Exercice 6.1. On numérote les 20 sujets de 1 à 20, de sorte que les sujets révisés par le candidat sont $1, 2, \cdots, 12$. Notons Ω l'ensemble des sujets tirés par le candidat. On a donc

$$\Omega = \{A \subset \Omega_0 \mid \sharp A = 2\}$$

où $\Omega_0 = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ l'ensemble des 20 sujets, et on a

$$\sharp\Omega = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{20!}{(20-2)!2!} = 190.$$

Par définition, X = le nombre de sujets révisés parmi les deux sujets tirés, donc X est une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, 2\} \subset \mathbf{R}$. En particulier, c'est une v.a. discrète.

(i) **Loi de X :** il s'agit de calculer les proba. suivantes $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, et $P(X = 2)$. Par définition, on sait l'événement $(X = 0)$="les deux sujets tirés sont parmi $\{13, 14, \cdots, 20\}$", donc

$$\sharp(X = 0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

D'où $P(X = 0) = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}$. De façon similaire, on sait l'événement $(X = 2)$ ="les deux sujets tirés sont parmi $\{1, 2, \cdots, 12\}$", donc $P(X = 2) = \sharp(X = 2)/\sharp\Omega = 66/190 = 33/95$. Enfin, on a

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = \frac{48}{95}.$$

(ii) L'événement "Le candidat obtienne au moins un sujet révisé"= $(X \geq 1)$. Donc la proba. voulue est $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{28}{190} = \frac{162}{190} = \frac{81}{95}$. □

Exercice 6.2. L'univers considéré ici est $\Omega = \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 | 1 \leq i, j \leq 6\}$, et les v.a. X_1 X_2 sont données par les formules suivantes :

$$X_1 : \Omega \to \mathbf{R}, \quad (i, j) \mapsto i$$
$$X_2 : \Omega \to \mathbf{R}, \quad (i, j) \mapsto j.$$

On obtient ainsi

$$X = \max(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbf{R}, \qquad (i, j) \mapsto \max(i, j).$$

Ses valeurs possibles sont $\{1, 2, \cdots, 6\}$.

Loi de X : pour chaque entier i $(1 \leq i \leq 6)$, notons $A_i = (X_1 = i) \cap (X_2 \leq i)$, et $B_i = (X_i \leq i) \cap (X_2 = i)$. Alors $A_i \cap B_i = (X_1 = i) \cap (X_2 = i)$, et on a $P(A_i) = P(B_i) = \frac{i}{36}$. Or on a la décomposition suivante :

$$(X = i) = (\max(X_1, X_2) = i) = ((X_1 = i) \cap (X_2 \leq i)) \cup ((X_1 \leq i) \cap (X_2 = i)) = A_i \cup B_i.$$

Donc $P(X = i) = P(A_i \cup B_i) = P(A_i) + P(B_i) - P(A_i \cap B_i) = \frac{i}{36} + \frac{i}{36} - \frac{1}{36} = \frac{2i-1}{36}$ $(\forall 1 \leq i \leq 6)$.

Espérence et variance : par définition, on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot P(X = i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{2i^2 - i}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

et

$$V(X) = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2 = \left(\sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot P(X = i) \right) - (EX)^2 = \frac{812}{36} \approx 22,56$$

□

Exercice 6.3. Par l'hypothèse, la v.a. X (resp. Y) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ (resp. $\{0, 1\}$). Donc la v.a. $Z = |X - Y|$ prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

Loi de Z **:** il s'agit donc de calculer $P(Z=0)$, $P(Z=1)$ et $P(Z=2)$. Pour $P(X=0)$, on a la décomposition suivante :

$$(Z=0) = (|X-Y|=0) = (X=Y) = (X=Y=0) \cup (X=Y=1).$$

Donc $P(Z=0) = P(X=Y=0) + P(X=Y=1)$. Or les v.a. X et Y sont indépendantes, on a $P(X=Y=0) = P((X=0)\cap(Y=0)) = P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, et $P(X=Y=1) = \frac{1}{6}$. D'où $P(Z=0) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. De la même façon, on a

$$(Z=2) = (|X-Y|=2) = (X=2)\cap(Y=0).$$

D'où $P(Z=2) = P(X=2)P(Y=0) = \frac{1}{6}$. Enfin, $P(Z=1) = 1-P(Z=0)-P(Z=2) = \frac{1}{2}$.

Espérence et variance : par définition, on a

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{2} iP(Z=i) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

et

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \sum_{i=0}^{2} i^2P(Z=i) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}.$$

□

Exercice 6.4. Notons X_i la v.a. égale à 1 si le voyageur est controlé lors du i^{e} trajets, et égale à 0 sinon. Alors X_i suit la loi de Bernouilli de paramètre p. En plus, les X_i $(1\le i\le N)$ sont indépendantes. Par conséquent la v.a. $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$ suit la loi binômiale de paramètres N et p (c-a-d, $X\hookrightarrow\mathcal{B}(N,p)$ avec la notation du cours). En particulier, pour tout $k\in\mathbf{Z}\cap[1,N]$, on a

$$P(X=k) = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right) p^k(1-p)^{N-k}$$

(ii) Notons Y la v.a. = le gain lorsque l'on ne composte jamais lors des N trajets. Alors $Y = N-40\cdot X$, où $NN\cdot 1=$ le prix des billets de tramway lors des N trajets. Donc $EY = N-40\cdot E(X) = N-40Np$. Pour dissuader le voyageur indélicat, il faut $E(Y)\le 0$, c'est-à-dire, $p\ge 1/40$. □

Exercice 6.5. On numérote les dix pièces de monnaie de 1 à 10.

(i) Notons X_i la v.a. égale à 1 si on obtient pile pour la i-ième pièce, et égale à 0 sinon. Alors $P(X_i=1)=0,3$ et X_i suit la loi de Bernouilli de paramètre p. Or les variables $X_1,\cdots,X_{10}$ sont indépendantes, on en déduit que

$$X = X_1+X_2+\cdots+X_{10}$$

suit la loi binômiale de paramètre 10 et $0,3$ (c-a-d, $X\hookrightarrow\mathcal{B}(10,0.3)$). En particulier, X prend ses valeurs dans $\{0,1,\cdots,10\}$, et quelque soit $k\in\{0,1,\cdots,10\}$, on a

$$P(X=k) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ k \end{array}\right) 0.3^k(1-0.3)^{10-k}.$$

En plus, $E(X) = 10\cdot 0,3 = 3$, et $V(X) = 10\cdot 0,3\cdot(1-0,3) = 2,1$.

(ii) La première probabilité $= P(X=3) = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}(0,3)^3(1-0,3)^{10-3} \approx 0,267$. La deuxième probabilité est

$$P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = (1-0,3)^{10}+\frac{10}{1}0,3(1-0,3)^9+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}0,3^2(1-0,3)^8 \approx 0,383.$$

(iii) La probabilité voulue est

$$P_{(X\le 5)}(X>3) = \frac{P(3<X\le 5)}{P(X\le 5)} = ...$$

□

Exercice 6.6. Par hypothèse, $N \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$. Donc la v.a. N prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\} = \mathbf{Z}_{\geq 0}$, et quelque soit $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, on a $P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, avec $\lambda = 2$.

(i) Cette probabilité $= P(N = 3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0,18$.

(ii) La probabilité voulue $= P(N > 2) = 1 - P(N \leq 2) = 1 - P(N = 0) - P(N = 1) - P(N = 2) \approx 0,32$ □

Exercice 6.7. Notons N la v.a. égale au nombre de clients, par minute, qui arrivent aux caisses du supermarché. Alors $E(N) = 0,8$. Donc $N \hookrightarrow \mathcal{P}(0,8)$.

i) C'est la proba. $P(Z = 0) = e^{-0,8} \approx 0,449$.

ii) C'est la proba. $P(Z = 1 \text{ ou } 2) = P(Z = 1) + P(Z = 2) = \frac{0,8}{1}e^{-0,8} + \frac{0,8^2}{2!}e^{-0,8} \approx 0,503$

iii) C'est la proba. $P(Z > 3) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) \approx 0,01$

□