Exercice 16. Soit
$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$
Un processus AR(1) où $|\phi| < 1$, calculer $\mathbf{E}\, X_t$ et $\mathbf{Var}\, X_t$. Calculer aussi ρ_j

Exercice 17. Soit
$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$
Un processus AR(2) stationnaire (le polynôme $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ possède deux racines de module strictement supérieur à 1.. calculer $\mathbf{E}\, X_t$ et εX_t. Calculer aussi ρ_j.

Exercice 18. Soit ε_t un BB, centré de variance 5/18, et considérons le processus Y_t
$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t$$
On suppose que Y_t n'est observable qu'avec une erreur d'observation : on ne peut observer que le processus $X_t = Y_t + \eta$ où η_t est un bruit blanc non corrélé avec ε_t, de variance 1/6 (avec de plus $cov(\varepsilon_t, \eta_{t-h}) = 0$ pour tout $h \in Z$).

1. Montrer que le processus $\omega_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}$ est un processus MA, et que le processus X_t est un ARMA(1,1).
2. Donner la représentation canonique de X_t
3. En déduire une représentation de X_t du type
$$X_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{t-i} + u_t \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$$
où u_t est un bruit blanc que on précisera.

Exercice 19. Soit $X_1, \cdots, X_n$ un vecteur, $X_i \in L^2$ et $\mathcal{H} = \text{Vect}(1, X_1, \cdots, X_n)$ espace combinaison linéaire affine de $X_1, \cdots, X_n$. Soit $X = X_0 \in L^2$,
$$\gamma = \mathbf{Cov}\,(X, X_i)_{i=1,\cdots,n}, \quad \sum = \text{matrice } \mathbf{Cov}\,(X_i, X_j)_{i,j=1,2\cdots,n}$$
Alors le vecteur défini par
$$\hat{X} = \mathbf{E}\, L(X|1, X_1, \cdots, X_n) = a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$
avec $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ vérifie $\mathbf{a} = \sum^{-1} \gamma$

Exercice 20. **Prévision de AR(1) avec moyenne non nulle** Calculer la prévision à horizon h du modèle AR(1) : $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ (μ considéré connu).

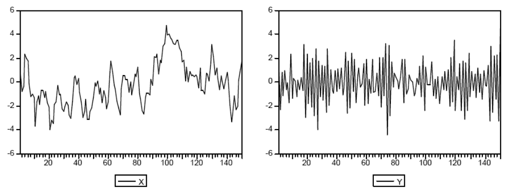
Exercice 21. On considère le processus AR(2) suivant
$$X_t = 40 + 0.4X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t,$$
où ε_t est un B.B gaussien $N(0, \sigma^2 = 12.8)$

1. Vérifier stationnarité, calculer l'espérance de X_t
2. Donner les équations de Yule-Walker du processus, calculer la variance, ainsi que les 5 premières valeurs des auto-corrélation.
3. Calculer les 3 premières auto-corrélation partielle.

Exercice 22. **suite** Soit $Y_t = X_t - \frac{\mu}{1-\phi}$ calculer les prévisions $Y^*_{T+h|T}$

Exercice 23. Le processus MA(2) suivant est-il stationnaire ?
$$Y_t = (1 - 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t \text{ où } \varepsilon_t \sim \text{BB}(0,1)$$
Si oui, calculer sa fonction d'auto-covariance $\gamma(h) = \mathbf{Cov}\,(Y_t, Y_{t+h})$.

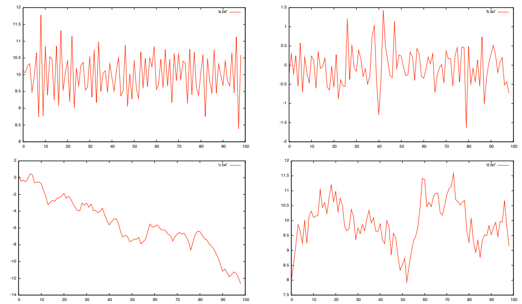
Exercice 24. Un processus Z_t suivant a été simulé suivant un processus AR(1), de la forme $Z_t = \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t est un BB gaussien. Il a été simulé une première fois avec $\rho = -0.7$ et une deuxième fois avec $\rho = 0.85$. Sur les sorties ci-dessous, quelle séries correspond au cas $\rho = -0.7$? Quelle série correspond au cas $\rho = 0.85$? justifier votre réponse.



Exercice 25. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Chaque réponse doit être justifiée.

1. Soit X_t un processus ARMA(p,q) stationnaire et inversible, alors, la processus $Y_t = 2X_t$ est un processus ARMA(p,q) stationnaire et inversible.
2. Soit ε_t un bruit blanc gaussien. On considère les processus $\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ et $\varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$.
   (a) Ils ont les mêmes auto-covariances.
   (b) Ils ont aussi les mêmes coefficients d'auto-corrélation.
3. Soit ε_t un bruit blanc , alors le processus $X_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$ est
   (a) stationnaire.
   (b) bruit blanc

Exercice 26. Nous avons simulé 4 séries chronologiques selon les formules suivantes
$$1)\ X_t = 2.0 + 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad 2)\ X_t = 18 - 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$3)\ X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad 4)\ X_t = \varepsilon_t$$
Voici leurs graphes.



1. Trouver pour chaque processus le graphe correspondant, expliquer en quelques phrases vos choix.
2. Dessiner approximativement leurs corrélogrammes, leurs corrélogrammes partiels.

Exercice 27. On considère les processus suivants:
$$\begin{aligned} X_t &= \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_{t-1} + u_t \end{aligned}$$
où u_t est i.i.d. $N(0, \sigma_u^2)$.

1. En utilisant le fait que $\varepsilon_t = X_t - \alpha X_{t-1}$ écrire le processus X_t sous la forme d'un ARMA : $\Phi(B)X_t = \Theta(B)u_t$. Montrer que formellement c'est un AR(p), préciser l'ordre p.
2. Discuter la stationnarité du processus X_t selon la valeur de α
3. Soit $Y_t = X_t - X_{t-1}$, écrire le processus Y_t sous forme d'un ARMA(p,q), préciser la valeur de p et q.
4. Discuter la stationnarité Y_t selon la valeur de α.

Exercice 28. Soit ε_t un B.B. de variance σ^2 X_t un processus défini par
$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t$$
Montrer qu'il s'agit d'un processus stationnaire, solution sous la forme
$$X_t = \sum_{k \in Z} a_k \varepsilon_{t-k}$$
En déduire que ε_t n'est pas innovation de X_t.