MHT201

Quelques corrigés de TD 5 et TD6

1 Feuille d'exercices N° 5

Exo. 10. *Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans* $\mathbb{C}(X)$*, et puis dans* $\mathbb{R}(X)$ *:*

1. $\frac{1}{X(X^2+1)^2}$
2. $\frac{X}{X^4+X^2+1}$

Corrgié : 1). **Décomposition dans** $\mathbb{C}(X)$ **:**

On calcule d'abord la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du dénominateur de cette fraction rationnelle :

$$X(X^2+1)^2 = X(X+i)^2(X-i)^2.$$

Donc la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b_1}{X+i} + \frac{b_2}{(X+i)^2} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2}, \qquad (1)$$

avec a, b_1, b_2, c_1, c_2 des coefficients à déterminer (la partie entier est 0 puisque le degré du numérateur $= 0 <$ le degré du dénominateur). En multipliant l'identité (1) ci-dessus par X, on trouve

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = a + X \cdot \left(\frac{b_1}{x+i} + \frac{b_2}{(X+i)^2} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2} \right).$$

Puis en remplaçant X par 0 dans l'identité ci-dessus, on a $a = 1$. Ensuite, en multipliant l'indentité (1) par $(X+i)^2$, on trouve

$$\frac{1}{X(X-i)^2} = b_2 + b_1(X+i) + \left(\frac{a}{x} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2} \right) \cdot (X+i)^2.$$

Posons

$$f(X) = \frac{1}{X(X-i)^2}, \quad \text{et } q(X) = \frac{a}{x} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2}.$$

En particulier, $q(X)$ est un fonction continue et dérivable en $x = -i$. Par conséquent, on a

$$f(-i) = b_2 + (-i+i) \cdot q(-i) = b_2$$

et

$$f'(-i) = \left(b_2 + b_1(X+i) + \left(\frac{a}{x} + \frac{c_1}{X-i} + \frac{c_2}{(X-i)^2}\right) \cdot (X+i)^2\right)' |_{X=-i} = b_1.$$

D'où $b_1 = f'(-i) = -1/2$, et $b_2 = -i/4$. De la même manière, on peut calculer les coefficients c_1 et c_2, et on trouve $c_1 = -1/2$, $c_2 = i/4$. On obtient donc enfin la décomposition suivante :

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{-1/2}{X+i} + \frac{-i/4}{(X+i)^2} + \frac{-1/2}{X-i} + \frac{i/4}{(X-i)^2}$$

Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Il faut calculer d'abord la factorisation du dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$: puisque le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation du dénominateur est $X(X^2+1)^2$. Donc, la décomposition de cette fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b_1X+b_2}{X^2+1} + \frac{c_1X+c_2}{(X^2+1)^2} \qquad (2)$$

avec a, b_1, b_2, c_1, c_2 des coefficients à déterminer. En multipliant l'identité (2) ci-dessus par X, et puis en remplaçant X par 0, on obtient $a = 1$. Ensuite, on muitiplie l'identité (2) par X, on a

$$\frac{1}{(X^2+1)^2} = a + \frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}.$$

Donc on trouve

$$0 = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{(X^2+1)^2} = \lim_{X\to\infty} \left(a + \frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}\right) = a + b_1$$

Donc $b_1 = -a = -1$. De façon similaire, on a

$$0 = \lim_{X\to\infty} \frac{X}{(X^2+1)^2} = \lim_{X\to\infty} \left(\left(a + \frac{X(b_1X+b_2)}{X^2+1} + \frac{X(c_1X+c_2)}{(X^2+1)^2}\right) \cdot X\right) = b_2 \text{ [1]},$$

donc

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{c_1X+c_2}{(X^2+1)^2},$$

d'où

$$1 = (X^2+1)^2 - X \cdot X(X^2+1) + (c_1X+c_2)X = (1+c_1)X^2 + c_2X + 1.$$

1. En effet, ici on a les égalités suivantes :

$$aX + \frac{X^2(b_1X+b_2)}{X^2+1} = aX + \frac{(X^2+1-1)(b_1X+b_2)}{X^2+1} = aX + b_1X + b_2 - \frac{b_1X+b_2}{X^2+1} = b_2 - \frac{b_1X+b_2}{X^2+1}$$

Par identification, on a $c_1 = -1$, $c_2 = 0$. On obtient enfin la décompostion en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{-X}{(X^2+1)^2}$$

2). **Décompositoin dans** $\mathbb{C}(X)$

On calcule d'abord la factorisation du dénominateur : comme $(X^2-1)(X^4+X^2+1) = X^6-1$, si on pose $\zeta = e^{2\pi i/6}$, les 4 racines complexes du polynôme X^4+X^2+1 sont $\zeta = e^{2\pi i/6}$, $\zeta^2 = e^{4\pi i/6}$, $\zeta^4 = e^{8\pi i/6}$ et $\zeta^5 = e^{10\pi i/6}$. On obtient ainsi la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme X^4+X^2+1 :

$$X^4+X^2+1 = (X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^4)(X-\zeta^5).$$

Donc la décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{a}{X-\zeta} + \frac{b}{X-\zeta^2} + \frac{c}{X-\zeta^4} + \frac{d}{X-\zeta^5},$$

avec a, b, c, d quatre coefficients à déterminer. Pour calculer a, remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} \tfrac{X}{(X-\zeta^2)(X-\zeta^4)(X-\zeta^5)} &= \tfrac{X(X-\zeta)}{(X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^4)(X-\zeta^5)} \\ &= a + \left(\tfrac{b}{X-\zeta^2} + \tfrac{c}{X-\zeta^4} + \tfrac{d}{X-\zeta^5}\right)(X-\zeta). \end{aligned}$$

D'où

$$a = \frac{\zeta}{(\zeta-\zeta^2)(\zeta-\zeta^4)(\zeta-\zeta^5)} = \frac{-\sqrt{3}i}{6}.$$ [2]

Par une méthode similaire, on peut calculer les coefficients b, c, d, et on obtient finalement

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{-\sqrt{3}i/6}{X-\zeta} + \frac{\sqrt{3}i/6}{X-\zeta^2} + \frac{\sqrt{3}i/6}{X-\zeta^4} + \frac{-\sqrt{3}i/6}{X-\zeta^5}$$

Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

D'abord, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur :

$$X^4+X^2+1 = X^4+2X^2+1-X^2 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

Donc, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de cette fraction rationnelle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{aX+b}{X^2-X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}, \qquad (3)$$

2. Rappelons qu'on a $\zeta = e^{2\pi i/6} = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. De la même manière, on trouve $\zeta^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\zeta^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $\zeta^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

avec a, b, c, d à déterminer. En remplaçant X par 0 dans l'identité ci-dessus, on trouve $b + d = 0$. En multipliant l'identité (3) par X, on obtient

$$\frac{X^2}{X^4 + X^2 + 1} = \frac{aX^2 + bX}{X^2 - X + 1} + \frac{cX^2 + dX}{X^2 + X + 1},$$

puis on fait X tendre vers ∞, on obtient $0 = a + c$. Ensuite, on remplace X par $-X$ dans l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{-X}{(-X)^4 + (-X)^2 + 1} = \frac{a(-X) + b}{(-X)^2 - (-X) + 1} + \frac{c(-X) + d}{(-X)^2 + (-X) + 1},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{-X}{X^4 + X^2 + 1} = \frac{-aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{-cX + d}{X^2 - X + 1}.$$

D'où

$$\frac{-aX - b}{X^2 - X + 1} + \frac{-cX - d}{X^2 + X + 1} = \frac{-aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{-cX + d}{X^2 - X + 1}.$$

Vu l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, on trouve par l'identification $a = c$. Donc $a = c = 0$, et la décomposition s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{X}{X^4 + X^2 + 1} = \frac{b}{X^2 - X + 1} + \frac{-b}{X^2 + X + 1} \qquad (4).$$

Finalement, on remplace X par 1 dans l'identité précédente, on obtient

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{1} + \frac{-b}{3},$$

d'où $b = 1/2$. On en déduit la décomposition finale :

$$\frac{X}{X^4 + X^2 + 1} = \frac{1/2}{X^2 - X + 1} + \frac{-1/2}{X^2 + X + 1}.$$

□

Remarque : En fait, on peut trouver la décompostion en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ à partir du résultat correspondant pour $\mathbb{C}(X)$. Par exemple, pour la première fraction rationnelle de l'exercice précédent, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(X^2+1)^2} &= \frac{1}{X} + \left(\frac{-1/2}{X+i} + \frac{-1/2}{X-i}\right) + \left(\frac{-i/4}{(X+i)^2} + \frac{i/4}{(X-i)^2}\right) \\ &= \frac{1}{X} + \frac{-(X+i)-(X-i)}{2(X+i)(X-i)} + \frac{-i(X-i)^2+i(X+i)^2}{4(X+i)^2(X-i)^2} \\ &= \frac{1}{X} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{-X}{(X^+1)^2} \end{aligned}$$

2 Feuille d'exercice N° 6

Exo. 2.

1. *Montrer que les polynôemes $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux. En déduire $d = pgcd((X-1)^2, (X-2)^3)$, et un couple de polynôemes U et V tels que*

$$U \cdot (X-1)^2 + V \cdot (X-2)^3 = d.$$

2. *Déterminer un polynôme P tel que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ soit $2X$, et que le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ soit $3X$.*

Corrigé : 1). Comme les deux polynômes $X-1$ et $X-2$ n'ont pas de racine commune, on en déduit qu'ils sont premiers entre eux. De la même manière, on montre que $\text{pgcd}((X-1)^2, (X-2)^3) = 1$. Pour trouver son identité de Bézout, on utilise le raisonnement suivant : partons d'abord l'égalité suivante :

$$(X-1) - (X-2) = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} 1 &= ((X-1)-(X-2))^4 \\ &= (X-1)^4 - 4(X-1)^3(X-2) + 6(X-1)^2(X-2)^2 - 4(X-1)(X-2)^3 + (X-2)^4 \\ &= (X-1)^2\left[(X-1)^2 - 4(X-1)(X-2) + 6(X-2)^2\right] + (X-2)^2\left[(-4(X-1) + (X-2))\right] \\ &= (X-1)^2 U(X) + (X-2)^3 V(X), \end{aligned}$$

avec

$$U(X) = (X-1)^2 - 4(X-1)(X-2) + 6(X-2)^2 = 3X^2 - 14X + 17,$$

et

$$V(X) = -4(X-1) + (X-2) = -3X + 2.$$

2). Posons $R_1(X) = 2X$, $R_2(X) = 3X$, donc $R_2(X) - R_1(X) = X$. D'où l'égalité suivante :

$$(X-1)^2 \cdot U \cdot (R_2 - R_1) + (X-2)^3 \cdot V \cdot (R_2 - R_1) = R_2 - R_1$$

Notons $P(X) = (X-1)^2 \cdot U \cdot (R_2 - R_1) + R_1$. Vu l'identité ci-dessus, on a donc que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $R_1(X) = 2X$, et que le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^3$ est $R_2(X) = 3X$. Il nous reste à calculer

$$P(X) = (X-1)^2 \cdot U \cdot (R_2 - R_1) + R_1 = 3X^5 - 20X^4 + 48X^3 - 48X^2 + 19X.$$

□

Exo. 4. *Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:*

1. $\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$
2. $\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$
3. $\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}$

Corrigé : 1). Trouver d'abord la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur :

$$(X^2-1)(X+1)^2 = (X-1)(X+1)^3.$$

Donc, la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ en éléments simples s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{1}{(X^-1)(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X+1)^3} \qquad (5)$$

avec a, b, c, d à déterminer. En multipliant l'identité (1) par $X-1$, et puis on remplace X par 1, on trouve que $a = 1/8$. On multiplie ensuite l'identité (5) par $(X+1)^3$, on trouve l'égalité suivante :

$$\frac{1}{X-1} = d + c(X+1) + b(X+1)^2 + (X+1)^3 \cdot \frac{a}{X-1}.$$

Posons $f(X) = \frac{1}{X-1}$, et $g(X) = a(X+1)^3/(X-1)$. La fonction $g(X)$ admet alors les dérivées d'ordre ≤ 2, et avec un calcul direct, on trouve $g(-1) = g'(-1) = g''(-1) = 0$. Donc, on a $d = f(-1) = -1/2$, $c = f'(-1) = -1/4$, et $f''(-1) = 2b = -1/4$, d'où $b = -1/8$. On a finalement

$$\frac{1}{(X^-1)(X+1)^2} = \frac{1/8}{X-1} + \frac{-1/8}{X+1} + \frac{-1/4}{(X+1)^2} + \frac{-1/4}{(X+1)^3}.$$

2). Comme les deux polynômes X^2+1 et X^2+X+1 sont déjà irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, donc $(X^2+1)(X^2+X+1)$ est la décompositoin en produit des facteurs irréductibles. Comme le dénominateur de cette fraction rationnelle est de degré 4, qui est strictement inférieur au degré du numérateur, donc la partie entier $E(X)$ de cette fraction rationnelle n'est pas nulle. En effectuant la division euclidienne de X^7+1 par $(X^2+1)(X^2+X+1) = X^4+X^3+2X^2+X+1$, on trouve

$$X^7+1 = (X^3-X^2-X+2)(X^4+X^3+2X^2+X+1) + (-2X^2-X-1).$$

D'où $E(X) = X^3-X^2-X+2$, et

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = X^3-X^2-X+2 + \frac{-2X^2-X-1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}.$$

Il nous reste donc à décomposer sa partie polaire

$$\frac{-2X^2 - X - 1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$$

en éléments simples. En verdu de la factorisaion du dénominateur, la décomposition en éléments simples s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{-2X^2 - X - 1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \qquad `(6)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ à déterminer. Posons $X = 0$ dans l'identité précédente, on obtient $-1 = b + d$. En multipliant cette identité par $X^2 + 1$, on trouve l'égalité suivante :

$$\frac{-2X^2 - X - 1}{X^2+X+1} = aX + d + (X^2+1) \cdot \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

En remplaçant X par $i = \sqrt{-1}$ dans l'identié ci-dessus, on obtient

$$\frac{1-i}{i} = \frac{-2i^2 - i - 1}{i^2+i+1} = ai + d + (i^2+1) \cdot \frac{ci+d}{i^2+i+1},$$

d'où

$$-1 - i = \frac{1-i}{i} = ai + d.$$

Comme $a, d \in \mathbb{R}$, on a donc $a = d = -1$. Or on a vu $b + d = -1$, donc $b = 0$, et on obtient de (6) l'égalité suivante :

$$\frac{-2X^2 - X - 1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{-X-1}{X^2+1} + \frac{cX}{X^2+X+1}. \qquad (7)$$

Enfin, en multipliant l'identité (7) par X, et puis en faisant X tendre vers ∞, on trouve $0 = -1 + c$. Donc $c = 1$. On a finalement la décomposition suivante :

$$\frac{-2X^2 - X - 1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{-X-1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1},$$

et

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = (X^3 - X^2 - X + 2) + \frac{-X-1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}.$$

3). Puisque le dénominateur est $(X^2+X+1)^2$ avec X^2+X+1 irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, on peut utiliser la division euclidienne pour trouver la décompositoin en éléments simples. On calcule d'abord la division euclidienne de $X^3 + X$ par $X^2 + X + 1$, on a

$$X^3 + X = (X-1)(X^2+X+1) + X + 1,$$

d'où

$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X-1}{X^2+X+1} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} \tag{8}$$

Puisque les numérateurs $X-1$ et $X+1$ sont de degré $<$ le degré du polynôme X^2+X+1, donc l'égalité (8) est la décompostion en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}$. $\square$

Exo. 5. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction rationnelle suivante :*

$$f(X) := \frac{X^7+4X^6+10X^5+16X^4+18X^3+14X^2+8X+2}{(X+1)(X^3+2X^2+2X+1)^2}$$

Corrigé : Il faut trouver d'abord la factorisation du dénominateur de cette fraction rationnelle : comme $X^3+2X^2+2X+1 = (X+1)(X^2+X+1)$ avec X^2+X+1 irréductible, on a donc

$$(X+1)(X^3+2X^2+2X+1)^2 = (X+1)^3(X^2+X+1)^2.$$

Donc la décomposition s'écrit sous la forme suivante :

$$f(X) = E(X) + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{AX+B}{X^2+X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2} \tag{9}$$

avec $E(X)$ un polynôme (= la partie entier de la fraction rationnelle $f(X)$), et a, b, c, A, B, C, D des coefficients à déterminer. Comme le numérateur de $f(X)$ est de degré 7, et le dénominateur est de degré 7, donc $E(X) = e \in \mathbb{R}$ est un polynôme de degré 0. Pour calculer la valeur de e, on fait X tendre vers ∞, on obtient $1 = e + 0 = e$. En multipliant l'identité (9) par $(X+1)^3$, on trouve

$$(X+1)^3 f(X) = c + b(X+1) + a(X+1)^2 + (X+1)^3 h(X)$$

avec

$$h(X) = e + \frac{AX+B}{X^2+X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2}$$

qui est donc continue et dérivable en $X = -1$. Posons $g(X) = (X+1)^3 f(X)$, on a

$$g(X) = \frac{X^7+4X^6+10X^5+16X^4+18X^3+14X^2+8X+2}{(X^2+X+1)^2}$$

et $c = g(-1)$, $b = g'(-1)$, et $a = g''(-1)/2$. En effectuant la division euclidienne de $X^7+4X^6+10X^5+16X^4+18X^3+14X^2+8X+2$ par $(X^2+X+1)^2 = X^4+2X^3+3X^2+2X+1$, on a

$$g(X) = X^3+2X^2+3X+2 + \frac{X}{(X^2+X+1)^2}.$$

Donc $g(-1) = -1 + 2 - 3 + 2 + \frac{-1}{1} = -1$. Or

$$g'(X) = 3X^2 + 4X + 3 + \frac{(X^2+X+1)^2 - 2X(X^2+X+1)(2X+1)}{(X^2+X+1)^4},$$

d'où $g'(-1) = 1$. De la même manière,

$$g''(X) = 6X + 4 - \frac{4(2X+1)}{(X^2+X+1)^3} - \frac{4X}{(X^2+X+1)^3} + \frac{6X(2X+1)^2}{(X^2+X+1)^4}$$

Donc $g''(-1) = 0$. On trouve ainsi la décomposition suivante :

$$f(X) = 1 + \frac{0}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-1}{(X+1)^3} + \frac{AX+B}{X^2+X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2} \tag{10}$$

Pour calculer les deux *réels* C et D, on multiplie l'identité (10) par $(X^2+X+1)^2$, et on remplace X par $\zeta = e^{2\pi i/3}$ (= une racine du polynôme X^2+X+1), on obtient

$$\left(\left(X^2+X+1\right)^2 f(X)\right)|_{X=\zeta} = C\zeta + D.$$

Posons $h(X) = \left(\left(X^2+X+1\right)^2 f(X)\right)$, on a

$$h(X) = \frac{X^7 + 4X^6 + 10X^5 + 16X^4 + 18X^3 + 14X^2 + 8X + 2}{(X+1)^3}.$$

Donc[3]

$$\begin{array}{rcl} h(\zeta) & = & \frac{\zeta^7+4\zeta^6+10\zeta^5+16\zeta^4+18\zeta^3+14\zeta^2+8\zeta+2}{(\zeta+1)^3} \\ & = & \frac{\zeta+4+10\zeta^2+16\zeta+18+14\zeta^2+8\zeta+2}{(-\zeta^2)^3} \\ & = & -(10+14)\zeta^2 - (1+16+8)\zeta - (4+18+2) \\ & = & -24\zeta^2 - 25\zeta - 24 = -\zeta. \end{array}$$

On a ainsi $C\zeta + D = -\zeta$. Commme C et D sont deux réels, on a $C = -1$ et $D = 0$. Finalement, posons $X = 0$ dans l'identité (10), on trouve

$$2 = f(0) = 1 + \frac{1}{(0+1)^2} + \frac{-1}{(0+1)^3} + \frac{A0+B}{0^2+0+1} + \frac{0}{(0^2+0+1)^2} = 1 + 1 - 1 + B.$$

Donc $B = 1$. En remplaçant X par 1 dans (10), on obtient

$$\frac{73}{72} = f(1) = 1 + \frac{0}{1+1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \frac{-1}{(1+1)^3} + \frac{A+1}{1^2+1+1} + \frac{-1}{(1^2+1+1)^2}$$

d'où finalement $A = -1$. Enfin, on a

$$f(X) = 1 + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-1}{(X+1)^3} + \frac{-X+1}{X^2+X+1} + \frac{-X}{(X^2+X+1)^2}. \qquad \square$$

3. Pour les égalités qui suivent, on utilise les deux faits suivants : $\zeta^3 = 1$, et $\zeta + 1 = -\zeta^2$.