Arch. Math. 77 (2001) 253–264
0003-889X/01/030253-12 $ 3.90/0

Sonderdruck aus
Archiv der Mathematik

Fonctions intérieures et vecteurs bicycliques

Par

K. Kellay

Abstract. We consider weights ω on $\mathbb{Z}$ such that $\omega(n) \to 0$ as $n \to +\infty$, $\omega(n) \to +\infty$ as $n \to -\infty$, and satisfying some regularity conditions. Set

$$l^2_\omega = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|u\|_\omega = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 \omega(n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$

and denote by $S_\omega\ : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ the usual shift on l^2_ω. We show that if

$$\sum_{n\geqq 1} \frac{n}{\ln \omega(-n)} (2\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} - \omega(n+1)^{-2}) < +\infty,$$

then there exists a singular inner function U such that $\widehat{U} = (\widehat{U}(n))_{n\geqq 0}$ is not bicyclic in l^2_ω, that is, the closure of $\mathrm{Span}\{S^n_\omega \widehat{U} : n \in \mathbb{Z}\}$ is a proper subspace of l^2_ω.

1. Introduction. Un poids ω est une application $\omega : \mathbb{Z} \to]0, +\infty[$ telle que $\omega(0) = 1$ et vérifiant

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} \leqq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)} < +\infty,$$

$$\lim_{|n|\to+\infty} \tilde{\omega}(n)^{\frac{1}{|n|}} = 1\ , \quad \text{où} \quad \tilde{\omega}(n) = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+m)}{\omega(m)}.$$

Soit l^2_ω l'espace de Hilbert des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\|u\|_\omega = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 \omega(n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

On note $S_\omega : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ le shift usuel sur l^2_ω. Puisque ω est un poids, $\|S^n_\omega\| = \tilde{\omega}(n) (n \in \mathbb{Z})$ et le spectre de S_ω est le cercle unité $\mathbb{T}$. Un sous–espace fermé B de l^2_ω est dit invariant si $S_\omega B \subset B$ et il est dit biinvariant si $S_\omega B = B$. Soit $u \in l^2_\omega$; on désigne par $B(u)$ l'adhérence de $\mathrm{Span}(S^n_\omega u\ , n \in \mathbb{Z})$ dans l^2_ω. Le vecteur u est dit bicyclique lorsque $B(u) = l^2_\omega$. Notons que lorsque u n'est pas bicyclique, $B(u)$ est un sous–espace biinvariant non trivial.

Dans le cas où le poids ω vérifie $\omega(n) = 1$ pour $n \geqq 0$ et $\omega(n) \to +\infty$ quand $n \to -\infty$, Esterle dans [6, Theorem 5.7] a montré qu'il existe une fonction intérieure singulière U non

---

Mathematics Subject Classification (1991): Primary 47A15; Secondary 46A15, 47B37.

bicyclique dans L^2_ω, où

$$L^2_\omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \|f\|_\omega = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \omega(n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

Notons que dans ce cas on peut identifier l^2_ω à $\widehat{L^2_\omega}$, où $\widehat{L^2_\omega}$ désigne l'ensemble des transformées de Fourier de L^2_ω. D'où le shift S_ω sur l^2_ω est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication T_ω défini par $T_w(f) = \alpha f$ pour $f \in L^2_\omega$, où $\alpha : e^{it} \to e^{it}$. Notons également que dans le cas où $\omega(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, une caractérisation complète des sous–espaces biinvariants de $L^2(\mathbb{T})$ a été donnée par Wiener. Il a montré en particulier que toute fonction intérieure singulière est bicyclique dans $L^2(\mathbb{T})$.

Dans ce travail nous considérons un poids ω tel que $\omega(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $\omega(n) \to +\infty$ quand $n \to -\infty$. Nous montrons, sous certaines conditions de régularité sur ω (voir définition 3.4), que si

$$\sum_{n\geqq 1} \frac{n}{\ln \omega(-n)} (2\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} - \omega(n+1)^{-2}) < +\infty,$$

alors il existe une fonction intérieure singulière U telle que sa transformée de Fourier $\widehat{U} = (\widehat{U}(n))_{n\geqq 0}$ est non bicyclique dans l^2_ω. Ceci s'obtient grâce à un résultat de Ahern [1, Theorem 2.5] sur le lien entre les coefficients de Fourier d'une fonction intérieure singulière et son support.

Lorsque $\omega(n) = (1+n)^{-\gamma}$, $n \geqq 0$, où $\gamma > 0$, nous mettons en évidence une fonction intérieure singulière U telle que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω si $\sum_{n\geqq 1} \frac{1}{n \ln \omega(-n)}$ converge. Par contre, lorsque cette série diverge, nous montrons que la transformée de Fourier de toute fonction intérieure singulière est bicyclique dans l^2_ω. Nous terminons ce travail par une application d'un résultat de Shamoyan [12, Theorem 2] qui nous permet d'avoir l'existence d'une fonction intérieure singulière U telle que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans le cas où $\frac{\ln \omega(-n)}{\sqrt{|n|}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\sum_{n\geqq 1} \frac{|\ln \omega(n)|}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.

Je tiens à remercier le référé pour ses nombreuses suggestions et remarques fructueuses qui ont permis d'améliorer ce travail.

2. Notations et preliminaires. On pose $\omega_*(n) = \omega(-n)^{-1}$ et on identifie le dual de l^2_ω à $l^2_{\omega*}$ par la formule

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_{-n}, \ \left(u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_\omega, v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\omega*}\right).$$

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_\omega$ et $v = (v_{-n})_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\omega*}$; puisque

$$\left\langle S^{-n}_\omega u, v\right\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m v_{n-m} = (u * v)_n \ (n \in \mathbb{Z}),$$

alors v est orthogonale à $\overline{\mathrm{Span}}(S^n_\omega u, n \in \mathbb{Z})$ si et seulement si $(u * v)_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Une hyperfonction est une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ qui s'annule à l'infini. On notera par $\mathscr{H}(\mathbb{T})$ l'ensemble de toutes les hyperfonctions. Soit $\psi \in \mathscr{H}(\mathbb{T})$, on pose $\psi^+ = \psi_{|\mathbb{D}}$, $\psi^- = \psi_{|\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}}$ et on note $\psi = (\psi^+, \psi^-)$. Les coefficients de Fourier de ψ sont définis par :

$$\psi^+(z) = \sum_{n\geqq 1} \widehat{\psi}(n) z^{n-1} \text{ pour } |z| < 1 \quad \text{et}$$
$$\psi^-(z) = -\sum_{n\leqq 0} \widehat{\psi}(n) z^{n-1} \text{ pour } |z| > 1.$$

Le support de $\psi \in \mathscr{H}(\mathbb{T})$, noté $\operatorname{supp}\psi$, est le plus petit fermé E de $\mathbb{T}$ tel que ψ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash E$. On pose

$$\mathscr{H}_\omega(\mathbb{T}) = \left\{ \psi \in \mathscr{H}(\mathbb{T}) : \|\psi\|_{\omega*} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\psi}(n)|^2}{\omega(-n)^{-2}} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}.$$

A $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\omega*}$, on associe les fonctions

$$v^+(z) = \sum_{n\geqq 1} v_n z^{n-1} \text{ pour } |z| < 1 \quad \text{et} \quad v^-(z) = -\sum_{n\leqq 0} v_n z^{n-1} \text{ pour } |z| > 1.$$

On pose $\tilde{v} = (v^+, v^-)$. La transformée de Fourier $\mathscr{F} : \psi \to \widehat{\psi} = (\widehat{\psi}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une bijection de $\mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$ vers $l^2_{\omega*}$ et $\mathscr{F}^{-1}(v) = \tilde{v}$.

Soit μ une mesure positive singulière sur $\mathbb{T}$. On définit la fonction intérieure singulière U associée à μ par

$$U(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\mu(t) \right).$$

Puisque $\sum_{n\geqq 0} |\widehat{U}(n)|^2 = 1$, il est clair que $\widehat{U} = (\widehat{U}(n))_{n\geqq 0} \in l^2_\omega$ lorsque $\sup_{n\geqq 0} \omega(n) < +\infty$.

On définit l'hyperfonction U^* associée à U par

$$U^*(z) = \frac{1}{U(z)} - \frac{1}{U(\infty)}, \; z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T},$$

où $U(\infty) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\mu(t) \right)$. Notons que le support de U^* est le support de la mesure μ et que $\sum_{n\leqq 0} |\widehat{U^*}(n)|^2 < +\infty$. Mentionnons aussi que $\widehat{U} * \widehat{U^*} = 0$, [6, Lemme 3.7], donc pour montrer que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω, il suffit de montrer que $U^* \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$.

3. Fonction interieure non bicyclique. On dira qu'une suite $(x_n)_{n\geqq 0}$ est concave lorsque $2x_n \geqq x_{n-1} + x_{n+1}$ pour $n \geqq 1$. Elle est dite log–concave si la suite $(\ln x_n)_{n\geqq 0}$ est concave.

On a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Soit* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $\omega(0) = 1$, $\omega(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $(\omega(n)^{-2})_{n\geqq 0}$ *est concave et* $\dfrac{\omega(n)^{-2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. *Alors, il existe une fonction positive* Ω_ω *sommable sur* $[0, 1]$ *telle* *que pour tout $n \geqq 1$*

$$\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \Omega_\omega(r)dr.$$

P r e u v e. Soit $(a_n)_{n\geqq 1}$ une suite positive, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. On pose

$$A(r) = k(k+1)(a_k - a_{k+1}) \text{ pour } 1 - \frac{1}{k} \leqq r \leqq 1 - \frac{1}{k+1}.$$

On a pour tout $n \geqq 1$

$$a_n = \sum_{k\geqq n} a_k - a_{k+1} = \sum_{k\geqq n} \int_{1-\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k+1}} A(r)dr = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} A(r)dr.$$

La suite $(\omega(n)^{-2})_{n\geqq 0}$ est concave, donc la suite $(a_n)_{n\geqq 1} = (\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2})_{n\geqq 1}$ est positive décroissante et $a_n \leqq \dfrac{\omega(n)^{-2}}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\square$

Soient f et g deux fonctions à valeurs positives définies sur (a,b). On utilisera la notation $f(r) \asymp g(r)$, lorsqu'il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que $c f(r) \leqq g(r) \leqq C f(r)$ pour tout $r \in (a, b)$.

Lemme 3.2. *Soit $(\omega(n))_{n\geqq 0}$ une suite vérifiant les conditions du lemme* 3.1. *Alors pour toute fonction intérieure singulière, il existe $c > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$c\sum_{n\geqq 1} \frac{|\widehat{U}(n)|^2}{\omega(n)^2} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1-|U(re^{i\theta})|^2}{1-r}\Omega_\omega(r)drd\theta \leqq C\sum_{n\geqq 1} \frac{|\widehat{U}(n)|^2}{\omega(n)^2}.$$

P r e u v e.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqq 1} \frac{|\widehat{U}(n)|^2}{\omega(n)^2} &= \sum_{n\geqq 1} |\widehat{U}(n)|^2 \sum_{1\leqq k\leqq n} \left(\frac{1}{\omega(k)^2} - \frac{1}{\omega(k-1)^2}\right) \\
&= \sum_{k\geqq 1} \left(\frac{1}{\omega(k)^2} - \frac{1}{\omega(k-1)^2}\right) \sum_{n\geqq k} |\widehat{U}(n)|^2 \\
&= \sum_{k\geqq 1} \left(\sum_{n\geqq k} |\widehat{U}(n)|^2\right) \int_{1-\frac{1}{k}}^{1} \Omega_\omega(r)dr \\
&= \int_0^1 \Omega_\omega(r) \sum_{1\leqq k\leqq \frac{1}{1-r}} \left(\sum_{n\geqq k} |\widehat{U}(n)|^2\right) dr.
\end{aligned}$$

D'après [1, Lemma 3.1], on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|U(re^{i\theta})|^2}{1-r} d\theta \asymp \sum_{1\leqq k\leqq \frac{1}{1-r}} \left(\sum_{n\geqq k} |\widehat{U}(n)|^2\right),$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

R e m a r q u e 3.3. Soit $\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{T})$. On pose $\varphi_+ = \varphi_{|\mathbb{D}}$, la restriction de φ au disque unité $\mathbb{D}$, et $\varphi_-(z) = \frac{1}{z}\overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$, pour $0 < |z| < 1$. Lorsque $(\omega(-n))_{n \geqq 0}$ et $(n\omega(n))_{n \geqq 0}$ sont log–concaves et tendent vers l'infini, on sait d'après [6, Lemma 5.2], qu'il existe β_+ et β_- deux fonctions continues à valeurs dans $(0, +\infty)$ et sommables sur $[0, 1]$ telles que $\omega(n) \asymp \omega_{\beta_+}(n)$ pour $n \leqq 0$ et $n\omega(n) \asymp \omega_{\beta_-}(n)$ pour $n \geqq 0$, où

$$\omega_{\beta_\pm}(n) = \left(\int_0^1 r^{2|n|}\beta_\pm(r)dr\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il découle immédiatement de [6, Lemma 5.4] qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ telles que

$$c\|\varphi\|^2_{\omega_*} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(|\varphi_+(re^{i\theta})|^2\beta_+(r) + |(\varphi_-)'(re^{i\theta})|^2\beta_-(r)\right)r^2 dr d\theta \leqq C\|\varphi\|^2_{\omega_*}.$$

D é f i n i t i o n 3.4. Soit ω un poids; on dit que que ω vérifie la condition S si

S_1 : $\omega(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $(\omega(n)^{-2})_{n\geqq 0}$ est concave et $\dfrac{\omega(n)^{-2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

S_2 : $\dfrac{\omega(-n)}{n^\alpha} \underset{n\to-\infty}{\to} +\infty$ et $\left(\dfrac{\omega(-n)}{n^\alpha}\right)_{n\geqq 1}$ est log–concave pour un certain $\alpha > \frac{1}{2}$.

S_3 : $\left(\dfrac{\ln\omega(-n)}{n^\beta}\right)_{n\geqq 1}$ est décroissante pour un certain $\beta < \frac{1}{2}$.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.5. *Soit ω un poids vérifiant S. Si*

$$\sum_{n\geqq 1}\frac{n}{\ln\omega(-n)}(2\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} - \omega(n+1)^{-2}) < +\infty, \tag{3.1}$$

alors il existe une fonction intérieure singulière U telle que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω.

P r e u v e. On pose $\omega_\alpha(n) = \omega(-n)/n^\alpha$ pour $n \geqq 1$. Soit $v(r) = \sup_{n\geqq 1} r^n\omega_\alpha(n)$ $(0 < r < 1)$ et soit $h(r) = r\ln v(1-r)$. Puisque ω satisfait S_2 et S_3, la fonction h est continue sur $[0, 1]$, croissante, $h(0) = 0$, $h(r_1 + r_2) \leqq h(r_1) + h(r_2)$ et $\dfrac{h(r)}{r} \underset{r\to 0+}{\to} +\infty$ (voir [10, Lemme 2.1]). Selon le théorème de Ahern [1, Theorem 2.5], il existe une mesure singulière μ telle que son module de continuité

$$\rho_\mu(t) := \sup\{\mu([\theta, \theta + t)) : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\} = O(h(t))(t \to 0+)$$

et la fonction intérieure singulière U associée à μ vérifient

$$1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|U(re^{i\theta})|^2 d\theta \asymp \frac{1-r}{\delta(r)}, \tag{3.2}$$

où

$$\delta(r) = \inf\left\{\delta : \frac{h(\delta)}{\delta^2} \leqq \frac{1}{1-r}\right\}, 0 \leqq r < 1.$$

Puisque $\rho_\mu(1-r) = O(h(1-r))(r \to 1-)$, il résulte de l'inégalité de Shapiro [13] que

$$|U(re^{it})| \geqq \exp\left(-C\frac{h(1-r)}{1-r}\right) = v(r)^{-C}\ , r < 1, \tag{3.3}$$

pour une certaine constante $C > 0$. Sans perte de généralité, on supposera que $C = 1$ (considérer la mesure μ/C au lieu de μ).

Considérons maintenant l'hyperfonction U^* donnée par

$$U^*(z) = \frac{1}{U(z)} - \frac{1}{U(\infty)} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}).$$

Notons que

$$v(r) = r^n\omega_\alpha(n) \text{ pour } r \in \left[\frac{\omega_\alpha(n-1)}{\omega_\alpha(n)}, \frac{\omega_\alpha(n)}{\omega_\alpha(n+1)}\right],$$

car ω vérifie la condition S_2 (voir [10, Lemme 2.1]). En combinant ceci avec (3.3), et les inégalités de Cauchy appliquées à $U^*_{|\mathbb{D}}$, on a pour tout $n \geqq 1$, $|\widehat{U}^*(n)| \leqq \text{const}\ \omega_\alpha(n)$ et $\alpha > 1/2$. Donc

$$\sum_{n\geqq 0}\frac{|\widehat{U}^*(n)|^2}{\omega(-n)^2} < +\infty.$$

D'autre part, d'après le lemme 3.2 et l'inégalité (3.2)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqq -1}\frac{|\widehat{U}^*(n)|^2}{\omega(-n)^2} &\leqq \text{ Const } \sum_{n\geqq 1}\frac{|\widehat{U}(n)|^2}{\omega(n)^2}\\ &\leqq \text{ Const } \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1-|U(re^{i\theta})|^2}{1-r}\Omega_\omega(r)drd\theta\\ &\leqq \text{ Const } \int_0^1\frac{\Omega_\omega(r)}{\delta(r)};\end{aligned}$$

le lemme 3.6 ci-dessous permet alors de conclure. □

Lemme 3.6. *La condition* (3.1) *est satisfaite si et seulement si,*

$$\int_0^1\frac{\Omega_\omega(r)}{\delta(r)}dr < +\infty.$$

P r e u v e. Supposons que (3.1) est satisfaite. Soit K la fonction continue, affine sur les intervalles $[n, n+1]$ et telle que $K(n) = \dfrac{\ln\omega(-n)}{n}$. La fonction K est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} K(n) = 0$. On pose alors $N(\delta) = K^{-1}(2\delta)$ pour $0 < \delta < \dfrac{\ln\omega(-1)}{2}$. D'après [10], on a $\delta N(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} +\infty$ et pour δ proche de $0+$,

$$\ln v(1-\delta) \geqq \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\delta}N\left(\ln\frac{1}{1-\delta}\right).$$

Puisque $\delta(r) = \inf\left\{\delta : \dfrac{\ln v(1-\delta)}{\delta} \leqq \dfrac{1}{1-r}\right\}$ et $\delta(r) \underset{r\to 1-}{\to} 0$, pour r proche de $1-$,

$$\begin{aligned}\delta(r) &\geqq \text{Const } \inf\left\{\delta : N(\delta) \leqq \frac{1}{1-r}\right\}\\ &\geqq \text{Const } K\left(\frac{1}{1-r}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\Omega_\omega(r)}{\delta(r)} &\leqq \text{Const} \int_0^1 \frac{\Omega_\omega(r)}{K(1/(1-r))}dr\\ &\leqq \text{Const} \sum_{n\geqq 1} \frac{1}{K(n)} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} \Omega_\omega(r)dr\\ &\leqq \text{Const} \sum_{n\geqq 1} \frac{n}{\ln \omega(n)} (2\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} - \omega(n+1)^{-2}).\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\displaystyle\int_0^1 \frac{\Omega_\omega(r)}{\delta(r)}dr < +\infty$, on pose $M(\delta) = K^{-1}(\delta/2)$, $0 < \delta < 2\ln\omega(-1)$. Selon [10], on a $\delta M(\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} +\infty$ et pour δ proche de $0+$,

$$\ln v(1-\delta) \leqq \ln \frac{1}{1-\delta} M\left(\ln \frac{1}{1-\delta}\right).$$

Donc $\delta(r) \leqq \text{Const } K\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$, et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\Omega_\omega(r)}{\delta(r)} &\geqq \text{Const} \int_0^1 \frac{\Omega_\omega(r)}{K(1/(1-r))}dr\\ &\geqq \text{Const} \sum_{n\geqq 1} \frac{n}{\ln \omega(n)} (2\omega(n)^{-2} - \omega(n-1)^{-2} - \omega(n+1)^{-2}),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Remarque 3.7. Lorsque $\omega(n) = (1+|n|)^\gamma$, $n \leqq 0$, pour un certain $\gamma > 1$, la condition (3.1) devient

$$\sum_{n\geqq 2} \left(n(\ln n)^2(\omega(n))^2\right)^{-1} < +\infty,$$

et on peut alors choisir $\omega(n) = (\ln(n+e))^{-(\epsilon+1/2)}$, $n \geqq 0$, pour un certain $\epsilon > 0$.

4. Apparition et disparition de fonction interieure bicyclique. Soit N la classe de Nevanlinna, l'ensemble de toutes les fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ qui s'écrivent comme quotient de deux fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$. Si $f \in N\backslash\{0\}$, on note $D(f)$ le P.G.C.D des facteurs intérieurs des fonctions $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ telles que $gf \in H^\infty(\mathbb{D})$.

La classe de Smirnov N^+ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in N$ dont le dénominateur de f est une fonction extérieure.

Soit $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. On pose

$$\mathscr{A}^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{D}) : f^{(n)} \in \mathscr{A}(\mathbb{D}) \text{ pour tout } n \geqq 0\}.$$

Soit $\gamma > 0$, on pose

$$B_\gamma = \left\{ f \text{ holomorphe sur } \mathbb{D} : \sum_{n \geqq 0} \frac{|\widehat{f}(n)|^2}{(1+n)^{2\gamma}} < +\infty \right\}.$$

Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{T}$; on dit que E est un ensemble de Carleson lorsque

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{2}{\operatorname{dist}(e^{it}, E)}\right) dt < +\infty.$$

Taylor et Williams [16] ont montré que E est un ensemble de Carleson si et seulement si il existe une fonction non nulle $f \in \mathscr{A}^\infty(\mathbb{D})$ extérieure plate sur E, c'est–à–dire $f_{|E}^{(n)} \equiv 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons aussi que Shapiro–Korenblum et Roberts [14], [11], [17], [15] ont montré qu'une fonction intérieure singulière U est cyclique dans B_γ pour le shift, $\overline{\operatorname{Span}}\{z^n U : n \in \mathbb{N}\} = B_\gamma$, si et seulement si la mesure singulière μ associée à U ne porte pas de masse sur aucun ensemble de Carleson (i.e. $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble E de Carleson).

Lorsque le poids ω vérifie $\omega(n) = e^{|n|/\ln(1+|n|)}$, $n \leqq 0$ et $\omega(n) = (1+n)^{-\frac{1}{2}}$, $n \geqq 0$, Esterle et Volberg, dans [7], [9], ont donné une caractérisation complète des sous–espaces biinvariants pour le shift dans l^2_ω. Ils ont montré en particulier que la transformée de Fourier de certaines fonctions intérieures singulières (les fonctions Bergman-intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$) ne sont pas bicycliques dans l^2_ω. Pour certains poids non–quasianalytiques, on a le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit ω un poids vérifiant S_2 et S_3 et tel que $\omega(n) = (1+n)^{-\gamma}$, $n \geqq 1$, pour une certaine constante $\gamma > 0$. Alors la transformée de Fourier de toute fonction intérieure singulière est bicyclique dans l^2_ω si et seulement si*

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n \ln \omega(-n)} = +\infty. \tag{4.1}$$

P r e u v e. Supposons que la condition (4.1) est satisfaite. On fera un raisonnement par l'absurde et on supposera donc qu'il existe une fonction intérieure singulière U telle que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω. On pose

$$\left(l^2_\omega\right)^+ := \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2_\omega : u_n = 0 \text{ pour } n < 0\right\}.$$

Il est clair que $\widehat{U}$ n'est pas cyclique dans $(l^2_\omega)^+$, et, d'après le théorème de Roberts [17, Theorem 2.2], on peut supposer que

$$U(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\left(\sum_{i \geqq 1} \mu_i(t)\right),$$

où chaque μ_i est une mesure singulière dont le support est un ensemble de Carleson E_i.

On pose pour $m \geqq 1$

$$U_m(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\left(\sum_{i \geqq m} \mu_i(t) \right).$$

Puisque $\widehat{U}$ n'est pas bicyclique, il existe une hyperfonction non nulle $\varphi \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{U} * \widehat{\varphi} = 0$. Donc

$$\widehat{\left(\frac{U}{U_m}\right)} * (\widehat{U_m} * \widehat{\varphi}) = \widehat{U} * \widehat{\varphi} = 0.$$

Il découle alors de [6, Proposition 3.12] que $(\widehat{U_m} * \widehat{\varphi})^+ \in N$ et $D((\widehat{U_m} * \widehat{\varphi})^+)$ divise la fonction intérieure U/U_m. Donc le support de l'hyperfonction $U_m.\varphi := \widetilde{\widehat{U_m} * \widehat{\varphi}}$ est contenu dans $E = \bigcup_{1 \leqq i \leqq m-1} E_i$, et E est un ensemble de Carleson. En fait, $U_m.\varphi = 0$. En effet, puisque le support de $U_m.\varphi$ est un ensemble de Carleson, et que les coefficients de Fourier vérifient

$$|\widehat{U_m.\varphi}(n)| \leqq \frac{\text{Const}}{(1 + |n|)^\gamma} \ (n \leqq 0) \quad \text{et} \quad |\widehat{U_m.\varphi}(n)| \leqq \text{Const}\ \omega(-n)\ (n \leqq 0)\ ,$$

et comme

$$\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n \ln \omega(-n)} = +\infty,$$

il résulte de [10, Theorem 2.3] que $(\widehat{U_m} * \widehat{\varphi})^+ \in N^+$. Donc le dénominateur de $(\widehat{U_m} * \widehat{\varphi})^+$ est une fonction extérieure, mais d'après ce qui précède, on a forcément $U_m.\varphi = 0$.

D'autre part, $u \to \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$ est une forme linéaire continue sur l^2_ω. Puisque

$$\widehat{U_m.\varphi}(k) = \left\langle S_\omega^{-k} \widehat{U_m}, \widehat{\varphi} \right\rangle \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z},$$

et $\lim_{m \to +\infty} \|U_m - 1\|_{H^2} = 0$, alors

$$\lim_{m \to +\infty} \widehat{U_m.\varphi}(k) = \widehat{\varphi}(k) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Or, $U_m.\varphi = 0$ et φ est supposée être non nulle, ce qui est absurde. Donc, $\widehat{U}$ est bicyclique dans l^2_ω.

Réciproquement, si $\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n \ln \omega(-n)} < +\infty$, on a $n^2 = O(\omega(-n))(n \to +\infty)$. On pose $\omega_\alpha(n) = \omega(-n)/n^\alpha$, $n \geqq 0$, pour un certain $\alpha > 1/2$. Il est clair que $\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n \ln \omega_\alpha(-n)}$ est aussi convergente. Il est montré dans [10, Théorème 2.2] qu'il existe un ensemble de Carleson E et une fonction intérieure singulière U dont l'hyperfonction U^* associée vérifie

$$|\widehat{U^*}(n)| = O(\omega_\alpha(-n))(n \to +\infty) \text{ et } \sum_{n \leqq 0} |\widehat{U^*}(n)|^2 < +\infty.$$

Soit une fonction f de $\mathscr{A}^\infty(\mathbb{D})$, non nulle et plate sur E. On pose $f.U^* := \widetilde{\widehat{f} * \widehat{U^*}}$. On a $\sup_{n \leqq -1} |\widehat{f.U^*}(n)||n|^p < +\infty$, pour tout $p \geqq 0$, [5, Lemma 4.11], et $|\widehat{f.U^*}(n)| = O(\omega_\alpha(-n))(n \to +\infty)$, [4, Lemma 2.1]. Donc $f.U^* \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$ et $\operatorname{supp} f.U^* = E$ (voir [4]), ce qui implique que $f.U^*$ est non nulle. Selon [6, Lemma 3.7], $\widehat{U} * \widehat{(f.U^*)} = 0$ et donc $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Soit F un sous–espace fermé de $(l^2_\omega)^+ = \{u \in l^2_\omega : u_n = 0 \text{ pour } n < 0\}$. On pose

$$\tilde{F} = \left\{ f \text{ holomorphe sur } \mathbb{D} : f(z) = \sum_{n \geqq 0} u_n z^n \text{ avec } (u_n)_{n\geqq 0} \in F \right\}.$$

On dira qu'un sous–espace fermé F de $(l^2_\omega)^+$ possède la propriété de division si la fonction $f_\lambda : \zeta \to \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ appartient à $\tilde{F}$ pour tout $f \in \tilde{F}$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}$ tels que $f(\lambda) = 0$. Esterle et Volberg dans [8] ont montré que si $(\omega(n))_{n\geqq 0}$ est log–concave,

$$\sum_{n\geqq 0} \frac{|\ln \omega(n)|}{1 + n^{\frac{3}{2}}} < +\infty, \tag{4.2}$$

et si $\dfrac{\log \omega(n)}{\sqrt{|n|}} \underset{n\to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $F = \bigvee_{n \leqq 0} S^n_\omega(F) \cap (l^2_\omega)^+$ pour tout sous–espace fermé F de $(l^2_\omega)^+$ possédant la propriété de division, où $\bigvee_{n\leqq 0} S^n_\omega(F)$ désigne le sous–espace fermé engendré par $\bigcup_{n\leqq 0} S^n_\omega(F)$.

Mentionnons également que Domar, dans [3], a donné l'existence d'un sous–espace biinvariant non trivial pour S_ω lorsque le poids ω vérifie $\ln \omega(n) - \ln \omega(n+1) = O(n^{-\frac{1}{2}})(n \to +\infty)$, $\inf_{n<0} \dfrac{\ln \omega(n)}{\sqrt{|n|}} > 0$ et satisfait (4.2).

Le théorème suivant montre, sous certaines conditions de régularité, que le sous–espace biinvariant peut être engendré par la transformée de Fourier d'une fonction intérieure singulière.

Théorème 4.2. *Soit ω un poids tel que $(\omega(n))_{n\geqq 0}$ est décroissante et* $\dfrac{\log \omega(n)}{\sqrt{|n|}} \underset{n\to -\infty}{\to} +\infty$. *Si la condition* (4.2) *est satisfaite, alors il existe une fonction intérieure singulière U telle que $\widehat{U}$ est non bicyclique dans l^2_ω.*

Preuve. On pose $W_\alpha(n) = \dfrac{\omega(n)}{(1+n)^\alpha}$, $n \geqq 0$. Puisque $(W_\alpha(n))_{n\geqq 0}$ est décroissante et $\sum_{n\geqq 0} \dfrac{|\ln W_\alpha(n)|}{1 + n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$, le théorème de Shamoyan [12, Theorem 2] donne l'existence d'une hyperfonction φ telle que

1. $\operatorname{supp} \varphi = \{1\}$,
2. $\varphi^- \in H^\infty(\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}})$,
3. φ^+ est dans la classe de Nevanlinna
4. la limite radiale $\varphi^+_* \in L^1(\mathbb{T})$, où $\varphi^+_*(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} \varphi^+(re^{it})$, avec

$$\widehat{\varphi^+_*}(n) = 0 \ (n \geqq 0), \widehat{\varphi^+_*}(n) = -\widehat{\varphi}(n+1) \text{ et } |\widehat{\varphi^+_*}(n)| \leqq W_\alpha(-n) \ (n \leqq -1).$$

Puisque $\varphi^+ \in N$, il existe $c > 0$ telle que $\ln |\widehat{\varphi}(n)| = O(c\sqrt{n})(n \to +\infty)$ (voir [2]), et comme $\alpha > 1/2$, alors $\varphi \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$.

D'autre part, $\operatorname{supp} \varphi = \{1\}$ et $\varphi^+ \in N$, donc $D(\varphi^+)$ divise la fonction intérieure $U(z) = \exp d \dfrac{z+1}{z-1}$, pour un certain $d > 0$.

Notons également que $\varphi^- \in H^\infty(\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}})$,

$$\varphi^-_*(e^{it}) := \lim_{r \to 1^-} \varphi^-(e^{it}/r) = - \sum_{n \leqq -1} \widehat{\varphi}(n+1) e^{int}.$$

On a $\widehat{\varphi_*^-}(n) = 0$ pour $n \geqq 0$ et $\widehat{\varphi_*^-}(n) = -\widehat{\varphi}(n+1) = \widehat{\varphi_*^+}(n)$ pour $n \leqq -1$, alors $\varphi_* = \varphi_*^+ - \varphi_*^- = 0$. D'après ce qui précède, φ^+ est dans la classe de Nevanlinna, $D(\varphi^+)$ divise U et $\varphi_* = 0$. Il résulte alors de [6, Proposition 3.12] que $\widehat{U} * \widehat{\varphi} = 0$. Puisque $\varphi \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$ et φ est non nulle, $\widehat{U}$ est alors non bicyclique dans l^2_ω. $\square$

R e m a r q u e 4.3. La condition (4.2) est optimale pour obtenir le théorème 4.2. Considérons un poids ω tel que $(1/\omega(n))_{n\geqq 0}$ est une suite strictement croissante, log–concave et qui tend vers l'infini. Si $\sum_{n\geqq 0} \frac{|\ln \omega(n)|}{1+n^{\frac{3}{2}}} = +\infty$, alors la transformée de Fourier de toute fonction intérieure singulière est bicyclique dans l^2_ω.

En effet, soit $\varphi \in \mathscr{H}_\omega(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{U} * \widehat{\varphi} = 0$. Selon [6, Proposition 3.12], $\varphi^+ \in N$, $D(\varphi^+)$ divise U et $\varphi_* = 0$. D'autre part, $\varphi^- \in H^2(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$, donc $\varphi_*^- \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varphi_*^-(e^{it}) = -\sum_{n\leqq -1} \widehat{\varphi}(n+1)e^{int}$. Puisque $\varphi_* = \varphi_*^+ - \varphi_*^- = 0$, alors

$$\widehat{\varphi_*^+}(n) = \widehat{\varphi_*^-}(n) = -\widehat{\varphi}(n+1) \quad \text{pour } n \leqq -1 \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi_*^+}(n) = 0 \quad \text{pour } n \geqq 0.$$

Par conséquent, $|\widehat{\varphi_*^+}(n)| \leqq \omega(n)$, avec $\sum_{n\geqq 0} \frac{|\ln \omega(n)|}{1+n^{\frac{3}{2}}} = +\infty$, et comme $\varphi^+ \in N$ avec $\varphi_*^+ \in L^2(\mathbb{T})$, alors selon [12, Corollary 2], φ^+ est dans H^1. Puisque $\widehat{\varphi_*^+}(n) = 0$ pour $n \geqq 0$, alors nécessairement φ est nulle. D'où $\widehat{U}$ est bicyclique.

Bibliographie

[1] P. Ahern, The mean modulus and the derivative of inner function. Indiana Univ. Math. J. **28**, 311–347 (1979).

[2] A. Atzmon, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces. Acta Math. **144**, 27–63 (1980).

[3] Y. Domar, On the existence of nontrivial or nonstandard translation invariant subspaces in weighted l^p and L^p. In: 18th Scandinavian Congress of Mathematicians (Aarhus, 1980) Progr. Math. **11**, 226–235. Boston, Mass. 1981.

[4] O. El Fallah et K. Kellay, Sous–espaces biinvariants pour certains shifts pondérés. Ann. Inst. Fourier **48**, 1543–1558 (1998).

[5] J. Esterle, Closed ideals in certain Beurling algebras, and synthesis of hyperdistributions. Studia Math. **120**, 113–153 (1996).

[6] J. Esterle, Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymetric weighted shifts. J. Func. Anal. **144**, 64–104 (1997).

[7] J. Esterle et A. Volberg, Sous–espaces invariants par translations bilatérales de certains espaces de Hilbert de suites quasianalytiquement pondérées. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **326**, 295–300 (1998).

[8] J. Esterle and A. Volberg, Analytic left–invariant subspaces of weighted Hilbert spaces of sequences. J. Operator Theory. À paraître.

[9] J. Esterle and A. Volberg, Asymptotically holomorphic functions and translation invariant subspaces of weighted Hilbert spaces of sequences. Preprint.

[10] K. Kellay, Contractions et hyperdistributions à spectre de Carleson. J. London. Math. Soc. **58** (2), 185–196 (1998).

[11] B. I. Korenblum, Cyclic elements in some spaces of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc. **5**, 3, 317–318 (1981).

[12] F. A. Shamoyan. Characterization of the rate of decrease of the Fourier coefficients of functions of bounded type and of a class of analytic functions with infinitely differentiable boundary values. Siberian Math. J. **36**, 816–826 (1995).

[13] H. S. SHAPIRO, Weakly invertible elements in certain function spaces and generators in l_1. Michigan Math. J. **11**, 161–165 (1964).
[14] H. S. SHAPIRO, Some remarks on the weighted polynomial approximations of holomorphic functions. Math. USSR Sb. **2**, 285–294 (1967).
[15] A. L. SHIELDS, Cyclic vectors in Banach spaces of analytic functions. Operators and function theory (Lancaster, 1984) 315–349. Dordrecht–Boston, Mass. 1985.
[16] B. A. TAYLOR and D. L. WILLIAMS, Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. Can. J. Math. **22**, 1266–1283 (1970).
[17] J. W. ROBERTS, Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p, $0 < p < 1$. Illinois J. Math. **29**, 25–38 (1985).

Eingegangen am 17. 5. 1999 *)

Anschrift des Autors:

K. Kellay
Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Québec (Québec)
Canada G1K 7P4

Current address:
CMI, LATP
Université de Provence
39, rue F. Joliot–Curie
13453 Marseille cedex 13
France
kellay@cmi.univ-mrs.fr

*) Die endgültige Fassung ging am 11. 9. 2000 ein.