Configurations centrales de quatre corps dans le plan

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Les candidat(e)s sont laissé(e)s libres d'organiser leur discussion comme ils ou elles l'entendent. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées à la fin. Le candidat n'est pas tenu de les suivre. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples effectivement traités sur ordinateur.

On étudie les configurations de quatre corps de même masse soumis à un potentiel gravitationnel et suivant un mouvement homothétique. Ce sont des configurations planes qui minimisent l'énergie. Utilisant les propriétés algébriques de la coplanarité, on décrit explicitement les configurations en résolvant un système d'équations polynomiales.

Introduction

La notion de *configuration centrale* apparaît naturellement quand on recherche des solutions simples des équations différentielles qui régissent le mouvement de plusieurs masses ponctuelles soumises aux lois de Newton. Un tel mouvement ne subit ni déformation, ni rotation, et change simplement de taille au cours du temps.

Les configurations centrales trouvent tout leur intérêt

1. dans la recherche de configurations particulières observées dans l'univers, par exemple le Soleil, Jupiter et les astéroïdes troyennes.
2. dans les problèmes de changements de topologie des variétés intégrales du problème général des n corps.

Les configurations centrales se caractérisent de façon simple. Nous allons expliciter toutes ces configurations dans le cas de quatre masses ponctuelles soumises à leur force de gravitation (potentiel newtonien). La résolution repose sur une étude de propriétés algébriques de configurations de quatre points coplanaires puis, admettant une propriété de symétrie, sur la résolution d'un système d'équations polynomiales.

Configurations centrales de quatre corps

Considérons 4 particules de masses $m_1, \dots, m_4$, réels strictement positifs dont la somme est notée M, soumises à leur force de gravitation. Une origine ayant été fixée, notons r_i le vecteur position de la particule i. Définissons le potentiel newtonien (énergie potentielle)

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|r_i - r_j\|}.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$m_i \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i},\ i = 1, \dots, n.$$

Le centre de gravité du système correspond à $r_c = \dfrac{1}{M}(m_1 r_1 + \cdots + m_n r_n)$ et suit un mouvement rectiligne uniforme. Nous choisissons donc pour toute la suite l'origine comme le centre de gravité du système.

Nous posons $\overrightarrow{r_{ij}} = \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j}$. Après renormalisation, on se donne une fonction réelle Φ et les deux fonctions

$$U = \sum_{1 \le i,j \le 4} m_i m_j \Phi(r_{ij}^2), \quad I = \frac{1}{M} \sum_{1 \le i,j \le 4} m_i m_j r_{ij}^2.$$

appelées *fonction de forces* et *moment d'inertie par rapport au centre de masse.* Dans le cas du potentiel newtonien, nous avons $\Phi(r^2) = 1/r$.

On utilise une caractérisation simple des configurations centrales : **ce sont les points critiques de la fonction U restreinte aux configurations planes de moment d'inertie I fixé.** Le problème est formulé en terme des 6 distances mutuelles.

Pour cela nous utilisons le fait que la coplanarité de quatre points de distances mutuelles respectives r_{ij} est équivalent à la nullité du déterminant de Cayley

$$P = \begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & 1 \\ r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

En utilisant une propriété de symétrie, nous allons expliciter les configurations centrales.

Déterminants de Cayley

Soit $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ et $C = (x_3, y_3)$ trois points dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. L'aire orientée du triangle (A, B, C) est donnée par

$$S(A, B, C) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

En posant $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, un simple calcul montre l'égalité

$$\begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16 S^2(A, B, C). \tag{3}$$

Considérons à présent quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 dans l'espace. Posons $\overrightarrow{r_{ij}} = \overrightarrow{M_i M_j}$.

Lemme 1 *Le déterminant P (équation 1) est nul si et seulement si M_1, M_2, M_3, M_4 sont coplanaires.*

Preuve. — Considérons la fonction

$$X(M) = \alpha M M_1^2 + \beta M M_2^2 + \gamma M M_3^2 + \delta M M_4^2,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre nombres réels de somme nulle. Les surfaces de niveau $X(M) = \lambda$ sont des plans perpendiculaires au vecteur $\alpha\overrightarrow{r_{14}} + \beta\overrightarrow{r_{24}} + \gamma\overrightarrow{r_{34}}$. Choisissons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de sorte que le plan en question porte $M_1M_2M_3$. On note h la hauteur issue de M_4. Alors nous obtenons

$$\lambda = \beta r_{12}^2 + \gamma r_{13}^2 + \delta r_{14}^2 = \alpha r_{12}^2 + \gamma r_{23}^2 + \delta r_{24}^2 = \alpha r_{13}^2 + \beta r_{23}^2 + \delta r_{34}^2 = \alpha r_{14}^2 + \beta r_{24}^2 + \gamma r_{34}^2 - \delta h^2.$$

On déduit alors que pour tout ω, nous avons

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \omega \\ \lambda + \omega \\ \lambda + \omega \\ \lambda + \omega - 2\delta h^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & 1 \\ r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le choix $\omega = -\lambda$ donne, en résolvant le système pour δ,

$$\delta \det(A) = -2\delta h^2 \begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

soit $P = \det A = 288V^2$ où V est le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$.

Configurations planes

Considérons à présent quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 dans le plan, non alignés. Posons

$$\Delta_1 = S(M_2, M_3, M_4), \Delta_2 = -S(M_1, M_3, M_4) = S(M_4, M_3, M_1) \tag{5}$$
$$\Delta_3 = S(M_1, M_2, M_4), \Delta_4 = -S(M_1, M_2, M_3) = S(M_3, M_2, M_1). \tag{6}$$

Des déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on déduit que $\sum_{i=1}^{4} \Delta_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{4} \Delta_i \overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{0}$. Ici, on a posé $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{OM_i}$ où O est une origine du repère.

Ces propriétés ne sont rien d'autres que l'expression des coordonnées barycentriques d'un point dans un triangle. On en déduit alors que l'expression

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta_i \left\| \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r} \right\|^2$$

est constante et en particulier, si $r_{ij} = \left\| \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_j} \right\|$, que

$$\sum_{j \neq i} \Delta_j r_{ij}^2 = \lambda, \; i = 1, \ldots, 4. \tag{7}$$

On déduit également le fait que

$$\sum \Delta_i \Delta_j r_{ij}^2 = 0. \tag{8}$$

L'équation (7) montre que le noyau de A (définie en (4)) est engendré par le vecteur $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, -\lambda)$. On déduit le

Lemme 2 *Lorsque les M_i, $1 \leq i \leq 4$, sont coplanaires, il existe une constante σ telle que*

$$\frac{\partial P}{\partial r_{ij}^2} = 2\sigma \Delta_i \Delta_j. \tag{9}$$

Preuve. — Soit l'application $\phi : X \mapsto \det X$. Notons X^* la comatrice de X, c'est-à-dire la transposée de la matrice des cofacteurs de X. On a $\dfrac{\partial \phi}{\partial X_{i,j}} = X^*_{i,j}$.

Soit A une matrice de rang $n-1$ et $(V_1, \ldots, V_n)$ un vecteur non nul du noyau de A. On a $A^*A = AA^* = 0$. On déduit alors que les colonnes de A^* sont dans le noyau de A donc proportionnelles à $(V_1, \ldots, V_n)$.

Si A est de plus une matrice symétrique, alors A^* est symétrique et on déduit aussi que les lignes de A^* sont proportionnelles au même vecteur et donc $A^*_{ij} = \sigma V_i V_j$.

Dans le cas qui nous préoccupe, considérant la composée de fonctions

$$\psi : (r_{12}^2, \ldots, r_{34}^2) \mapsto A \mapsto \det(A),$$

on déduit, en utilisant que $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, -\lambda)$ engendre $\ker A$, que

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_{ij}^2} = A^*_{ij} + A^*_{ji} = 2A^*_{ij} = 2\sigma \Delta_i \Delta_j$$

Remarque. — Considérant que $A^*_{1,1} = -16\Delta_1^2$, on déduit $\sigma = -16$.
On retrouve d'ailleurs, l'équation (8) en utilisant l'homogénéité de la fonction ϕ.

Détermination des configurations centrales

Nous recherchons les configurations centrales dans le cas d'un potentiel newtonien ($\Phi(r^2) = 1/r$) et de quatre masses égales.

De la caractérisation des configurations centrales, nous déduisons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}^2}, \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2}, \frac{\partial P}{\partial r_{ij}^2},$$

sont liées et puisque les quatre points sont supposés non alignés, nous déduisons l'existence, pour chaque configuration, de deux réels u et v tels que

$$\Phi'(r_{ij}^2) = u + v\Delta_i \Delta_j. \tag{10}$$

La détermination des configurations centrales de quatre corps coplanaires équivaut à la résolution du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \exists \lambda \in \mathbb{R} & ; & \sum\limits_{j \neq i} \Delta_j r_{ij}^2 = \lambda,\ i = 1, \ldots, 4 \\ & & \sum\limits_{1 \leq i \leq 4} \Delta_i = 0. \end{array} \right. \tag{11}$$

$$\exists u, v \in \mathbb{R} \quad ; \quad \Phi'(r_{ij}^2) = u + v\Delta_i \Delta_j,\ 1 \leq i < j \leq 4, \tag{12}$$

Nous allons de plus faire une hypothèse de symétrie : *il existe un axe de symétrie contenant deux des corps.* Cette hypothèse a en fait été démontrée en toute généralité pour quatre corps si on suppose que la fonction Φ est convexe et de dérivée concave. C'est le cas par exemple pour $\Phi(r) = r^{-1/2}$.

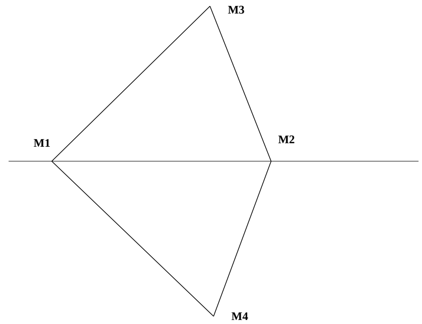

Fig. 1 – Symétrie de la configuration centrale

La preuve repose d'une part sur la distinction entre configurations convexes (c'est-à-dire aucun des sommets n'est dans l'enveloppe convexe des trois autres) et non convexes et sur le fait que les équations (11,12) entraînent des équations entre déterminants, lesquels ont un signe imposé par l'hypothèse de concavité.

Pour résoudre le système, nous allons donc supposer que la configuration possède un axe de symétrie contenant les corps 1 et 2. Cette hypothèse entraîne que $r_{13}^2 = r_{14}^2 = b$ et que $r_{23}^2 = r_{24}^2 = d$. Ces conditions entraînent que $\Delta_3 = \Delta_4$. Posant $r_{12}^2 = a$, $r_{34}^2 = f$, on obtient

$$\Delta_2 a + 2\Delta_3 b = \Delta_1 a + 2\Delta_3 d = \Delta_1 b + \Delta_2 d + \Delta_3 f,\ \Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta_3 = 0 \tag{13}$$

Résolution des équations

Indépendamment du potentiel Φ, on traite d'abord la coplanarité. Le système (13) devient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta_1 = \Delta_3(-1-t) & , & \Delta_2 = \Delta_3(-1+t) \\ 4b = f + a(1-t^2) & , & 4d = f + (1+t)^2 a. \end{array} \right. \tag{14}$$

et le système (12)

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \Phi'(a) & = & a^{-3/2} & = & u + v\Delta_3^2(1-t^2), \\ \Phi'(b) & = & b^{-3/2} & = & u - v\Delta_3^2(1+t), \\ \Phi'(f) & = & f^{-3/2} & = & u + v\Delta_3^2, \\ \Phi'(d) & = & d^{-3/2} & = & u - v\Delta_3^2(1-t). \end{array} \right. \tag{15}$$

On pose ici $a = 1$, qui est un choix de normalisation. On peut poser $\Delta_3^2 = 1$, ce qui revient à remplacer en fait v par v/Δ_3^2. Enfin, posons $f = z^2$ (avec $z \geq 0$). Le nouveau système à traiter devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi'(1) & = & u + v(1-t^2), \\ \Phi'(b) & = & u - v(1+t), \\ \Phi'(z^2) & = & u + v, \\ \Phi'(d) & = & u - v(1-t). \end{array} \right. \tag{16}$$

Potentiel newtonien

Ici $\Phi'(z) = z^{-3/2}$. On obtient tout de suite, en résolvant la première et le troisième équation de (16)

$$v = \frac{1 - z^3}{z^3 t^2},\ u = \frac{(t^2 - 1) + z^3}{z^3 t^2}. \tag{17}$$

Ici, $t=0$ fournit le carré comme configuration centrale.

Une fois u et v imposés, on a

$$b^{-3} = (1/4(z^2+(1-t)^2))^{-3} = (u-v(1+t))^2, \tag{18}$$
$$d^{-3} = (1/4(z^2+(1+t)^2))^{-3} = (u-v(1-t))^2. \tag{19}$$

L'équation (18) fournit donc une équation polynomiale $P(z,t)=0$ tandis que l'équation (19) fournit $P(z,-t)$. On déduit alors deux équations

$$A(z,t^2) = \frac{1}{2t}(P(z,t)-P(z,-t)) = 0,\ B(z,t^2) = \frac{1}{2}(P(z,t)+Q(z,t)) = 0.$$

Ces deux derniers polynômes, s'écrivent, en posant $t^2=T$,

$$\begin{aligned} A = &-(z^3-4)\,T^4 + (z^6-5\,z^3-3\,z^5+9\,z^2+14)\,T^3 \\ &-(-6\,z^5-6\,z^4+3\,z^7+8\,z^6-41\,z^3+30)\,T^2 \\ &-(z^3-1)\,(3\,z^7+z^6+6\,z^5-12\,z^4-13\,z^3-27\,z^2+2)\,T \ -2\,(z^2-5)\,(z^3-1)^2\,(z^2+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &-T^5-(-10\,z^3+z^6+24+3\,z^2)\,T^4 \ -(3\,z^8-5\,z^6-18\,z^5+3\,z^4+30\,z^3-10+33\,z^2)\,T^3 \\ &-(-18\,z^8+3\,z^{10}+84\,z^5-52-63\,z^2-68\,z^6+6\,z^4-6\,z^7+58\,z^3)\,T^2 \\ &-(z^3-1)\,(z^2+1)\,(z^7-10\,z^5+3\,z^4+37\,z^3+18\,z^2-33)\,T \ -4\,(z^3-1)^2\,(z^2+1)^3 \end{aligned}$$

Recherche des solutions

Dans un premier temps, nous recherchons les valeurs de z pour lesquelles, A et B ont des solutions en T communes. Ce sont les zéros du résultant $S(z) = \mathrm{Res}_T(A,B)$. On obtient

$$S(z) = z^{12}\,(z^2-3)(z^2+1)^3\,(z^3-1)^4 S_{37}(z)$$

où

$$\begin{aligned} S_{37}(z) = &\ z^{37} \ -61\,z^{34} \ +336\,z^{33} \ -240\,z^{32} \ +2052\,z^{31} \ -12120\,z^{30} \ +8400\,z^{29} \ -30456\,z^{28} \\ &+175113\,z^{27} \ -88548\,z^{26} \ +241040\,z^{25} \ -1364385\,z^{24} \ +338994\,z^{23} \ -1081984\,z^{22} \\ &+6241506\,z^{21} \ +642162\,z^{20} \ +2319507\,z^{19} \ -15790278\,z^{18} \ -12287376\,z^{17} \ +1386909\,z^{16} \\ &+11212992\,z^{15} \ +55894536\,z^{14} \ -19889496\,z^{13} \ +53738964\,z^{12} \ -128353329\,z^{11} \\ &+44215308\,z^{10} \ -172452240\,z^9 \ +160917273\,z^8 \ -42764598\,z^7 \ +217615248\,z^6 \\ &-115440795\,z^5 \ +17124210\,z^4 \ -139060395\,z^3 \ +39858075\,z^2 \ +39858075 \end{aligned}$$

Pour $z=1$, on obtient un carré tandis que pour $z=\sqrt{3}$, nous obtenons un triangle équilatéral.

La méthode de Sturm fournit pour S_{37} trois solutions réelles, dont les valeurs approchées sont

$$z_1 = -1.414231784,\ z_2 = 1.046899386,\ z_3 = 1.714000326.$$

Nous excluons z_1 qui est négative, z_2 qui fournit une racine T négative. Il reste z_3, pour laquelle la solution commune T vaut approximativement $T = 4.502618890$.

On obtient alors les valeurs des côtés :

$$r_{12} = r_{13} = r_{14} = 1,\ r_{23} = r_{24} = r_{34} = \sqrt{3} \tag{20}$$
$$r_{12} = 1, r_{13} = r_{14} \simeq 1.022308938, r_{23} = r_{24} \simeq 1.777600765, r_{34} \simeq 1.714000326 \tag{21}$$
$$r_{12} = r_{34} = 1, r_{13} = r_{14} = r_{23} = r_{24} = 1/\sqrt{2} \tag{22}$$

Les solutions (22) correspondent au carré (seule configuration convexe), les solutions (20) au triangle équilatéral et les solutions (21) à un certain triangle. Ces configurations sont dessinées dans la figure (2).

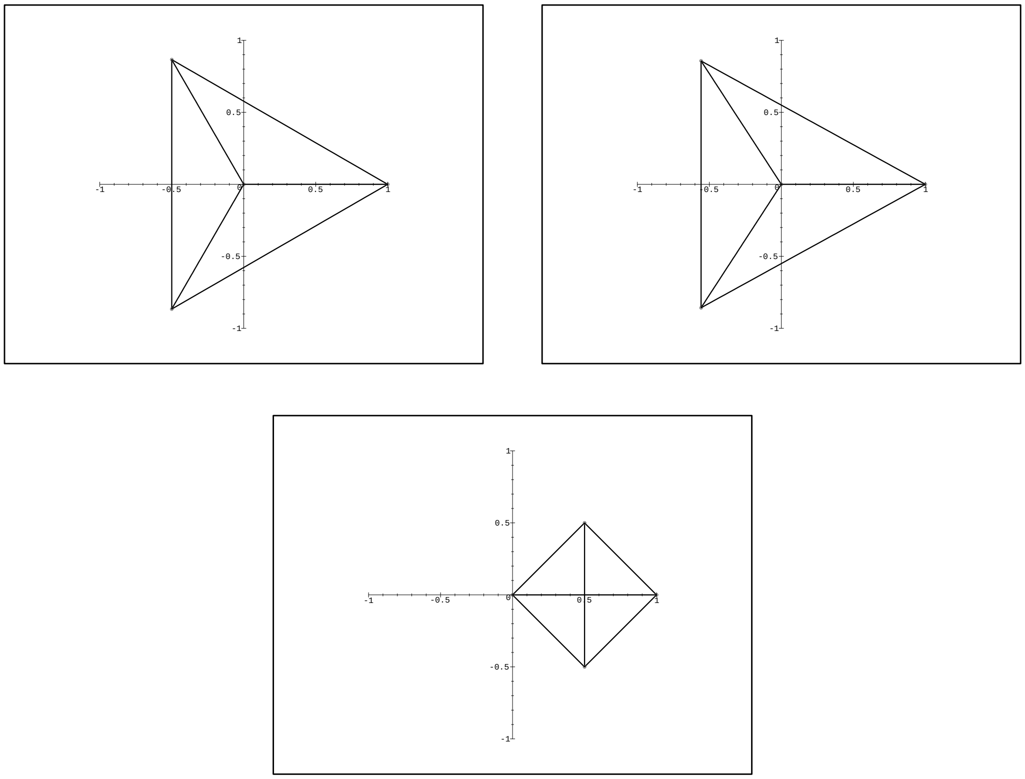

FIG. 2 – Carré, triangle équilatéral, triangle

Suggestions de développement

Le texte a été découpé en quatre parties qui peuvent être étudiées indépendamment.

Dans la dernière partie qui concerne la mise en forme du système (10), le candidat remarquera que le système (14) exprime la coplanarité et est donc utilisable pour tout potentiel Φ. En ce qui concerne l'expression des polynômes dont on cherche des zéros, le candidat n'essaiera pas de les recopier mais de les recalculer avec un logiciel de calcul formel.

Le candidat pourra répondre à tout ou partie des questions suivantes.

1. Justifier brièvement l'équation (2).
2. Vérifier par le calcul et l'aide d'un logiciel la nullité de P.
3. Vérifier par le calcul et l'aide d'un logiciel le lemme 2.
4. Justifier l'équation (10)
5. Trouver les configurations centrales dans le cas d'un potentiel logarithmique $\Phi(r^2) = \log r$. Le candidat pourra suivre la même méthode que pour le potentiel newtonien.