty[$
2. Résoudre le problème de Cauchy avec condition initiale $y(1) = 2$.
3. Tracer la solution analytique

**Exercice 4.** Soit l'équation différentielle $4y' - y = 6$. Déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur 4 en 0. Tracer la solution.

**Exercice 5.** Résoudre les equations differentielles suivantes :

1. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2. $2x' - x = 0$, avec $x(0) = 1$.
3. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.

Comment résoudre numériquement ces équations en Scilab ?

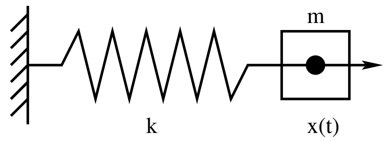
**Exercice 6.** Trouver la solution des problème de Cauchy suivants

1. $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
2. $y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
3. $\theta'' + 9\theta = 0$ et $\theta(\pi/2) = 0$, $\theta'(\pi/2) = 1$.

**Exercice 7.** Résoudre numériquement les trois équations différentielles précédentes par Scilab.

**Exercice 8.** **Ressort libre** Soit une masse $m$, assimilée à un point, astreinte à se déplacer selon un axe $x$. Elle est retenue par un ressort de raideur $k$, de longueur à vide nulle. Selon la loi de Newton

$$m\ddot{x} = -kx$$




Résoudre le probleme du Cauchy avec condition initiale : $x(0) = 0,\ x'(0) = 5$ et paramètres $m = 3, k = 3$. On peut modifier les parametres $m$ et $k$ pour étudier le comportement du système.

**Exercice 9. Ressort libre 2** Etudier le problème du ressort libre en prenant en compte la resistance à la vitesse. On suppose que le coefficient de la resistance à la vitesse est égale à 1. Etudier le comportement du système en fonction de ce paramètre.

# Chapter 3

# Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

**Exercice 1.** Calculer la solution numérique par méthode Euler explicite à un pas

$$(1+x^2)y' - y = 0, \quad y(1) = 2$$

**Exercice 2.** Calculer la solution numérique par méthode Euler modifiée à un pas

$$(1+x^2)y' - y = 0, \quad y(1) = 2$$

**Exercice 3.** Calculer la solution numérique par la fonction ode de Schilab

$$(1+x^2)y' - y = 0, \quad y(1) = 2$$

**Exercice 4.** Calculer la solution numérique par la fonction ode de Schilab

$$\begin{cases} y' + y\ln 5 &= 0 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

$$xy' + y = x^3$$

1. Résoudre théoriquement le problème de Cauchy avec condition initiale $y(1) = 2$.
2. Résoudre théoriquement le problème de Cauchy avec condition initiale $y(1) = 2$, par la méthode Euler explicite à un pas et par la méthode Euler à un pas modifié.
3. Résoudre numériquement le problème de Cauchy avec condition initiale $y(1) = 2$ à l'aide de la fonction `ode`.
4. Tracer la solution analytique et les solutions numériques.

**Exercice 5.** Résoudre numériquement les équations differentielles suivantes avec la fonction `ode`.

1. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2. $2x' - x = 0$, avec $x(0) = 1$.
3. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.

**Exercice 6.** **Système d'équations différentielles** Avec la fonction `ode`, résoudre numériquement le système d'équations différentielles suivant

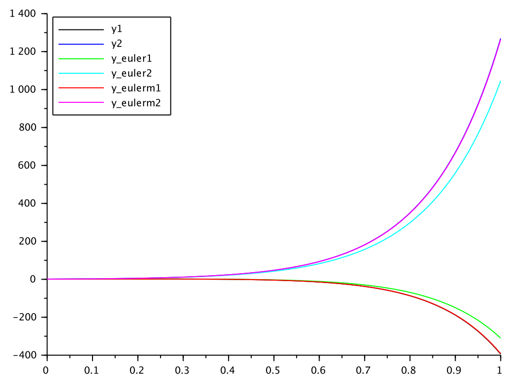
$$\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) - y(t) + t \\ y'(t) &= x(t) + 7y(t) + e^{-t} \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = y(0) = 1$$

avec la fonction ode

**Exercice 7.** Résoudre numériquement le système d'équations différentielles suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4x(t) - y(t) + t \\ y'(t) & = & x(t) + 7y(t) + e^{-t} \end{array}\right. \qquad \text{avec } x(0) = y(0) = 1$$

avec le schéma d'Euler explicite à un pas et à un pas modifié




**Exercice 8.** Définir une fonction `myode` (équivalent à `ode`) qui permet de résoudre numériquement les equations différentielles et les systèmes d'équation différentielle, avec le schéma d'Euler explicite à un pas et le schéma à un pas modifié.

**Exercice 9.** **Atracteur de Lorentz** En 1963, le météorologue Edward Lorenz est le premier à mettre en évidence le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie. Le modèle de Lorenz, appelé aussi système dynamique de Lorenz ou oscillateur de Lorenz, est une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques basée sur la mécanique des fluides. L'oscillateur de Lorenz est un système dynamique tridimensionnel qui engendre un comportement chaotique dans certaines conditions (wikipedia). Le système différentielle s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \sigma(y(t) - x(t)) \\ y' & = & \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z' & = & x(t)y(t) - \beta z(t) \end{array}\right.$$

Les coéfficients $\sigma, \rho$ et $\beta$ sont constants. Le paramètre $\sigma$ est appelé nombre de Prandtl et $\rho$ est appelé nombre de Rayleigh, Les variables dynamiques et reprsentent l'tat du systme chaque instant. L'interprétation physique en est la suivante : $x(t)$ est proportionnel l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport un profil linéaire. On pose $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$.

**Exercice 10.** Avec la fonction `ode`, résoudre numériquement les problèmes de Cauchy suivants

1. $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
2. $y'' - 4y' + 3y = 0$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
3. $\theta'' + 9\theta = 0$ et $\theta(\pi/2) = 0$, $\theta'(\pi/2) = 1$.

**Exercice 11.** **Mouvement d'un projectile** Soit une particule de masse $m$, de poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui subit le frottement $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ dans le milieu. Son équation de mouvement s'écrit :

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\vec{g} - \gamma\frac{d\vec{x}}{dt}$$

On peut commencer à considerer un cas simple, en dimension un. Supposons mouvement du projectile est vertical. Alors nous avons

$$mx'' = mg - \gamma\frac{dx}{dt},$$

Ici, lorsque le mouvement du projectile est vers le pas, la direction est positive. La condition initiale est $x(0) = x0$ et $x'(0) = v0$. C'est une équation différentielle d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants, non homogène, autonome. La solution en scilab est très simple, on peut s'amuser à faire varier les paramètres.

En chute libre, un parachutiste peut atteindre vitesse dite *stationnaire*, où l'accélération est nulle. On peut calculer numériquement (théoriquement aussi) cette vitesse. ($mg = \gamma v$).

**Exercice 12. Mouvement d'un projectile 2** Lorsque le mouvement est en espace, ce problème peut être simplifier en un problème de dimension deux : direction verticale ($z$) et direction horizontale ($x$). L'équation se réduit au systèmes d'équation découplées:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' + \frac{\gamma}{m}x' & = & 0 \\ z'' + \frac{\gamma}{m}z' & = & g \end{array} \right.$$

La condition initiale est $x(0) = x0,\ x'(0) = vx_0$, et $z(0) = z0,\ x'(0) = vz_0$. On peut résoudre ce problème en considérant deux équations différentielles séparement, la prémiere est homogène, la deuxième possède un second membre.

**Exercice 13. Mouvement d'un projectile 3** Un lanseur de poids cherche à calculer l'angle optimale. Sachant que la vitesse de départ est fixe (30km/h), que la masse du poids est 1 kg.

**Exercice 14. Equation Van der Pol**. Résoudre numeriquement l'équation Van der Pol

$$y'' = c(1 - y^2)y' - y$$

Avec $c = 0.4$ et condition initiale $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

**Exercice 15. Equation Van der Pol 2**.

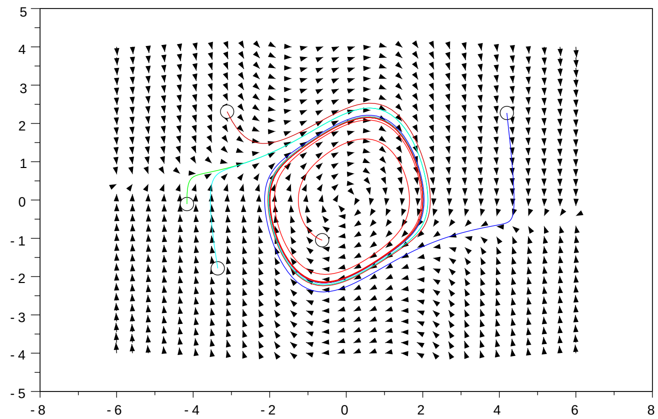
1. A l'aide de la fonction `fchamp` de Scilab, tracer dans l'espace des phases le champ de vecteur $(u_1'(t), u_2'(t))$ à l'instant 0, comparer avec solution de l'exercice precedent.
2. On peut exploiter une possibilité graphique de Scilab pour obtenir autan de trajectoires voulues sans refaire tourner le script précendent avec une autre valeur de $u_0$.

   Après l'affichage du champ de vecteur, chaque condition initiale sera donnée par un clic du bouton gauche de la souris, le pointeur étant positionnée sur la condition initiale voulue. Cette possibilité graphique s'obtient avec la primitive `xclick` dont la syntaxe simplifiée est :

   ```
   [c_i,c_x,c_y]=xclick();
   ```

   Scilab se met alors à attendre un *événement graphique* du type *clic souris*, et, lorsque cet événement a lieu, on récupère la position du pointeur (dans l'échelle courante) avec `c_x` et `c_y` ainsi que le numéro du bouton avec : 0:gauche; 1:milieu; 2:droit. Dans le script suivant, on utilise le bouton droit pour sortir de la boucle des événements.

   ```
   // 1/ trace du champs de vecteur issu de lequation de Van der Pol
   clf;
   exec('vanderpol.sce');
   n = 30;
   delta_x = 6;
   delta_y = 4;
   x = linspace(-delta_x,delta_x,n);
   y = linspace(-delta_y,delta_y,n);
   fchamp(vanderpol,0,x,y, strf="041");
   //xselect();
   show_window();
   // 2/ resolution de lequation differentielle
   m = 500 ;
   T = 30 ;
   t = linspace(0,T,m);
   couleurs=[21 2 3 4 5 6 19 28 32 9 13 22 18 21 12 30 27]; //17couleurs
   ```




```
num = -1 ;
while %t
   [c_i,c_x,c_y]=xclick();
   if c_i == 0 then
      plot2d(c_x, c_y, style=-9, strf="000") // un petit o pour marquer la C.I.
      u0 = [c_x;c_y];
      [u] = ode(u0, 0, t, vanderpol);
      num = modulo(num+1,length(couleurs));
      plot2d(u(1,:), u(2,:), style=couleurs(num+1), strf="000")
   elseif c_i == 2 then
     break
   end
end
```

**Exercice 16. Mouvement d'un satellite** Un satellite subit une force gravitationnelle dirigée vers le centre de la terre. Son mouvement s'effectue donc dans le plan qui contient le vecteur de vitesse initiale $v_0$ et le centre de la terre. On recherche à présent la trajectoire d'un satellite lancé à partir dune fusée. On rappelle que l'accélération vectorielle a d'un satellite terrestre S (de masse m) est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -C\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -C\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Le coefficient $C$ est calculé par $C = GM$ où $G = 6,67\ 10^{11} m^3 kg^1 s^2$ est la constante gravitationnelle et $M = 5,976\ 10^{24} kg$ la masse de la terre. $C = GM = 3,986\ 10^{14} m^3 s^{-2} = 3,986\ 10^5 km^3 s^{-2}$. sachant que le satellite a été lancé à la manière de la figure ci-dessus à la distance d=(6400+100) km du centre de la terre, calculer sa trajectoire sur une journée (et tracer celle-ci) pour les valeurs $V_{\text{init}} = 8000 m/s$ (resp. 10000m/s). Calculer lapogée (distance maximale de O) de la trajectoire. On peut vérifier avec simulation que

- Premiere vitesse cosmique : avec une vitesse minimale de 7.8 km/s un satelitte peut eviter de tomber par terre.
- Deuxsième vitesse cosmique : avec une vitesse minimale de 11.2 km/s un satelitte peut echaper la force gravitationnelle de la terre.

- Trajectoire géostionnaire. Les satellite géostationnaire se trouve à une distance de (6400+35786) km, et sa vitesse par seconde est de 3.07 km

**Exercice 17.** Résoudre dans intervalle $[0; 5]$ avec 101 points de discrétisation, le système d'équations différentielles suivante

$$\begin{cases} x' = ax(t) - bx(t) * y(t) \\ y' = cy(t) - dy(t) \\ x(0) = 2; y(0) = 1; \end{cases}$$

Où $a = 3,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 2$ sont des paramètres connus. Tracer la courbe obtenue sur le plan $(x, y)$. A l'aide de la fonction `fchamp` tracer sur une grille de $11 \times 11$ points qui discrétise le plan $[0; 6] \times [0; 6]$, le champ des vecteurs qui représentent les directions de la solution à l'instant initial.

# Chapter 4

# Variables aléatoires et méthode de Monte Carlo

**Exercice 1. Variable aléatoire uniforme** $U[0,1]$ A l'aide de fonction `rand` simuler une suite de 100 réalisations de la v.a. de loi uniforme $U(0,1)$. Simuler une suite de 100 réalisations de la v.a. de loi uniforme $U[1,5]$. Calculer la moyenne empirique.

**Exercice 2. Nuage de point** Soit (X,Y) point dans $R^2$, $X$ et $Y$ suivent le même loi uniforme $U[-2,2]$. Simuler 100 réalisations du coupe $(X,Y)$. Tracer un nuage de point formé par les réalisations du coupe $(X,Y)$.

**Exercice 3. Nuage de point 2** Soit (X,Y) point dans $R^2$, $X$ et $Y$ suivent le même loi uniforme $U[-2,2]$. Simuler 100 réalisations du coupe $(X,Y)$. Tracer seulement les points qui tombent dans le disque de centre (0,0) de rayon 1.

**Exercice 4. Estimation de $\pi$ par méthode de rejet** Soit (X,Y) point dans $R^2$, $X$ et $Y$ suivent le même loi uniforme $U[-2,2]$. Simuler 100 réalisations du coupe $(X,Y)$. Tracer seulement les points qui tombent dans le disque de centre (0,0) de rayon 1. Estimer le constant $\pi$ par méthode Monté Carlo en calculant le nombre de point dans le disque $X^2+Y^2 \leq 1$.

**Exercice 5.** Un bâton de craie tombe et se brise en 3 morceaux. Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle à l'aide des 3 morceaux ? On suppose que les deux points de fracture sont indépendants et équiprobables sur la longueur du bâton de craie.

**Exercice 6.** Antoine et Bernard décident de jouer un jeu suivant: Ils lancent une pièce non pipée, si le pile apparaisse, Bernard donne un euro à Antoine, sinon Antoine donne un euro à Bernard. Le jeu s'arrète jusqu'à ce que un des deux joueurs est ruiné. Sachant au départ, la fortune de Antoine est $a$, celle de Bernard est $b$. Calculer la probabilité que Antoine gagne à la fin.

Les deux joueurs décident de changer la règle. Ils lance un dès, si 1 ou 2 apparaissent, alors Bernard donne 2 euros à Antoine, si 3,4,5 ou 6 apparaissent, alors Antoine donne 1 euro à Bernard. Calculer la probabilité que Antoine gagne à la fin. Si au départ $a=b$, est-ce cette nouvelle règle de jeu favorise Antoine ?

On pourra calculer et tracer avec `comet` la fortune du joueur A après chaque lancer.

**Exercice 7. Estimation de l'integrale par méthode de Monte Carlo** Soit $f(x)=\ln(x)$, alors

$$I=\int_1^2 f(x)\,dx=[x\ln(x)]_1^2-\int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx=2\ln 2-1$$

On peut utiliser méthode de Monte Carlo pour estimer la valeur I.

1. Simuler un nuage de point (X,Y) dans le domaine $[1,2]\times[0,\ln 2]$
2. Calculer le nombre des points qui tombent sous la courbe $f(x)$.

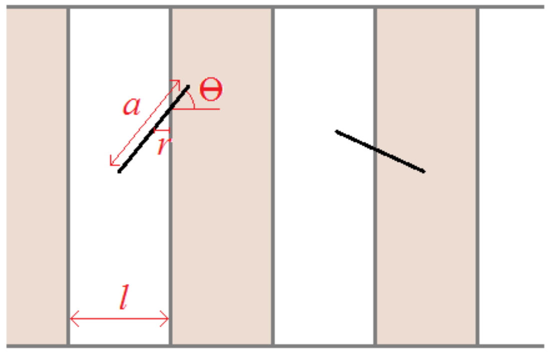



Figure 4.1: Aiguille de Buffon

3. On remarque que $I = \text{aire}\{(x,y)|y < f(x)\}$. On peut donc estimer la probabilité $p$ telle que un point tombe sous la courbe $f(x)$, et estimer l'intégrale par

$$\overline{I} = p * \text{aire total de } [1,2] \times [0, \ln 2]$$

En général, on pourrait calculer avec cette méthode $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

**Exercice 8.** **Jeu de dés** Simuler 100 réalisations d'un jeu de dés, on suppose le jeu n'est pas pipé. Calculer la moyenne empirique.

**Exercice 9.** Aiguille de Buffon L'aiguille de Buffon est une expérience de probabilité proposée en 1733 par Georges-Louis Leclerc de Buffon, un scientifique français du xviii siècle. Cette expérience fournit une approximation du nombre Pi. Son analyse met en oeuvre un cas simple d'espace de probabilités bidimensionnel et continu.

Il s'agit de lancer un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet. Le parquet est composé de planches parallèles de même largeur. On comptabilise le nombre de fois où l'aiguille tombe à cheval sur [au moins] une rainure du parquet (cas "favorable") par rapport au nombre de lancers totaux. Au fur et à mesure que le nombre de lancers augmente, le quotient se rapproche d'un certain nombre permettant de retrouver (par exemple, si la longueur de l'aiguille est égale à la largeur d'une planche, ce nombre sera $\frac{2}{\pi}$).

Soient :

- $l$ le réel positif correspondant à la largeur d'une latte de parquet ;
- $a$ le réel positif correspondant à la longueur de l'aiguille ;
- $\theta$ le réel compris entre 0 et $\pi/2$ correspondant à l'angle géométrique formé avec les rainures du parquet;
- $r$ le réel positif correspondant à la distance du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche.

Le but de cet exercice est estimer cette probabilité avec méthode Monte Carlo. D'après les hypothèses, et en utilisant toutes les symétries, on peut considérer que :

- $\theta$ suit une loi uniforme continue sur $[0, \pi/2]$
- suit une loi uniforme continue sur $[0, l/2]$

**Exercice 10.** **Simulateur de loto** On tire au hasard (sans remise) 6 numéros parmi 49 numéro, écrire un programme qui permet de faire ce tirage.

**Exercice 11.** **Variable aléatoire Binomiale** $B(n,p)$ Simuler 100 réalisations d'une variable aléatoire de loi Binomiale $B(10, 0.3)$. Calculer la moyenne empirique.

**Exercice 12.** **Variable aléatoire Géometrique** $G(p)$ Simuler 100 réalisations d'une v.a. de loi géométrique $G(0.3)$. Calculer la moyenne et vérifie qu'elle est proche de la moyenne théorique.

**Exercice 13. Paradoxe de Bertrand 1** Le paradoxe de Bertrand est un problème en théorie des probabilités qui met en évidence les limites du recours à l'intuition dans cette discipline. Il consiste à choisir au hasard une corde d'un cercle donné et d'estimer la probabilité ($p$) que celle-ci soit de longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. Le paradoxe est que cette probabilité dépend du protocole de choix de la corde.

On va calculer cette probabilité par une méthode de Monte Carlo.

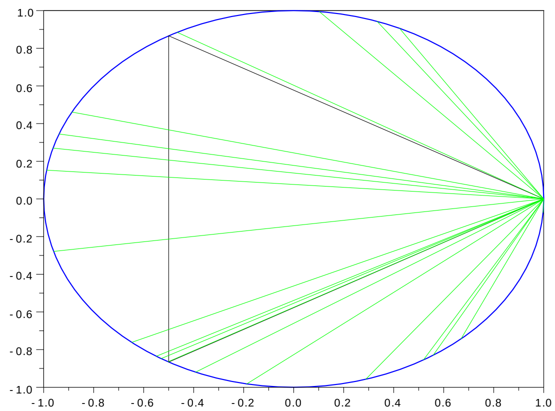



Figure 4.2: Paradoxe de Bertrand, méthode 1

Ecrire un programme qui permet de simuler les cordes selon cette methode, et estimer la probabilité $p$.

**Exercice 14. Paradoxe de Bertrand 2** La deuxième méthode de Bertrand

**Rayon aléatoire** : on choisit un rayon du cercle et on considère le triangle équilatéral inscrit dont un côté est perpendiculaire au rayon. On choisit aléatoirement un point sur le rayon et on trace la corde dont il est le milieu. Cette corde est plus longue que le côté du triangle si le point est situé entre le centre du cercle et l'intersection du côté avec le rayon, laquelle est située au milieu de ce dernier. La probabilité est donc alors $\frac{1}{2}$

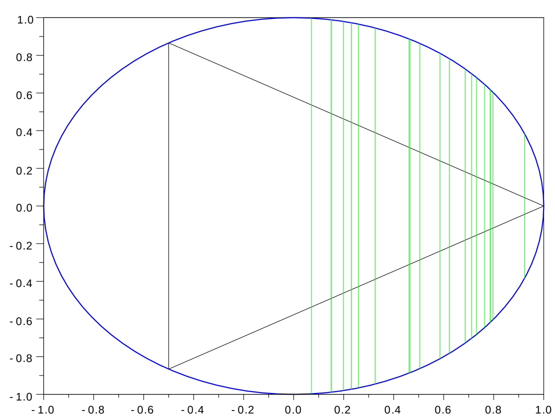



Figure 4.3: Paradoxe de Bertrand, méthode 2

**Exercice 15. Problème de jeu télévisé**

Un candidat est en finale a un jeu TV. Il a la possibilité de gagner une voiture. Pour cela il doit choisir entre trois portes fermées par un rideau. Seulement une des pièce contient la voiture. Le candidat commence par choisir une première pièce. L'animateur (pour qu'il ait plus de suspens) ouvre le rideau de l'une des deux pièce restante ne contenant pas la voiture et demande au candidat s'il veut changer de choix ou garder son ancien choix. Que doit faire le candidat et pourquoi ?

Pour simuler numériquement ce jeu, nous allons faire en plusieurs étapes

· Etape 1: Supposon les pieces son numeroté de 1 à 3. Comment simuler le numéro de pièce où la voiture se trouve ? Comment simuler le choix du candidat ? Comment calculer la probabilité que son choix initial est bon ?

· Etape 2: (difficile) En focntion du choix du candidat et numéro de la pièce où il y a la voiture, comment simuler le choix de animateur ?

· Etape 3: On suppose que le client ne change jamais avis, comment simuler la probabilité de gagner la voiture.

· Etape 4: On suppose que le client change systématiquement avis, comment simuler la probabilité de gagner la voiture.

· Etape 5: On suppose que le client jette une pièce de monnaie (non pipée) pour se décider, alors comment simuler la probabilité de gagner la voiture.

**Devoir Maison**

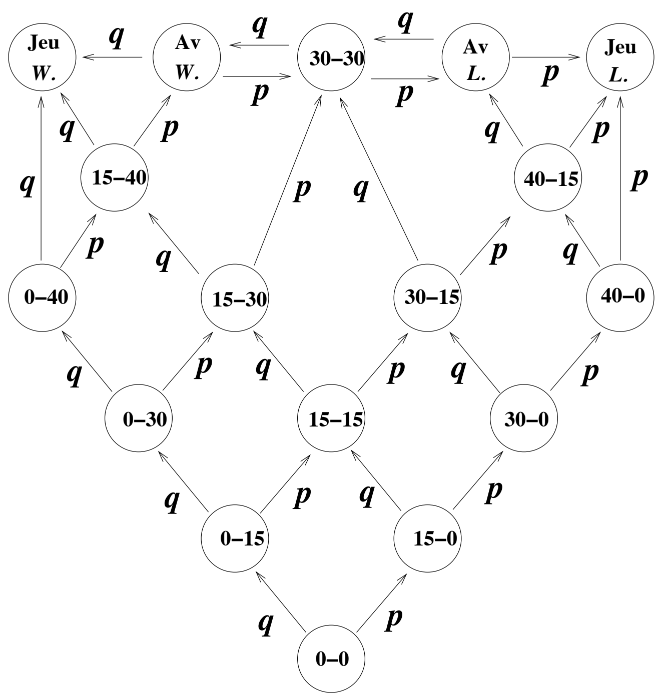
Devoir maison. Voici les trois sujets du DM. Au cas où vous avez manqué un des deux tests, vous pouvez travailler sur un des trois sujets et m'envoyer votre code par email

huilong.zhang@gmail.com, sujet ”`devoir_maison_nom_prenom`”

Si vous avez une mauvaise note à un des deux tests, le devoir vous donne une deuxième chance.

Le devoir est consider comme un troisime test, je prendrai en compte deux meilleures notes.

**Exercice 16.** **DM1: Tennis** Un “jeu” d'une partie de tennis entre deux joueurs $W$ et $L$ comporte 17 états 0–0, 0–15 0–30, $\cdots$. Pour simplifier, nous ne distinguerons pas entre les états 30–30 et égalité, 40–30 et avantage $L$, 30–40 et avantage $W$. Chaque balle engagé a la probabilité $q$ d'être gagnée par $W$ et $p = 1 - q$ d'être gagnée par $L$. On obtient le graphe suivant:




1. Le jeu se décompose en deux phases: la première comporte les douze états les plus bas sur le dessin, la deuxième les états $E_1 =$ (Jeu $W$), $E_2 =$ (Av. $W$), $E_3 =$ (30–30), $E_4 =$ (Av. $L$), $E_5 =$ (Jeu $L$).

2. Calculer la probabilité de victoire de $L$ en fonction de l'état $E_i$ du départ dans la phase 2.

3. Calculer les probabilités d'atteindre pour la première fois la phase 2 dans les états $\{E_i\}(i = 1, 2, \cdots, 5)$ respectivement.

4. Quelle est la probabilité $P_L$ de victoire $L$ ? Vérifier ce résultat dans le cas $q = p = \frac{1}{2}$.

Indication: Théoriquement, la question 3 est faisable, mais pour répondre à la question 2, on doit utiliser la notion de chaine de Markov (ou équation aux différences). Pour la question 4, il faut avoir fait 2 et 3. Mais numériquement, on peut simuler et estimer ces probabilités par la méthode de Monte Carlo. Voici les résultats théoriques : la phase 2 dans les états $\{E_i\}(i=1,2,\cdots,5)$ respectivement sont

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= q^4+q^4p+q^4p+q^4p+q^4p = q^4+4pq^4 \\
P(E_2) &= 4p^2q^3 \\
P(E_3) &= 6p^2q^2 \\
P(E_4) &= 4p^3q^2 \\
P(E_5) &= p^4+4p^4q
\end{aligned}$$

La probabilité $P_L$ est

$$P_L(p,q) = 4p^2q^3\frac{p^3}{1-2pq} + 6p^2q^2\frac{p^2}{1-2pq} + 4p^3q^2\frac{p-p^2q}{1-2pq} + 4p^4q + p^4$$

Numériquement, on a

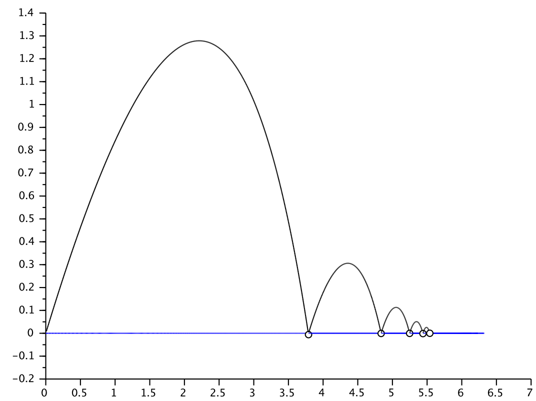
$$P_L(0.5,0.5)=0.5 \quad P_L(0.6,0.4)=0.736 \quad P_L(0.9,0.1)=0.999$$

Attention : Je vous demande de faire des calculs théorique et aussi faire un simulateur de ce jeu. Et vérifier avec la méthode de Monte Carlo que vos résultats théoriques sont justes.

**Exercice 17. DM2: Ballon** On considére un ballon lancé avec une vitesse initiale de 30 (km/h), avec un angle de $45^o$. Lorsque il tombe par terre, il va rebondir. (Sa vitesse verticale change de signe, sa vitesse horizontale reste inchangée). On suppose que à chaque rebond, il perte 20% de sa vitesse et que le ballon s'arrete lorsque sa vitesse est inferieure à 1 km/h. Simuler et tracer le mouvement du ballon. Corrigé

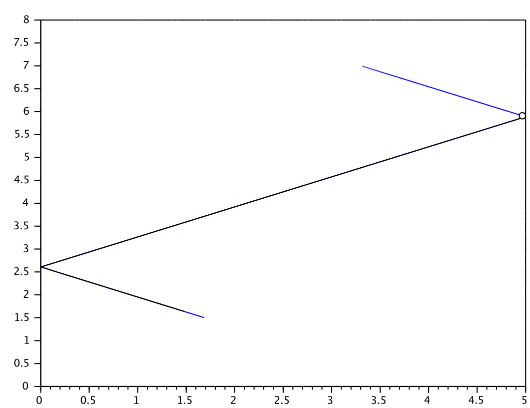
```
function [y]=f_projectilez(t,u)
  global g;global m; global r;
  y(1)=u(2)
  y(2)=g-(r/m)*u(2);
endfunction

function [y]=f_projectilex(t,u)
  global g;global m; global r;
  y(1)=u(2)
  y(2)=-(r/m)*u(2);
endfunction
global g;
global m;
global r;
g=9.8;m=1.0;r=1.0;
tau=0.8;

t=linspace(0,3,2001);

theta=45*%pi/180;
v0=30000/3600;
distance = 0;
while v0>1.0
      z0=[0;-sin(theta)*v0];
      x0=[distance;cos(theta)*v0];
      x=ode(x0,0,t,f_projectilex);
      z=ode(z0,0,t,f_projectilez);
```

```
        z_ind = find(z(1,:)>=0);
        distance = x(1,z_ind(2));
        //plot2d(x(1,1:z_ind(2)),z(1,1:z_ind(2)),1);
        plot2d(x(1,:),zeros(x(1,:)),2);
        comet(x(1,1:z_ind(2)),-z(1,1:z_ind(2)));
        v0=sqrt(z(2,z_ind(2))^2+x(2,z_ind(2))^2)*tau;
    end;
```



**Exercice 18.** **DM3: Billard** Avec Scilab on peut simuler et tracer le mouvement d'une boule de billard sur un rectangle. Proposer un système d'équations différentielles qui modélise le mouvement. Simuler et tracer la trajectoire. Comme indication, voici le résultat obtenu.

Corrigé



**Exercice 19.** Comment simuler une variable aléatoire géométrique de paramètre 0.5 ?

**Exercice 20.** Simuler une suite (1000) de réalisation de variable aléatoire Exp(2.0), tracer histogramme de ses réalisations. On définit pour cela une classe par la fonction `C=linespace(0,5,51)` (*51 sous classes sur intervalle* $[0,5]$). Comparer ce histogramme avec le résultat théorique.

**Exercice 21.** Simuler une suite (1000) de réalisation de variable aléatoire Exp(2.0), tracer histogramme de ses réalisations. On définit pour cela une classe par la fonction `C=linespace(0,5,51)` (*51 sous classes sur intervalle* $[0,5]$). Comparer ce histogramme avec le résultat théorique.

**Exercice 22. Site web 1** Un site web possèdent deux serveurs qui fonctionnent de façon indépendante. $X$, $Y$ modélise la durée de service des deux serveurs, elles suivant une loi exponentielle de paramètres $\lambda$ et $\mu$ respectivement. Le site peut être en 3 modes différents.

1 : nominal (les deux serveurs fonctionnent),

2 : dégradé (un des deux serveurs est en panne)

3 : panne totale (les deux serveurs sont en panne).

On sait que $\lambda = 1/2000\,\mathrm{h}^{-1}$ et $\mu = 1/4000\,\mathrm{h}^{-1}$. A l'instant initial le système est en mode nominal. Pour simplifier le problème on suppose qu'il n'y a pas de réparation.

1. Calculer la durée moyenne que le système est en mode 1
2. Calculer la probabilité que le premier serveur tombe en panne avant le second ?
3. (Bonus) Calculer la durée moyenne de fonctionnement du site.

**Exercice 23. Site web 2** Avec la fonction `histplot`, vérifier que la durée que le système est en mode 1 est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $(\lambda + \mu)$.

**Exercice 24. Site web 3** Avec la fonction `cumsum`, vérifier que la durée moyenne empirique de fonctionnement du site converge vers sa valeur théorique $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+\mu}$

**Exercice 25.** Soit une particule de masse $m$, de poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qui subit le frottement $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ dans le milieu. Son équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} x'' + \frac{\gamma}{m}x' & = & 0 \\ z'' + \frac{\gamma}{m}z' & = & g \end{cases}$$

Soient $g = 9.8$, $m = 1.0$, $r = 0.1$, la vitesse initiale du projectile est de $v_0 = 30$ et l'angle initiale est $a_0 = \frac{\pi}{4}$.

1. Utiliser la fonction `ode`, calculer et tracer la trajectoire du projectile dans intervalle du temps $[0, 10]$.
2. Dans combien de temps le projectile touche la terre ? Calculer $D$ la distance parcourue.
3. On fait que angle initiale $a_0$ n'est pas fixe. Elle suit une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\frac{\pi}{4}$ et de l'écart-type $\sigma = 0.5$ (rad).
   (a) Simuler 1000 réalisations de cette variable aléatoire avec la fonction `grand`.
   (b) Ecrire une fonction `distance(a0)` qui retourne la distance parcourue du projectile en fonction de $a_0$.
   (c) Avec les 1000 réalisations de $a_0$, calculer la moyenne empirique et la variance empirique de la distance parcourue $D$.
   (d) Tracer histogramme de $D$.

**Exercice 26.** Tracer la densité de la v.a. $N(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 2.0$, $\sigma = 1$

**Exercice 27. Piper un dé** Un jeu de dés est pipé, la probabilité que le 6 apparait est double que les autres faces. Soit $X$ la variable aléatoire qui représente cette variable aléatoire. Calculer la moyenne et la variance de cette variable aléatoire. Simuler 100 réalisations de d'un jeu. Et vérifier que la moyenne empirique et la variance empirique sont proches des valeurs théoriques lorsque le nombre de réalisations est grand.

**Exercice 28. Loi discrète** Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble fini

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Ecrire une function `loi_discrete(x,p)` qui permet de simuler une réalisation de cette variable aléatoire. Test cette function avec un jeu de dés equilibré. Vérifier que la moyenne empirique et la variance empirique sont proches des valeurs théoriques lorsque le nombre de réalisations est grand.

**Exercice 29. Loi discrète** Soit $X$ une variable aléatoire discrète de loi

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Calculer l'espérance théorique de $X$, calculer la variance de $X$. Simuler 100 réalisations de $X$. Vérifier que la moyenne empirique et la variance empirique sont proches des valeurs théoriques lorsque le nombre de réalisations est grand.

**Exercice 30. Dimension 2 : mouvement d'un cible** Simuler la trajectoire d'un cible qui se déplace suivant le dynamique suivant.

$$X_k = AX_{k-1} + W_k \tag{4.1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X_0 = [2; 1]$ et $W_k = [W_k^1; W_k^2]$ avec $W_k^1 \sim \mathcal{N}(0, 0.2^2\Delta)$ et $W_k^2 \sim \mathcal{N}(0, 0.2^2\Delta)$ deux bruits blancs gaussien. On peut modifier la matrice $A$ par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ -\Delta & 1 \end{pmatrix}$$

pour voir un autre modèle de cible. Simuler et tracer les trajectoires du cible.