ALGÈBRE BILINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE
Semestre 4, 2016-2017

LAURENT BESSIÈRES
Institut de Mathématiques de Bordeaux

21 avril 2017

Table des matières

Le but de ce cours est d'enrichir la notion d'espace vectoriel, la structure minimale pour faire de l'algèbre linéaire, d'une structure supplémentaire permettant d'étudier des propriétés de nature *métriques*, c'est-à-dire des phénomènes concernant les longueurs, les distances, les angles, etc. On fait cela en munissant l'espace vectoriel d'un *produit scalaire*. On rappelle que sur $E = \mathbb{R}^3$, le produit scalaire (canonique) de deux vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ est définie par la formule

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

et la norme associée est $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

Rappelons les propriétés du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire est

(a) <u>bilinéaire</u>, c'est-à-dire linéaire en chaque argument :

$$\begin{array}{rcll} \langle x+y, z\rangle &=& \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle & \\ \langle \lambda x, y\rangle &=& \lambda\langle x, y\rangle & \forall x, y, z \in E \\ \langle x, y+z\rangle &=& \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \langle x, \lambda y\rangle &=& \lambda\langle x, y\rangle & \end{array}$$

(b) <u>symétrique</u> :

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

(c) <u>défini</u> : $\forall x \in E$,

$$\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

(d) <u>positif</u> : $\forall x \in E$,

$$\langle x, x\rangle \geq 0.$$

Introduisonstout de suite les pricipales définitions de ce cours. Pour définir un produit scalaire sur un espace vectoriel autre que $\mathbb{R}^3$, ou définir un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, on utilise les propriétés ci-dessus comme axiomes. Soit donc E un espace vectoriel sur le corps des réels, pouvant être de dimension finie comme $\mathbb{R}^n$, ou de dimension infinie comme $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynomes ou $C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Un *produit scalaire* sur E est une application

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

bilinéaire, symétrique, définie et positive. Lorsque l'espace E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est *euclidien* s'il est de dimension finie, et qu'il est *pré-hilbertien* s'il est de dimension finie.

Il sera avantageux d'étudier séparément les 4 propriétés. Le premier chapitre sera surtout consacré aux applications bilinéaires et symétriques. Cette étude sera faite dans le cadre plus général d'un espace vectoriel sur un corps K, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application bilinéaire étant à valeurs dans K. Dans la chapitre consacré aux espaces euclidiens et pré-hilbertiens, le corps K sera égal à $\mathbb{R}$. En effet l'axiome de positivité ne fait sens que dans ce cadre [1]

1. On peut définir sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels un avatar du produit scalaire, qu'on appelle produit scalaire *hermitien*, mais l'axiome de bilinéarité doit être remplacé. Ce n'est pas l'objet de ce cours.

Chapitre 1 : Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Dans ce chapitre, on considère donc E un espace vectoriel sur un corps K, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on dira simplement que E est un K-espace vectoriel).

1 Formes bilinéaires

1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 1.1. Une *forme bilinéaire* sur un K-espace vectoriel E est une application $b : E \times E \to K$ bilinéaire, c'est-à-dire linéaire en chaque argument :

$$\begin{array}{rcll} b(\lambda x + y, z) & = & \lambda b(x, z) + b(y, z) & \forall x, y, z \in E \\ b(x, \lambda y + z) & = & \lambda b(x, y) + b(x, z) & \text{et } \forall \lambda \in K \end{array}$$

On dit que b est *symétrique* si $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. On dit que b est *définie* si $b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et *positive* (quand $K = \mathbb{R}$) si $b(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Exemple 1.2. 1) Sur $E = K^n$, $b : K^n \times K^n \to K$ définie par $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, où $a_{ij} \in K$. Elle est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j, ce qu'on peut vérifier à vue sur les exemples. En général, on ne voit pas immédiatement si b est définie, ou positive (quand $K = \mathbb{R}$).
2) Sur $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, $b(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$ définit un produit scalaire.

Notation. $\mathcal{B}(E) = \{b : E \times E \to K \text{ bilinéaire}\}$, $\mathcal{S}(E) = \{b \in \mathcal{B}(E) \text{ symétrique }\}$.

L'ensemble $\{b : E \times E \to K\}$ des applications de $E \times E$ dans K, hérite de la structure de K-espace vectoriel de K si on le munit des lois $(b_1 + b_2)(x, y) := b_1(x, y) + b_2(x, y)$ et $(\lambda b)(x, y) := \lambda . b(x, y)$.

Proposition 1.3. *Les espaces $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{S}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels du K-espace* *vectoriel* $\{b : E \times E \to K\}$.

1.2 Formes quadratiques et polarisation

Définition 1.4. Une application $q : E \to K$ est une *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b \in \mathcal{S}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x, x)$.

Lemme 1.5. *(Formule de polarisation) Dans ce cas,*

$$\forall x, y \in E, \qquad b(x,y) = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big).$$

Remarque 1.6. En conséquence, b est unique, appelée *forme polaire* de q. Il suffit donc de connaitre une forme bilinéaire symétrique sur la diagonale de $E \times E$ pour la connaître partout.

Exercice 1.7. On a aussi

$$b(x,y) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big).$$

Notation. $\mathcal{Q}(E) = \{q : E \to K \text{ forme quadratique}\}$.

C'est manifestement un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel des applications de E dans K. L'application de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{Q}(E)$ qui envoie b sur q vérifiant $q(x) = b(x, x)$ est clairement linéaire, surjective par définition, et injective d'après la formule de polarisation 1.5. En conséquence,

Proposition 1.8. *$\mathcal{S}(E)$ est isomorphe à $\mathcal{Q}(E)$.*

Remarque 1.9. ATTENTION ! On prendra garde à ne pas confondre les notions de formes quadratiques et de *formes linéaires*. On rappelle qu'une forme linéaire sur un K-espace vectoriel E est

$$\ell : E \to K \qquad \text{linéaire}$$

En particulier $\ell(\lambda x) = \lambda \ell(x)$, pour tous $x \in E$ et $\lambda \in K$, alors qu'une forme quadratique q satisfait $q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x, x) = \lambda^2 q(x)$.

Exemple 1.10. 1) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = x_1^2 - x_2 x_3$. Pour trouver sa forme polaire, on peut vérifier si l'expression obtenue via la formule de polarisation 1.5 est bien binéaire et symétrique, mais en général il est plus simple et plus rapide de polariser “à vue”. On remplace

$$\begin{array}{rcl} x_i^2 & \rightsquigarrow & x_i y_i \\ x_i x_j & \rightsquigarrow & \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) \end{array}$$

et on trouve $b(x,y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2)$, bilinéaire et symétrique. Puisque $b(x,x) = q(x)$, on conclut que q est quadratique.
2) Soit $\ell : E \to K$ une forme linéaire, alors $q(x) = (\ell(x))^2$ définit une forme quadratique, de forme polaire $b(x,y) = \ell(x)\ell(y)$. Plus généralement, étant donnés $\ell_1, \ldots, \ell_k$ des formes linéaires sur E, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$ des scalaires, la combinaison linéaire des carrés des formes linéaires

$$q(x) = \alpha_1 \ell_1(x)^2 + \ldots + \alpha_k \ell_k(x)^2 \tag{1.1}$$

définit une forme quadratique sur E.

Remarque 1.11. Il y a en dimension finie une “réciproque” : le théorème de réduction 3.12 montrera que si $\dim E < +\infty$, toute forme quadratique sur E peut s'écrire sous la forme (1.1), avec de plus des formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_k$ linéairement indépendantes.

Notons que l'ensemble $\mathscr{L}(E,K)$ des formes linéaires sur E a bien une structure d'espace vectoriel. Il jouera un rôle important dans la suite.

Définition 1.12. On appelle *dual* de E, et on note $E^* = \mathscr{L}(E,K)$, le K-espace vectoriel des formes linéaires sur K.

Exercice 1.13. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) Une produit de formes bilinéaires est une forme bilinéaire ;

(b) Une forme quadratique bornée est nulle.

(c) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E, alors $q(x) = \ell_1(x)\ell_2(x)$ définit une forme quadratique.

2 Formes bilinéaires en dimension finie

2.1 Représentation matricielle

On suppose que E est un K-espace vectoriel de dimension finie (donc isomorphe à K^n). Soit $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors par bilinéarité on obtient

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j). \tag{1.2}$$

La forme bilinéaire b est donc déterminée par les valeurs $b(e_i, e_j) \in K$.

Définition 2.1. On appelle *matrice de b dans la base e* la matrice

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ b(e_2,e_1) & & & \vdots \\ \vdots & & b(e_i,e_j) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \cdots & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$$

où $b(e_i,e_j)$ est le coefficient en ligne i et colonne j. C'est le coefficient de x_iy_j dans l'expression (1.2).

Exemple 2.2. Soit $b : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $b(x,y) = x_1y_1+2x_1y_2+3x_1y_3+4x_2y_1+5x_2y_2+6x_2y_3+7x_3y_1+8x_3y_2+9x_3y_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $M(b)_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Sont équivalents :*

1) b est symétrique,

2) Il existe une base e de E telle que $M(b)_e$ soit symétrique,

3) Dans toutes les bases, la matrice de b est symétrique.

Une base $e = \{e_1,\dots,e_n\}$ de E étant fixée, soit $\mathcal{M}_e : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ l'application qui à $b \in \mathcal{B}(E)$ associe la matrice $M(b)_e$.

Proposition 2.4. *L'application $\mathcal{M}_e : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est un isomorphisme.*

Corollaire 2.5. $\dim \mathcal{B}(E) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Puisqu'on a une matrice, autant faire du calcul matriciel.

Proposition 2.6. *Etant donnés $e = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E, et $b \in \mathcal{B}(E)$, notons $M = M(b)_e$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_je_j$, deux éléments de E. On a alors*

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De plus, M est la seule matrice qui vérifie cette identité pour tous $x, y \in E$.

La formule est licite du point de vue des dimensions car la règle est que

$$\begin{array}{rcll} (p \times m) \cdot (m \times q) & = & p \times q, \text{ donc} & \\ (n \times n) \cdot (n \times 1) & = & n \times 1, & (\text{ matrice} \times \text{vecteur colonne} = \text{vecteur colonne}) \\ (1 \times n) \cdot (n \times 1) & = & 1 \times 1, & (\text{vecteur ligne} \times \text{vecteur colonne} = \text{scalaire}) \end{array}$$

Exemple 2.7. On reprend l'exemple 2.2. On a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 9x_3y_3 \\ &= x_1(y_1 + y_2 + 3y_3) + x_2(4y_1 + 5y_2 + 6y_3) + x_3(7y_1 + 8y_2 + 9y_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notation. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(x)_e$ lorsque $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donc $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M(y)_e$ si $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Avec $M := M(b)_e$, on a alors

$$b(x,y) = {}^tX \cdot M \cdot Y,$$

où l'opérateur ${}^t : \mathbb{M}_{p\times m}(K) \to \mathbb{M}_{m\times p}(K)$ associe à une matrice A sa transposée ${}^tA$, définie par $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$.

Proposition 2.8. **(Formule du changement de base)** *Soit E un K-espace vectoriel, soient $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$. Si on note $P = P_{e\to e'}$ la matrice de passage de e à e', $M = M(b)_e$ et $M' = M(b)_{e'}$, on a alors*

$$M' = {}^tPMP.$$

Rappel. La matrice $P_{e\to e'}$ a pour j-ème colonne les coordonnées de e'_j dans la base e, c'est-à-dire $M(e'_j)_e$. C'est aussi la matrice de l'endomorphisme identité $\mathrm{id} : E \to E$, de la base e' vers la base e. En particulier on a la relation $M(x)_e = M(id)_{e'\to e} M(x)_{e'}$, soit $X = PX'$.

Remarque 2.9. ATTENTION ! Ce n'est pas la formule de changement de bases de matrices d'endomorphismes, qui fait intervenir $P^{-1}MP$. En effet on a ${}^tP \neq P^{-1}$ en général (sauf à le faire exprès...). La formule ici est plus simple : il est plus facile de calculer la transposée d'une matrice que son inverse.

2.2 Rang et noyau

On investigue si diverses quantités qu'on peut associer à une matrice M (rang, noyau, déterminant,...) disent quelque chose d'une forme bilinéaire b lorsque M est la matrice de b.

Définition 2.10. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$ une forme bilinéaire sur E. On appelle *rang de* b, le rang de la matrice de b dans une base quelconque e de E, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(M(b)_e)$.

En effet si M et M' sont deux matrices de b (dans des bases e et e') la relation $M' = {}^tPMP$ montre que M et M' ont même rang (puisqu'on compose M avec des matrices inversibles).

Définition 2.11. Soit E un K-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). On appelle *noyau* de b le sous-espace vectoriel de E :

$$N(b) = \{y \in E \mid b(x, y) = 0, \forall x \in E\}.$$

On dit que b est *non dégénérée* lorsque $N(b) = \{0\}$.

Exercice 2.12. Prouver que $N(b)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 2.13. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $b \in \mathcal{B}(E)$ une forme bilinéaire sur E. Le noyau de b est isomorphe au noyau de la matrice de b dans n'importe quelle base. Précisément si $\mathcal{C} : E \to K^n$ désigne l'isomorphisme de coordonnées dans une base e, qui envoie $x \in E$ sur $M(x)_e = X \in K^n$, alors*

$$x \in N(b) \Leftrightarrow X \in \ker M(b)_e \Leftrightarrow M(b)_e X = 0,$$

soit aussi $\mathcal{C}(N(b)) = \ker M(b)_e$.

Corollaire 2.14. **(Formule du rang)** *Sous les mêmes hypothèses,*

1) $\dim N(b) + \mathrm{rg}(b) = \dim E$,

2) b est non dégénérée si seulement si $\mathrm{rg}(b) = \dim E$, *soit encore* $\det M(b)_e \neq 0$.

Remarque 2.15. ATTENTION ! On n'a pas défini de déterminant "$\det(b)$" de la forme bilinéaire, et on ne le fait pas. En effet, la valeur $\det M_b(e)$ dépend de e, puisque si on change de base on a $\det({}^tPMP) = \det(P)^2 \det(M) \neq \det(M)$ en général. Puisque $\det(P) \neq 0$, ce qui est invariant par changement de base, c'est la nullité ou non du déterminant des matrices.

Remarque 2.16. On peut se demander si les matrices $M(b)_e$ d'une forme bilinéaire b, lorsque e parcourt toutes les bases, restent associées à une application linéaire sous-jacente fixe. Le rang et le noyau de b seraient alors égaux aux rang et noyau de cette application linéaire. Une tentative naive pour définir cette application est de décréter qu'on associe à $M(b)_e$, l'endomorphisme $f : E \to E$ dont la matrice dans les bases e et e est $M(b)_e$, c'est-à-dire on décide que $M(f)_{e\to e} = M(b)_e$. Cela ne marche pas, car la formule de changement de base n'étant pas la bonne, l'endomorphisme obtenu dépend de la base. L'endomorphisme $f' : E \to E$, tel que $M(f')_{e'\to e'} = M(b)_{e'}$, est différent de f dès que ${}^tP \neq P^{-1}$ (où $P = P_{e\to e'}$).

Il faut être plus subtil. Il existe bien une construction qui lie de manière naturelle application linéaire et application bilinéaire, mais elle requiert la notion de dualité.

2.3 Dualité, accouplement canonique

On suppose E de dimension finie. On rappelle que $E^* = \mathscr{L}(E, K)$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Soit b une forme bilinéaire sur E. On lui associe $f_b \in \mathscr{L}(E, E^*)$ comme suit. On définit

$$\begin{aligned} f_b : E &\to E^* \\ y &\mapsto b_y \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} b_y : E &\to K \\ x &\mapsto b(x,y) \end{aligned} \qquad \text{(est linéaire)}$$

Exercice 2.17. f_b est linéaire.

Proposition 2.18. *Avec les conventions ci-dessus,*

1) $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(f_b)$,

2) $N(b) = \ker f_b$.

Définition 2.19. **(Base duale)**. Soit $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base E. On appelle *base duale* de e la base $e^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^*, où les $e_i^* : E \to K$ sont définies par $e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$ (symboles de Kronecker).

On montre que la famille e^* est libre en évaluant l'identité $0 = \lambda_1 e_1^* + \ldots + \lambda_n e_n^*$ sur les e_j. Par ailleurs, pour $\ell \in E^*$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $l(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ell(e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)\ell(e_i)$, donc $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(e_i) e_i^*$, ce qui montre que e^* est génératrice.

Remarque 2.20. On peut montrer que l'application $\mathcal{F} : \mathcal{B}(E) \to \mathscr{L}(E, E^*)$, qui envoie b sur f_b, est un isomorphisme. Sa réciproque envoie $f \in \mathscr{L}(E, E^*)$ sur $b \in \mathcal{B}(E)$, définie par $b(x,y) = f(y)(x)$.

Exercice 2.21. Vérifier que ça marche.

3 Orthogonalité

3.1 Orthogonalité relativement à une forme bilinéaire symétrique

Soit E un K-espace vectoriel et soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique.

Définition 3.1. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont *b-orthogonaux* si $b(x, y) = 0$. Une famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de vecteurs de E est *b-orthogonale* si $b(v_i, v_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. La famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est *b-orthonormée* si $b(v_i, v_j) = \delta_i^j$.

S'il n'y a pas d'ambiguité on dit simplement que les vecteurs sont orthogonaux.

Exemple 3.2. Soit $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ dans la base canonique, alors le vecteur $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à lui-même.

Définition 3.3. Soit $A \subset E$ une partie de E. On appelle *b-orthogonal* de A l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E \mid b(x, y) = 0, \forall x \in A\}.$$

Proposition 3.4. *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, égal à* $(\mathrm{vect} A)^\perp$.

Remarque 3.5. En conséquence, si F est un sous-espace vectoriel de E, de base $\{v_1, \ldots, v_k\}$, alors $F^\perp = \{v_1, \ldots, v_k\}^\perp = \{y \in E \mid b(v_i, y) = 0, \forall i\}$.

Proposition 3.6. *Avec les conventions ci-dessus :*

1) $\{0\}^\perp = E$,

2) $E^\perp = N(b)$,

3) $\forall A \subset E$, $N(b) \subset A^\perp$.

Définition 3.7. On appelle *cône isotrope* de $b \in \mathcal{S}(E)$ l'ensemble

$$I(b) = \{x \in E \mid b(x, x) = 0\}.$$

Les vecteurs de $I(b)$ sont dits *isotropes*.

Remarque 3.8. Le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel en général, mais on a toujours $N(b) \subset I(b)$. Le cône est invariant par dilatation : si $x \in I(b)$, alors $\lambda x \in I(b)$ pour tout $\lambda \in K$.

Exemple 3.9. Soit $b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ définie par $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$, alors $I(b)$ est la réunion de deux droites $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$.

Définition 3.10. Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire $b \in \mathcal{S}(E)$. On définit :
- le noyau de q comme le noyau de b, $N(q) := N(b)$.
- le rang de q comme le rang de b, $\mathrm{rg}(q) := \mathrm{rg} b$,
- le cône isotrope de q comme le cône isotrope de b, $I(q) := I(b)$ $(= q^{-1}(\{0\})$, mais qu'on n'appelle pas noyau de q ! n'est pas un s-ev en général).
- q est non dégénérée $\Leftrightarrow b$ non dégénérée ($\Leftrightarrow N(q) = \{0\}$)
- (pour $K = \mathbb{R}$), q est positive $\Leftrightarrow b$ est positive ($\Leftrightarrow q(x) \geq 0, \forall x \in E$)
- q est définie $\Leftrightarrow b$ est définie ($I(q) = \{0\}$).
- x, y sont q-orthogonaux $\Leftrightarrow x, y$ sont b-orthogonaux.

Exercice 3.11. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

(b) Si $q(x) > 0$ et $q(y) > 0$, alors $q(x+y) > 0$.

(c) Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, alors $b(x,y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ définit une forme binéaire dégénérée.

3.2 Existence de bases orthogonales, théorème de réduction

On montre enfin un résultat qui mérite l'appellation "Théorème", à savoir l'existence de bases orthogonales en dimension finie. Justifions d'abord l'intérêt d'avoir de telles bases. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, soit $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et soit $b \in \mathcal{S}(E)$. Alors e est b-orthogonale si et seulement si la matrice de b dans la base e est diagonale :

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}.$$

En inspectant les a_i on peut connaitre tout ce qu'il y à savoir sur b : son rang (nombre de $a_i \neq 0$), une base du noyau (les e_i tels que $a_i = 0$), si elle positive (tous les $a_i \geq 0$) et définie positive (tous les $a_i > 0$). On peut aussi tirer ses informations de la forme quadratique $q(x) = b(x,x)$ qui s'écrit dans e :

$$q(x) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2,$$

écriture qui équivaut à l'orthogonalité de e.

Théorème 3.12. **(de réduction)** *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$, et soit $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Il existe alors une base b-orthogonale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Quitte à renuméroter les e_i, la matrice de b dans la base e est de la* *forme*

$$M(b)_e = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_i \in K, a_i \neq 0 \\ r = \mathrm{rg}(b). \end{array}$$

Les vecteurs $e_{r+1}, \dots, e_n$ sont isotropes et forment une base du noyau $N(b) = E^\perp$.

Remarque 3.13. D'un point de matriciel, partant d'une matrice $M \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ symétrique, on cherche une matrice P inversible telle que ${}^tPMP$ soit diagonale. Ce n'est pas le même problème que celui de la diagonalisation des matrices, où on veut que $P^{-1}MP$ soit diagonale (sauf si ${}^tP = P^{-1}$...).

Corollaire 3.14. *Soit q une forme quadratique sur E, de rang r. Il existe une base q-orthogonale $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et des scalaires $a_1, \dots, a_r \in K$, $a_i \neq 0$, tels que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors*

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2.$$

Exercice 3.15. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Si ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto \ell(x)\ell(y)$ est définie positive.

(b) La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

(c) Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est définie positive.

3.3 La méthode de Gauss de décomposition en carrés

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Le théorème de réduction ne produit pas de base orthogonale explicite. La méthode de Gauss de decompositions en carrés permet de la faire. C'est un algorithme qui produit, à partir d'une forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \tag{1.3}$$

exprimée dans une base quelconque $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, des formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_n \in E^*$ telles que

$$q(x) = a_1 \ell_1^2(x) + \cdots + a_n \ell_n^2(x).$$

Le changement de coordonnées $\big(x_i'\big) = \big(\ell_i(x)\big)$ donne alors une base q-orthogonale. L'idée de la méthode de Gauss est de transformer l'expression (1.3) pour faire apparaître des carrés. On utilise deux types d'amorces, reposant sur les identités bien connues :

$$(I) \qquad a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2 \tag{1.4}$$

$$(II) \qquad ab = \frac{1}{4}\big((a+b)^2 - (a-b)^2\big) \tag{1.5}$$

Evidement, il ne sert à rien de faire apparaitre des carrés à tout va, sous peine d'obtenir une décomposition non libre. Il faut s'arranger pour tuer une variable à chaque itération. Traitons 2 exemples, utilisant chacun une des amorces selon qu'il existe déjà dans (1.3) un x_i^2 ou non.

Exemple 3.16. Soit $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Puisqu'il y a un x_1^2 on va utiliser l'amorce (I) en regroupant tous les x_1 :

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

On a par (1.4), avec $a = x_1$ et $b = x_2 - 2x_3$,

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (\underbrace{x_2 - 2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1})^2. \end{aligned}$$

donc en développant le deuxième carré et reportant dans $q(x)$,

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - \underbrace{(x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) - x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_2x_3}_{\text{il n'y a plus de } x_1} \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2\left[x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2\right] \qquad (\text{ amorce (I) sur tous les } x_2) \\ &= (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{\ell_1(x)})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{\ell_2(x)})^2 - 2(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2\right] \end{aligned}$$

Par construction ℓ_2 est indépendante de x_1, et ℓ_3 est indépendante de x_1, x_2. Autrement dit, ℓ_2 est nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1\}$, et ℓ_3 est nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$. D'un autre coté, ℓ_i n'est pas nulle sur $\mathrm{vect}\{e_i\}$, pour $i = 1, 2, 3$. En évaluant l'identité $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 successivement, on obtient alors $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, prouvant que la famille $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre dans E^*.

Remarque 3.17. La décomposition obtenue n'est pas unique, car on aurait pu choisir de faire la première itération sur la variable x_2, ou la variable x_3. Il peut arriver également que le nombre de formes linéaires indépendantes obtenues soit strictement inférieur à la dimension de l'espace, c'est-à-dire qu'on peut aboutir à $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2$, avec $k < n$. (c'est même sûr si $\mathrm{rg}(q) < n$ car on a alors $k = rg(q)$). Au besoin, on pourra toujours compléter $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ en une base $\{\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}, \ldots, \ell_n\}$ de E^*, et écrire $q = a_1\ell_1^2 + \ldots + a_k\ell_k^2 + 0\ell_{k+1}^2 + \ldots + 0\ell_n^2$.

Exemple 3.18. Soit $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$ dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

On veut utiliser l'amorce (II), mais elle doit manger tous les termes en x_1 et x_2 (dans cette itération, on tue deux variables d'un coup). On doit donc préparer l'amorce. On le fait avec la formule

$$(II') \qquad \begin{aligned} ab + a\phi_1 + b\phi_2 &= \underbrace{(a+\phi_2)}_{A}\underbrace{(b+\phi_1)}_{B} - \phi_1\phi_2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\underbrace{(a+b+\phi_1+\phi_2)}_{A+B}{}^2 - \underbrace{(a-b+\phi_2-\phi_1)}_{A-B}{}^2\big) - \phi_1\phi_2 \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.5) sur AB. On a donc

$$\begin{aligned} q(x) &= 5\left(x_1x_2 + x_1\frac{6x_3}{5} + x_2\frac{3x_3}{5}\right) \\ &= 5\underbrace{\left(x_1 + \frac{3x_3}{5}\right)}_{A}\underbrace{\left(x_2 + \frac{6x_3}{5}\right)}_{B} - 5\underbrace{\frac{6x_3}{5}\frac{3x_3}{5}}_{\text{il n'y a plus de } x_1, x_2} \\ &= \frac{5}{4}\underbrace{\left(x_1 + x_2 + \frac{9}{5}x_3\right)}_{A+B=\ell_1(x)}{}^2 - \frac{5}{4}\underbrace{\left(x_1 - x_2 - \frac{3}{5}x_3\right)}_{A-B=\ell_2(x)}{}^2 - \frac{18}{5}(\underbrace{x_3}_{\ell_3(x)})^2 \end{aligned}$$

Par construction, ℓ_3 est nulle sur vect$\{e_1, e_2\}$ mais par sur vect$\{e_3\}$, ℓ_1 est nulle sur vect$\{e_1 - e_2\}$ mais pas sur vect$\{e_1 + e_2\}$, et ℓ_2 est nulle sur vect$\{e_1 + e_2\}$ mais pas sur vect$\{e_1 - e_2\}$. En évaluant $0 = \lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2 + \lambda_3\ell_3$ sur $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ et e_3, on obtient que $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, prouvant que $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ est libre.

Méthode générale Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et q une forme quadratique sur E, non nulle. Dans une base $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$, on peut écrire

$$q(x) = \sum_{i \le j}^{n} a_{ij}x_ix_j \; = \sum_{i}^{n} a_{ii}x_i^2 \; + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j.$$

Il y a 2 cas possibles : Cas 1 : il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à renuméroter, on suppose $a_{11} \neq 0$.

On regroupe tous les termes contenant x_1 :

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_{11}x_1^2 + \underbrace{x_1 \sum_{2\le j} a_{1j}x_j}_{\ell(x)} + \underbrace{\sum_{2\le i\le j} a_{ij}x_ix_j}_{q_2(x)} \\
&= a_{11}\left(x_1^2 + x_1\frac{\ell(x)}{a_{11}}\right) \quad + \quad q_2(x) \\
&= a_{11}\left(\underbrace{x_1 + \frac{\ell(x)}{2a_{11}}}_{\ell_1(x)}\right)^2 \underbrace{-\frac{\ell(x)^2}{4a_{11}} + q_2(x)}_{q_3(x)} \\
&= a_{11}\ell_1^2(x) + q_3(x)
\end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1\}$ puisque $\ell(x)$ et $q_2(x)$ ne dependent pas de x_1. On recommence avec q_3, qui restreinte à $\mathrm{vect}\{e_2, \ldots, e_n\}$, devient une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$.

Cas 2 $a_{ii} = 0$ pour tout i. Puisque $q \neq 0$ il existe $a_{ij} \neq 0$ et on peut supposer $a_{12} \neq 0$. On regroupe tous les termes en x_1 et x_2 :

$$q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1\underbrace{\sum_{3\le j} a_{1j}x_j}_{\phi_1(x)} + x_2\underbrace{\sum_{3\le j} a_{1j}x_j}_{\phi_2(x)} + \underbrace{\sum_{3\le i<j} a_{ij}x_ix_j}_{q_2(x)}$$

On remarque que ϕ_1, ϕ_2 et q_2 sont nulles sur $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$.

$$\begin{aligned}
q(x) &= a_{12}\left(x_1x_2 + x_1\frac{\phi_1}{a_{12}} + x_2\frac{\phi_2}{a_{12}}\right) + q_2(x) \\
&= a_{12}\left(x_1 + \frac{\phi_2}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{\phi_1}{a_{12}}\right) - \frac{\phi_1\phi_2}{a_{12}} + q_2(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4}\left(\underbrace{x_1 + x_2 + \frac{\phi_2+\phi_1}{a_{12}}}_{\ell_1(x)}\right)^2 - \frac{a_{12}}{4}\left(\underbrace{x_1 - x_2 + \frac{\phi_2-\phi_1}{a_{12}}}_{\ell_2(x)}\right)^2 + q_3(x) \\
&= \frac{a_{12}}{4}\ell_1^2(x) - \frac{a_{12}}{4}\ell_2^2(x) + q_3(x)
\end{aligned}$$

où q_3 est une forme quadratique nulle sur $\mathrm{vect}\{e_1, e_2\}$. On recommence avec q_3. Un raisonnement par récurrence montre que :

> **Proposition 3.19.** *La méthode de Gauss décompose q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

Déduction de la base orthogonale

On suppose que $q = \alpha_1 \ell_1^2 + \cdots + \alpha_n \ell_n^2$, où $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ est libre dans E^* (au besoin, on a complété la famille libre produite par la méthode de Gauss en une base de E^*). On pose le changement de variable $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$, où les $\ell_i(x)$ sont exprimées en fonction des coordonnées de x dans la base e. Puisque $q(x) = \alpha_1 {x'_1}^2 + \cdots + \alpha_n {x'_n}^2$, la base $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de E correspondante à ces coordonnées est q-orthogonale. L'identité $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ nous dit que $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{e \to e'}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, qu'on inverse en $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{e \to e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.
(le fait que les formes linéaires ℓ_i soient indépendantes équivaut à l'inversibilité de la matrice). Les vecteurs colonnes de $P_{e \to e'}$ donnent alors les coordonnées de e' par rapport à e.

Exemple 3.20. On poursuit l'exemple 3.16, la méthode de Gauss a donné

$$q(x) = (\underbrace{x_1 + x_2 - 2x_3}_{x'_1})^2 - 2\left[(\underbrace{x_2 + x_3}_{x'_2})^2 - 2(\underbrace{x_3}_{x'_3})^2\right]$$

qui conduit à $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & -2x_3 \\ & x_2 & +x_3 \\ & & x_3 \end{pmatrix} = P_{e \to e'}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On inverse le système (ou la matrice) en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & -x'_2 & -3x'_3 \\ & x'_2 & -x'_3 \\ & & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P_{e \to e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

d'où $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base e.

4 Classification des formes quadratiques en dimension finie

En distinguant selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut donner une forme canonique à l'expression des formes quadratiques, ne dépendant que du rang si $K = \mathbb{C}$, et que de la *signature* si $K = \mathbb{R}$. La signature d'une forme quadratique q peut-être défini comme un couple d'entiers (p, p'), où p est la dimension maximale des sous-espaces vectoriels de E où q est définie positive, et p' la dimension maximale des sous-espaces vectoriels de E où q est définie négative (q est négative sur un sous-espace F si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in F$). Nécessairement, $p + p' = \mathrm{rg}(q)$.

4.1 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Théorème 4.1. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q une forme quadratique sur E de rang* $\mathrm{rg}(q) = r$. *Il existe alors une base q-orthogonale $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2, \qquad M(b)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels (théorème de Sylvester)

Théorème 4.2. (de Sylvester) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q une forme quadratique sur E de rang* $\mathrm{rg}(q) = r$. *Il existe alors une base q-orthogonale $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$,*

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2, \qquad M(b)_\varepsilon = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où I_p est la matrice identité de dimension p, 0_{n-r} la matrice nulle de dimension $n-r$. L'entier p ne dépend que de q (et pas de la base). Le couple d'entiers $(p, r-p)$ est appelé signature *de q, notée* $\mathrm{sign}(q)$.

Corollaire 4.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit q une forme quadratique sur E de signature $(p, r-p)$. Alors il existe des sous-espaces vectoriels E_+ et E_- de E tel que*

1) *$E = E_+ \oplus E_- \oplus N(q)$, et la décomposition est orthogonale,*
2) *q est définie positive sur E_+, et pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ sur lequel q est définie positive,* $\dim F \leq p = \dim E_+$,
3) *q est définie négative sur E_-, et pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ sur lequel q est définie négative,* $\dim F \leq r - p = \dim E_-$.

Remarque 4.4. 1) La décomposition n'est pas unique.

2) Si q s'écrit $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2$ dans une certaine base, et est de signature $(p, r-p)$ alors il y a p coefficients $\alpha_i > 0$ et $r-p$ coefficients $\alpha_i < 0$.
3) Pour la suite, on retient que q est définie positive ssi $\operatorname{sign}(q) = (n, 0)$ ssi $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 4.5. (VRAI-FAUX) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

(b) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1, 1)$.

(c) La somme de deux formes quadratiques de signature $(1, 1)$ est une forme quadratique de signature $(1, 1)$.

5 Formes quadratiques positives, Cauchy-Schwarz, Minkowski

Dans cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle qu'une forme quadratique q est négative si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$, positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, et définie si $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 5.1. *Si q est une forme quadratique définie, elle est positive ou négative.*

Théorème 5.2. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soit q une forme quadratique positive sur E, et b sa forme polaire. Alors pour tous $x, y \in E$,*

$$b^2(x, y) \leq q(x)q(y) \tag{1.6}$$

Si de plus q est définie, l'égalité est vraie si et seulement si x et y sont colinéaires.

Corollaire 5.3. *Soit q une forme quadratique positive, alors $I(q) = N(q)$ et q est définie si et seulement si elle est non dégénérée.*

Proposition 5.4. **(Inégalité de Minkowski)** *Soit q une forme quadratique positive sur E, alors*

$$\forall x, y \in E, \quad \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \tag{1.7}$$

Chapitre 2 : espaces euclidiens et pré-hilbertiens

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme, distances euclidiennes

Définition 1.1. Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive. La *norme euclidienne* associée à un produit scalaire est la racine carrée de la forme quadratique associée. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit *euclidien* s'il est de dimension finie, et *pré-hilbertien* sinon.

,

Notation. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(\cdot, \cdot)$. Norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemple 1.2. $(\mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i)$ est euclidien.

$(\mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt)$ est pré-hilbertien.

$\ell^2(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 < \infty\}$ l'espace des suites réelles de carré sommable, est pré-hilbertien muni de $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$. Cette somme est bien définie car $2 \sum_{i=p}^q |x_i y_i| \leq \sum_{i=p}^q |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la suite $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge.

Proposition 1.3. *Tout norme euclidienne est une norme, c'est-à-dire satisfait, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposition 1.4. *Toute norme sur un espace vectoriel définit une distance par la formule* $d(x, y) = \|x - y\|$. *On appelle* distance euclidienne *une distance ainsi obtenue.*

Remarque 1.5. Il existe des normes non euclidiennes.

Proposition 1.6. *Une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'*identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in E \tag{2.1}$$

`Preuve:` Si la norme est euclidienne, on a par bilinéarité et symétrie, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ et $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$, d'où en additionnant l'identité du parallélogramme. Reciproque en exercice de TD. □

Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$.

Définition 1.7. On appelle θ *l'angle non orienté* entre x et y, noté $\theta = \sphericalangle(x, y) = \arccos(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|})$.

Théorème 1.8. *(Pythagore généralisé) Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien, alors*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ + 2\cos(\sphericalangle(x, y))\|x\|\|y\|,$$

et en particulier $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *si* $x \perp y$.
Si $u_1, \ldots, u_k$ *sont deux à deux orthogonaux* $\|u_1 + \cdots + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_k\|^2$.

Théorème 1.9. **(Toute forme linéaire sur un espace euclidien est le produit scalaire avec un vecteur)** *Soit E un espace euclidien. Alors l'application $a \mapsto a^\flat$ de E dans E^*, qui associe à $a \in E$ la forme linéaire $a^\flat : x \mapsto \langle x, a\rangle$, est un isomorphisme.*

Remarque 1.10. En conséquence, pour toute forme linéaire ℓ sur E il existe un unique $a \in E$ tel que $\ell(x) = \langle x, a\rangle$ pour tout $x \in E$. On note $a = \ell^\sharp$. Les applications $\flat : E \to E^*, a \mapsto a^\flat$ et $\sharp : E^* \to E, \ell \mapsto \ell^\sharp$, sont appelés *isomorphismes musicaux.* Ils ne dépendent pas d'un choix de bases sur E et E^* (mais dépendent du produit scalaire).

Exercice 1.11. Si $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de E euclidien et $e^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est sa base duale, alors $e_i^\flat = e_i^*$.

2 Orthogonalité

2.1 Bases orthogonales et orthonormées, orthogonalisation de Gram-Schmidt

Proposition 2.1. *Dans un espace euclidien ou pré-hilbertien, toute famille orthogonale est libre.*

Remarque 2.2. Si $(v_i)_{i\in I}$ est orthogonale, en posant $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ on obtient une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthonormée. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ par Pythagore généralisé.

Théorème 2.3. **(Théorème fondamental des espaces euclidiens)** *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Remarque 2.4. Si $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, alors

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_i x_i y_i = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Autrement dit, à isomorphisme près (celui qui associe à x ses coordonnées dans une base orthonormée), il n'y a qu'un espace euclidien de dimension n : $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Entre deux espaces euclidiens E, F de dimension n, il existe donc un isomorphisme $f : E \to F$ tel que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle_E = \langle f(x), f(y)\rangle_F.$$

Pour les produits scalaires, il existe une autre méthode que la méthode de Gauss 3.3 pour construire effectivement des bases orthogonales.

Proposition 2.5. **Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt** *Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, $(e_n)_n$ une famille (finie ou dénombrable) libre de vecteurs. Alors il existe une unique famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que pour tout k,*

1) $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

2) La matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_k)$ à $(u_1, \ldots, u_k)$ est triangulaire supérieure idempotente (la diagonale est constituée de 1).

Corollaire 2.6. *Sous les mêmes hypothèses, il existe une unique famille orthonormée* $(\varepsilon_n)_n$ *telle que pour tout* k *,* $\mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{vect}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ *et* $\langle e_k, \varepsilon_k\rangle > 0$.

Remarque 2.7. Puisque $\varepsilon_k \in \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_k\}$, et est orthogonal à $\mathrm{vect}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}\} = \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\} = \mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$, on a nécessairement $\varepsilon_k = \pm\frac{u_k}{\|u_k\|}$, d'où l'unicité.

`Preuve:` (Orthogonalisation) On construit $(u_n)_n$ par récurrence. On pose $u_1 = e_1$. Ayant défini $u_1, \dots, u_k$ satisfaisant 1) et 2), on cherche un vecteur $u_{k+1} \in \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$, orthogonal à $\mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_k\}$ et dont la composante sur e_{k+1} est 1. Le fait que $u_{k+1} \in \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ impliquera que la matrice de passage soit triangulaire supérieure.

Pour définir u_{k+1} il suffit de retrancher à e_{k+1} sa contribution sur $\mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_k\}$. Posant $\varepsilon_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$, la famille $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{vect}\{u_1, \dots, u_k\}$. On pose donc

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, \varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \dots - \langle e_{k+1}, \varepsilon_k\rangle\varepsilon_k \\ &= e_{k+1} - \langle e_{k+1}, u_1\rangle\frac{u_1}{\|u_1\|^2} - \dots - \langle e_{k+1}, u_k\rangle\frac{u_k}{\|u_k\|^2} \end{aligned}$$

En effet, en cherchant $u_{k+1} = e_{k+1} + \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_k\varepsilon_k \perp \varepsilon_i$, on trouve $0 = \langle u_{k+1}, \varepsilon_i\rangle = \langle e_{k+1}, \varepsilon_i\rangle + \lambda_i$ d'où les coefficients ci-dessus. □

Remarque 2.8. Si $(e_n)_n$ est une famille libre d'un espace euclidien ou pré-hilbertien, et $F = \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_k\}$ un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonalisation de Gram-Schmidt produit une famille orthogonale $(u_n)_n$ telle que $\{u_1, \dots, u_k\}$ est une base orthogonale de F, ce qu'on n'obtient pas à priori par la méthode de Gauss. En particulier, on peut compléter une base orthogonale d'un sous-espace F d'un espace euclidien en une base orthogonale de l'espace.

Proposition 2.9. *Soit* E *un espace pré-hilbertien,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille orthonormée de* E.

1) (inégalité de Bessel) pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

2) Si $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$*, (au sens que* $\|x - \sum_{i=0}^{n} x_i e_i\| \to 0$ *quand* $n \to \infty$*, où* $x_i \in \mathbb{R}$*), alors* $x_i = \langle x, e_i\rangle$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *et*

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = \|x\|^2.$$

Remarque 2.10. Une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout $x \in E$ s'écrive $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$ est appelée *base hilbertienne* de E. Ce n'est pas à priori une base au sens classique, où on demande que tout x soit combinaison linéaire finie des e_i (par exemple $\mathbb{R}[X]$ admet une base hilbertienne qui est une base mais $\ell_2(\mathbb{R})$ non). L'existence de base hilbertienne n'est pas garantie dans un espace pré-hilbertien quelconque. Une condition suffisante est que l'espace pré-hilbertien soit *complet*, c'est-à-dire quei toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E, pour la norme induite par le produit scalaire. Un espace pré-hilbertien complet est appelé *espace de Hilbert*, il admet toujours une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{\mathrm{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = E$, qui forme une base hilbertienne. Tout $x \in E$ s'écrivant alors $x = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2$ (égalité de Parseval). Ceci est traité dans le coufrs de L3 “Espaces de Hilbert”.

2.2 Sous-espaces orthogonaux, projecteurs et symétries

On rappelle que deux parties $A, B \subset E$ d'un espace euclidien ou pré-hilbertien sont orthogonales si $x \perp y$ pour tout $x \in A$ et $y \in B$. En particulier A et $A^\perp$ sont orthogonaux. Si deux sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$ sont orthogonaux, alors $F \cap G = \emptyset$.

Lemme 2.11. *Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $E = F \oplus F^\perp$.*

Corollaire 2.12. *Soit E un espace euclidien, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors*

1) $E = F \oplus F^\perp$.

2) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

3) $(F^\perp)^\perp = F$.

Remarque 2.13. ATTENTION Si F est de dimension infinie, il se peut que $F \oplus F^\perp \neq E$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Exemple 2.14. Soit F le sous-espace vectoriel de $E = \ell^2(\mathbb{R})$ formé des suites à support fini, on note $e_n \in F$ la suite $(0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots)$ dont tous les termes sont nuls sauf le $(n+1)^{me}$ qui vaut 1. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de F (base au sens classique : tout $x \in F$ est une combinaison linéaire finie des e_i). Soit un vecteur $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{R})$ orthogonal à F, alors $\langle x, e_n\rangle = x_n = 0$, pour tout entier n, donc $x = 0$. On a alors $F^\perp = \{0\}$, et donc $F \oplus F^\perp = F \neq E$ et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Définition 2.15. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, qui admet une décomposition orthogonale $E = F \oplus F^\perp$. Tout $x \in E$ s'écrivant de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$, on définit la *projection orthogonale sur F* comme étant l'application $p : E \to F$ telle que $p(x) = x_1$.

Remarque 2.16. p est un endomorphisme de E, $p \circ p = p$, $\mathrm{Im} p = F$ et $\ker p = F^\perp$. Si

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de F, alors $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ pour tout $x \in E$.

Proposition 2.17. *Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien qui admet une décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$, et soit $x \in E$. Pour tout $y \in F$ on a $\|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$, avec égalité si et seulemet si $y = p(x)$.*

Définition 2.18. Soit $A \subset E$ une partie non vide de E, et soit $x \in E$. On appelle distance de x à A,

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Corollaire 2.19. **(Distance à un sous-espace vectoriel)** *Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien qui admet une décomposition orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$, et soit $x \in E$, alors*

$$d(x, F) = d(x, p(x)) = \|x - p(x)\|.$$

Proposition 2.20. *Soit E un espace euclidien. Toute projection orthogonale p de E sur un sous-espace vectoriel F est diagonalisable dans une base orthonormée. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée telle que* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$, *alors*

$$M(p)_{e \to e} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 0}}^{F} & \overbrace{\hphantom{0 \quad \ddots \quad 0}}^{F^{\perp}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2.21. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien admettant une décomposition orthognale $E = F \oplus F^{\perp}$, on appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* l'application $s : E \to E$ définie par $s(x) = x_1 - x_2$, pour tout $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^{\perp}$.

Remarque 2.22. On a $s(x) = 2p(x) - x$, soit aussi $p(x) = \frac{x + s(x)}{2}$.

Proposition 2.23. *Toute symétrie orthogonale est une isométrie, c'est-à-dire vérifie*

$$\langle s(x), s(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x, y \in E.$$

En particulier $\|s(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

Remarque 2.24. L'identité ci-dessus définit en fait une application orthogonale (cf. définition 3.27). L'isométrie est une notion métrique, qui se trouve coincider avec la notion d'application orthogonale, lorsque l'application en question est linéaire, ce qui est le cas de la symétrie.

Proposition 2.25. *Soit* E *un espace euclidien. Toute symétrie orthogonale* s *de* E *par rapport à un sous-espace vectoriel* F *est diagonalisable dans une base orthonormée. Si* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *est une base orthonormée telle que* $\mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = F$, *alors*

$$M(s)_{e \to e} = \begin{array}{cc} \overbrace{}^{F} & \overbrace{}^{F^\perp} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & -1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

2.3 Un exemple : les polynômes orthogonaux

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle_\omega = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)\, dt$$

(si I est non borné, on impose à ω de vérifier $|\int_I t^n \omega(t)\, dt| < \infty$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.26. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 2.27. Le lemme est vrai sous l'hypothèse plus générale que $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ est positive non identiquement nulle.

La base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas orthogonale à priori. En fait elle ne l'est jamais, quelque soit I et ω.

Définition 2.28. On appelle *polynômes orthogonaux* une base $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que P_n

est de degré n pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et $\langle P_n, P_m \rangle_\omega = 0$ pour tous $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 2.29. Le procédé l'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unitaires*, c'est-à-dire telle que $P_n = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$.

Par construction P_0 est constant et P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$. On a une formule de récurrence :

Lemme 2.30. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes orthogonaux unitaires. Alors pour $n \geq 1$,*

$$XP_n = P_{n+1} + a_n P_n + b_n P_{n-1},$$

où $a_n = \frac{\langle XP_n, P_n \rangle_\omega}{\langle P_n, P_n \rangle_\omega}$ et $a_n = \frac{\langle XP_n, P_{n-1} \rangle_\omega}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\omega}$.

Une application à l'approximation.

Supposons I compact et $\omega = 1$, alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ est pré-hilbertien. La norme euclidienne associée est la norme L^2 : $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\,dt$. Identifions $\mathbb{R}[X]$ avec les fonctions polynomiales sur I, on a alors abusivement $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2.31. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes orthonormés. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$d_2(f, \mathbb{R}_n[X]) = d_2\left(f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, P_k \rangle P_k\right).$$

On peut montrer que la distance tend vers 0 quand le degré $n \to \infty$, à l'aide du résultat suivant :

Théorème 2.32. *(Stone-Weirstrass)*

$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On a, puisque $\|f\|_2^2 = \int_I f^2(t)\,dt \leq \int_I \|f\|_\infty^2(t)\,dt < C\|f\|_\infty^2$, que $\mathbb{R}[X]$ est aussi dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$). Il s'ensuit que $d_2(f, \mathbb{R}_n[X])$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

3 Endomorphismes dans un espace euclidien

3.1 Endomorphismes adjoints

Définition 3.1. Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, et soit $f \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que $f^* \in \operatorname{End}(E)$ est l'*endomorphisme adjoint* de f si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Remarque 3.2. 1) On vérifie sans peine que si l'adjoint existe il est unique.
2) En inversant les variables x et y et par symétrie du produit scalaire, on a de manière équivalente

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle.$$

Théorème 3.3. *Soit E un espace euclidien et soit $f \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme de E. Alors f admet un adjoint f^*. Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de E, et $A = M(f)_{e\to e}$, alors la matrice $A^* = M(f^*)_{e\to e}$ de f^* dans la même base vaut $A^* = {}^tA$.*

Exemple 3.4. 1) Soient $a, b \in E$ et $f(x) = \langle a, x\rangle b$. Alors $\langle f(x), y\rangle = \langle = \langle a, x\rangle b, y\rangle = \langle b, y\rangle\langle a, x\rangle = \langle\langle b, y\rangle a, x\rangle = \langle x, \langle b, y\rangle a\rangle$ pour tous $x, y \in E$, donc $f^*(y) = \langle b, y\rangle a$.
2) Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$ muni que $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$. Si note $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ les éléments de E, posons $f(x) = (0, x_0, x_1, \ldots)$ (décalage vers la droite). Alors $f \in \operatorname{End}(E)$ admet pour adjoint le décalage à gauche défini par $f^*(x) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, puisque

$$\langle f(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i-1} y_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_{j+1} = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

3) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire vérifiant $\langle X^n, X^m\rangle = \delta_n^m$. Soit $f \in \operatorname{End}(E)$ vérifiant par $f(X^n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'adoint f^* existe, alors $1 = \langle f(X^n), 1\rangle = \langle X^n, f^*(1)\rangle$ pour tout n, ce qui est absurde puisque $f^*(1) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré fini.

Exercice 3.5. Si $e = \{e_i\}$ est une base *quelconque* de E, $A = M(f)_{e\to e}$ et $A^* = M(f)_{e\to e}$, alors $A^* = G^{-1t}AG$, où G est la matrice du produit scalaire dans la base $\{e_i\}$, i.e. $G = (\langle e_i, e_j\rangle)$ (matrice de Gram).

Proposition 3.6. *Soient $f, g \in \operatorname{End}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
1) $f^{**} = f$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$,
2) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
3) $\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f$, $\det f^* = \det f$.

Remarque 3.7. On déduit de 1) et 2) que si $f \in \mathrm{GL}(E)$ (le groupe Général Linéaire, ou groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(E)$, c'est-à-dire le groupe des isomorphismes de E pour la loi de composition) en alors $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

Proposition 3.8. *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors*
1) $\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$ *et* $\mathrm{Im} f^* = (\ker f)^\perp$
2) $F \subset E$ est f-stable si et seulement si $F^\perp$ est f^*-stable.

Corollaire 3.9. *Soit E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors on a les décompositions orthogonales*

$$E = \ker f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f^* = \ker f^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f.$$

Lien avec la dualité
On rappelle qu'on a un isomorphisme $\mathcal{B}(E) \approx \mathscr{L}(E, E^*)$, et qu'on a aussi, dépendant d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E, un isomorphisme $\sharp : E^* \overset{\approx}{\to} E$. On peut donc construire un isomorphisme $\Theta : \mathcal{B}(E) \to \mathscr{L}(E, E) = \mathrm{End}(E)$, défini comme suit :

$$\begin{array}{cccccc} \Theta : \mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, E*) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E, E) \\ b & \longmapsto & L & \longmapsto & \sharp \circ L = f \\ & & L(y)(x) = b(x, y) & & \end{array}$$

où par définition $\langle f(y), x \rangle\rangle = \langle \sharp L(y), x \rangle = L(y)(x) = b(x, y)$. A tout $b \in \mathcal{B}(E)$, on associe donc un unique $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$,

$$b(x, y) = \langle x, f(y) \rangle.$$

En inversant le rôle de x et y dans la définition de L, ou ce qui revient au même, en appliquant Θ à ${}^t b \in \mathcal{B}(E)$ défini par ${}^t b(x, y) = b(y, x)$, on associe à b un autre endomorphisme $f^* = \Theta({}^t b) \in \mathrm{End}(E)$ tel que $b(y, x) = \langle x, f^*(y) \rangle$, soit $b(x, y) = \langle y, f^*(x) \rangle$ en inversant le nom des variables, et f^* vérifie bien par symétrie du produit scalaire l'identité fondamentale

$$b(x, y) = \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle. \tag{2.2}$$

Le passage à l'adjoint correspond donc à l'isomorphisme $\Theta \circ {}^t \circ \Theta^{-1}$.

Point de vue matriciel
Soient e une base de E, $M = M(b)_e$, $A = M(f)_{e \to e}$, $A^* = M(f^*)_{e \to e}$ et $G = (\langle e_i, e_j \rangle)$ la matrice de Gram du produit scalaire. L'identité fondamentale (2.2) s'écrit matriciellement

$$\begin{aligned} {}^t X \cdot M \cdot Y &= {}^t X \cdot GA \cdot Y &&= {}^t (A^* X) \cdot G \cdot Y \\ &= {}^t X \cdot GA \cdot Y &&= {}^t X \cdot {}^t (A^*) G \cdot Y \end{aligned}$$

d'où

$$M = GA = {}^tA^*G.$$

qui se réduit à $M = A = {}^tA^*$ si e est orthonormée.

Remarque 3.10. La convention opposée $b(x, y) = \langle f(x), y\rangle$ conduirait à ce que la matrice de f comme endomorphisme soit ${}^tM$, et non M, la matrice de f^* étant alors M. Cela ne fait aucune différence lorsqu'on considère des formes bilinéaires symétriques.

On peut également définir l'adjoint d'une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces euclidiens comme l'endomorphisme $f^* : F \to E$ vérifiant

$$\langle f(x), y\rangle_F = \langle x, f^*(y)\rangle_E, \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Si on appelle *transposée de f*, l'application linéaire ${}^tf : F^* \to E^*$, $\ell \mapsto \ell \circ f$, on peut vérifier que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{f^*} & F \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ E^* & \xleftarrow{{}^tf} & F^* \\ \ell \circ f & \longleftarrow\!\shortmid & \ell \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les isomorphismes musicaux $\flat$ et $\sharp$ induits par les produits scalaires de E et F. Autrement dit, l'action de l'adjoint f^* sur les vecteurs se voit sur les formes linéaires comme la composition par f. On voit que l'adjoint est une notion euclidienne (elle dépend du produit scalaire) mais que la transposée ${}^tf$ non.

Exercice 3.11. Soient e une base de E et u une base de F (quelconques), si $A = M(f)_{e \to u}$, alors $M({}^tf)_{u^* \to e^*} = {}^tA$.

3.2 Endomorphismes symétriques, ou autoadjoints

Définition 3.12. Un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ d'un espace euclidien ou pré-hilbertien est *symétrique*, ou *auto-adjoint*, si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Remarque 3.13. 1) f est symétrique si et seulement si $f^* = f$.

2) f est symétrique si et seulement si la forme bilinéaire $b(x, y) := \langle f(x), y\rangle$ est symétrique.

3) Si A est la matrice de f dans une base orthonormée, alors f est symétrique si et seulement ${}^tA = A$.

Exercice 3.14. Dans une base quelconque A n'est pas nécessairement symétrique si f est symétrique. Montrer que f est symétrique si et seulement si ${}^tAG = GA$, où G est la matrice du produit scalaire dans la base e.

Exemple 3.15. Les projections orthogonales et symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques, puisqu'ils admettent une matrice diagonale donc symétrique dans une base orthonormée.

En fait, le fait d'être symétrique caractérise, parmi les projections et symétries, les projections orthogonales et les symétries orthogonales. Rappelons que si E a une décomposition en deux espaces supplémentaires $E = F \oplus G$ (non nécessairement orthogonaux), on définit la projection p_F et la symétrie s_F *parallèlement à* G en posant, pour $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$, $p_F(x) = x_1$ et $s_F(x) = x_1 - x_2$. Alors

Lemme 3.16. *1) p_F est un endomorphisme symétrique $\Leftrightarrow G = F^\perp$.*
2) s_F est un endomorphisme symétrique $\Leftrightarrow G = F^\perp$.

On voit donc qu'une symétrie est symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale. Ce phénomène de "rigidité" est en fait emblématique des endomorphismes symétriques, comme le montre l'important théorème suivant :

Théorème 3.17 (Théorème spectral). *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique, alors*

1) f est diagonalisable.

2) Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En conséquence f admet une base orthonormée de vecteurs propres, formée en prenant une base orthonormée de chaque sous-espace propre.

Remarque 3.18. On réfère parfois à ce résultat par "diagonalisation simultanée" ou "orthogonalisation simultanée". En effet si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de E et b la forme bilinaire symétrique définie par $b(x, y) = \langle f(x), y \rangle$, alors la base orthonormée de vecteurs propres de f orthogonalise simultanément $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et b. Maintenant soient q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, où q_1 est définie positive, on peut alors orthogonaliser simultanément q_1 et q_2 : soit f l'endomorphisme tel que $b_2(x, y) = b_1(x, f(y))$, où b_1 et b_2 sont les formes polaires de q_1 et q_2, b_1 étant un produit scalaire (avec les conventions de la page 29, $f = \Theta(b_2)$ où Θ est défini en utilisant b_1). Puisque b_2 est symétrique, f est symétrique pour b_1 et la base q_1-orthonormée de vecteurs propres de f est q_2-orthogonale.

Corollaire 3.19. *Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel E de dimension finie, où on suppose q_1 définie positive. Alors il existe une base de E qui est q_1-orthonomée et q_2-orthogonale.*

Corollaire 3.20. *(Théorème spectral, version matricielle) Soit $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.*

1) M est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2) Il existe une matrice $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice diagonale D telle que

$$ {}^tPMP = P^{-1}MP = D. $$

Une matrice P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$ est dite *orthogonale* (voir section 3.3).

Corollaire 3.21. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $b \in \mathcal{S}(E)$ une forme bilinéaire symétrique , e une base de E et $M = M(b)_e$. Alors b est un produit scalaire sur E si et seulement si les valeurs propres de M sont toutes strictement positives.*

Applications

Définition 3.22. Soit E un espace euclidien, on dit qu'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ est positif, resp. négatif, resp. définie, si la forme bilinéaire définie par $b(x,y) = \langle f(x), y\rangle$ est positive, resp. négative, resp. définie.

Exercice 3.23. Si E est euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont symétriques positifs, et définis si f^* est injectif, resp. f est injectif.

Proposition 3.24 (Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif)**.** *Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif, alors il existe un unique $g \in \mathrm{End}(E)$ symétrique et positif tel que $f = g \circ g$.*

Proposition 3.25. *Soit E un espace euclidien non nul, et soit $f \in \mathrm{End}(E)$ symétrique, alors*

$$ \begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \sup\nolimits_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \sup\{\mathrm{spec}(f)\} \\ \inf_{\|x\|=1} \langle f(x), x\rangle &= \inf\nolimits_{\|x\|\neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} &= \inf\{\mathrm{spec}(f)\} \end{aligned} $$

Rappelons que la matrice hessiène d'une application 2 fois dérivable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est la matrice de ses dérivées partielles secondes, c'est une matrice symétrique donc diagonalisable. On rappelle un résultat vu en analyse :

Proposition 3.26. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3, $p \in \mathbb{R}^2$ un point critique de F, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de la matrice hessiènne de$F$ en p. Alors*

1) Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors F admet un minimum local strict en p,

2) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors F admet un maximum local strict en p,

3) Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, alors F admet un point selle en p.

3.3 Endomorphismes orthogonaux

Soit E un espace euclidien ou pré-hilbertien, non réduit à $\{0\}$.

3.3.1 Applications orthogonales et isométries

Définition 3.27. Une application $f : E \to E$ est *orthogonale* si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

C'est une *isométrie* si

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Remarque 3.28. 1) Une application orthogonale préserve l'orthogonalité : si $x \perp y$, alors $0 = \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ donc $f(x) \perp f(y)$.

2) Une application orthogonale préserve la norme : $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

3) Une application orthogonale préserve les angles :

$$\sphericalangle(f(x), f(y)) = \arccos\left(\frac{\langle f(x), f(y)\rangle}{\|f(x)\|\|f(y)\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right) = \sphericalangle(x, y).$$

4) Une application orthogonale est linéaire (voir lemme 3.29(1) ci-dessous).

5) Une application orthogonale est une isométrie :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= ||f(x) - f(y)|| \\ &= ||f(x - y)|| \quad \text{(par linéarité)} \\ &= ||x - y|| \quad \text{(préserve la norme)} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

6) Une isométrie n'est pas nécessairement linéaire, donc pas nécesairement orthogonale. Par exemple, pour $v \in E \setminus \{0\}$ fixé, la translation $x \mapsto x + v$ est une isométrie non linéaire. Cependant une isométrie fixant 0, et en particulier une isométrie linénaire, est orthogonale :

Lemme 3.29. *Soit $f : E \to E$ une application.*

(1) Si f est orthogonale, alors elle est linéaire et injective. Si E est de dimension finie, alors f est un automorphisme.

(2) Si f est une isométrie fixant 0, alors f est orthogonale.

On note $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{End}(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de E, $\mathrm{Isom}(E)$ l'ensemble des isométries.

Corollaire 3.30. *Soit $f \in Isom(E)$. Alors il existe un unique couple $g \in O(E)$ et $v \in E$ tel que,*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x) + v.$$

Définition 3.31. On note $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, i.e $f : E \to E$ isomorphisme.

Proposition 3.32. *Soit $f \in \mathrm{Aut}(E)$. Sont équivalents :*

1) f est orthogonal,

2) f préserve la norme, ie $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

3) l'adjoint f^* existe et $f^* = f^{-1}$.
En dimension finie, également :

4) Il existe une base orthononormée e telle que f transforme e une base orthonormée.

5) f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

6) Si $A = M(f)_{e \to e}$ est la matrice de f dans une base orthonormée, alors ${}^tAA = I$. De manière équivalente, $A^tA = I$, ou ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 3.33. Si e est une base quelconque de E, et $A = M(f)_{e \to e}$, alors f est orthogonale si et seulement si ${}^tAGA = G$, où G est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e.

Remarque 3.34. (Club confusion) On prendra garde que

1) Une projection orthogonale n'est pas orthogonale en tant qu'application (!), car pas injective, (sauf quand c'est l'identité...)

2) Une symétrie orthogonale est orthogonale (cf prop. 2.23). En fait, une symétrie est orthogonale comme application ssi c'est une symétrie orthogonale ssi elle est symétrique comme endomorphisme (cf lemme 3.16).
Pour la première implication, soit f une symétrie et $E = E_1 \oplus E_{-1}$ la décomposition en sous-espaces propres correspondante, alors si on suppose f orthogonale comme application, i.e. $f^* = f^{-1}$, pour tous $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$, on a

$$\langle x, -y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^*(f(y)) \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

donc $E_{-1} = E_1^\perp$, i.e. f est une symétrie orthogonale.

3.3.2 Groupe orthogonal et spécial orthogonal, orientation

Théorème 3.35. *L'ensemble des automorphismes orthogonaux,* $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{Aut}(E)$*, est un groupe pour la loi de composition appelé* groupe orthogonal *de* E*. L'application déterminant* $\det : \mathrm{O}(E) \to \{-1, 1\} \subset (\mathbb{R}^*, \cdot)$ *est un morphisme de groupe. Le sous-groupe* $SO(E) := \det^{-1}(\{1\})$ *est appelé* groupe spécial orthogonal *ou* groupe des rotations*, ou* groupe des isométries directes*.*

On peut aussi noter $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E)$ et $\mathrm{O}^-(E) = \det^{-1}(\{-1\}) \subset O(E)$. Contrairement à $\mathrm{O}^+(E)$, l'ensemble $\mathrm{O}^-(E)$ n'est pas un sous-groupe.

Exemple 3.36. 1) Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F, i.e. où $E = F \oplus F^\perp$ avec $\dim F^\perp = 1$, est un élément de $\mathrm{O}^-(E)$, qu'on appelle *réflexion*.

2) Plus généralement, si s est une symétrie orthogonale par rapport à F, alors $s \in \mathrm{SO}(E)$ si $\dim F^\perp$ est paire et $s \in \mathrm{O}^-(E)$ sinon.

Proposition 3.37. *Soit* $f \in \mathrm{O}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *une valeur propre de* f*, alors* $\lambda \in \{-1, 1\}$*.*

Du coup, c'est très restrictif d'être orthogonal et diagonalisable :

Proposition 3.38. *Soit* $f \in \mathrm{O}(E)$*, alors* f *diagonalisable si et seulement si* f *est une symétrie orthogonale.*

En particulier un endomorphisme symétrique et orthogonal est une symétrie orthogonale.

Définition 3.39. On appelle
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\} = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ le *groupe orthogonal*, et
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ le groupe *spécial orthogonal.*

Proposition 3.40. *Soit* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*. Sont équivalents :*

1) $X \mapsto AX$ *est une une application orthogonale de* $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire canonique.*
2) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
3) $A^tA = I$.
4) *Les lignes de* A *sont orthonormées dans* $\mathbb{R}^n$*.*
5) *Les colonnes de* A *sont orthonormées dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.41. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Pour tout espace euclidien E de dimension n, et toute base orthonormée de E, les matrices orthogonales sont exactement les matrices des transformations orthogonales de E exprimées dans la base orthonormée. Formellement, si e est une base orthonormée de E, on a l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(E) & \longrightarrow & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & M(f)_{e\to e} \end{array}$$

qui envoie $\mathrm{SO}(E)$ sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.42. *Soient e, e' deux bases orthonormées de E, alors la matrice de passage $P_{e\to e'} = M(id)_{e'\to e}$ est orthogonale.*

On a dans ce cas $P^{-1}MP = {}^tPMP$, ce qui peut faciliter certains calculs.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Notons $\mathbb{B} = \{e = \{e_1, \ldots, e_n\}, e \text{ base de } E\}$ l'ensemble des bases ordonnées de E (les vecteurs sont numérotés de 1 à n).

Définition 3.43. On dit que deux bases $e, e' \in \mathbb{B}$ ont *même orientation* si $\det(P_{e\to e'}) > 0$, sinon on dit qu'elle ont *orientation opposée*.

Ainsi, permuter 2 vecteurs dans une base en change l'orientation. Si e' s'obtient de e par permutation circulaire de n vecteurs, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \mapsto e' = (e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1)$, alors e et e' on tmême orientation si n est impair, et ont orientation opposée si n est pair (Exercice). Avoir la même orientation définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{B}$, formellement :

$$\forall e, e' \in \mathbb{B}, e \,\mathcal{R}\, e' \Leftrightarrow \det(P_{e\to e'}) > 0.$$

Lemme 3.44. *$\mathcal{R}$ est une relation d''equivalence sur $\mathbb{B}$, qui a exactement deux classes d'équivalence, appelées* classes d'orientation.

`Preuve:` On a $e\mathcal{R}e$ puisque $P_{e\to e} = I_n$ est de déterminant 1. Si $e\mathcal{R}e'$, alors $e'\mathcal{R}e$ puisque $P_{e'\to e} = P^{-1}_{e\to e'}$ et que $\det P_{e'\to e} = \det P^{-1}_{e\to e'} = (\det P_{e\to e'})^{-1} > 0$. Supposons $e\mathcal{R}e'$ et $e'\mathcal{R}e''$. On a donc $\det P_{e\to e'} > 0$ et $\det P_{e'\to e''} > 0$. Rappelons que $P_{e\to e'} = M(id)_{e'\to e}$ et qu'étant données trois bases b, b', b'' on a la formule fondamentale de composition

$$M(g\circ f)_{b\to b''} = M(g)_{b'\to b''} M(f)_{b\to b'}.$$

On a donc

$$P_{e\to e''} = M(id)_{e''\to e} = M(id \circ id)_{e''\to e} = M(id)_{e'\to e} M(id)_{e''\to e'} = P_{e\to e'} P_{e'\to e''}$$

d'où $\det P_{e\to e''} = \det(P_{e\to e'}) \det(P_{e'\to e''}) > 0$, ce qui montre que $e\mathcal{R}e''$. La relation "avoir la même orientation" est donc bien une relation d'équivalence. Il est clair qu'il y a au plus deux classes d'équivalence. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $e' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a l'orientation opposée à e. Il y a donc exactement deux classes d'orientation. □

On a donc une partition $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$, où toutes les bases de $\mathbb{B}_1$ ont même orientation, toutes les bases de $\mathbb{B}_2$ ont même orientation, et les bases de $\mathbb{B}_1$ ont l'orientation opposée à celles de $\mathbb{B}_2$.

Définition 3.45. On dit que E est *orienté*, ou qu'on a *fixé une orientation* de E, si on a choisi une classe d'orientation. On dit alors que les bases de cette classe sont *directes*, et que celles de l'autre sont indirectes.

Pour fixer une orientation de E il suffit de choisir une base $e \in \mathbb{B}$, qui conduit à écrire la partition en classes $\mathbb{B} = \mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-$, où $\mathbb{B}^+$ est la classe d'orientation de e.

Exemple 3.46. On oriente souvent $\mathbb{R}^n$ par la base canonique. Ainsi $(\vec{i}, \vec{j})$ dans $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans $\mathbb{R}^3$ sont directes, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ est directe mais $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ est indirecte.

Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(E)$ respecte l'orientation, c'est-à-dire envoie une base sur une base de même orientation, si et seulement si $\det f > 0$. En effet, soit $e \in \mathbb{B}$, soit $e' = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = f(e) \in \mathbb{B}$, on voit que

$$M(f)_{e\to e} = M(id)_{e'\to e} = P_{e\to e'},$$

et on se rappelle que $\det f$ se calcule comme le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque (et ne dépend pas de la base), par exemple $\det f = \det(M(f)_{e\to e}$, d'où l'assertion. Si E est euclidien, $f \in \mathrm{SO}(E)$ agit donc sur les bases orthonormées en préservant l'orientation.

Théorème 3.47. *(Un peu de culture)*
Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

`Preuve:` Soit G un groupe de cardinal n, un théorème de Cayley dit qu'alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, n\})$, i.e. l'ensemble des bijections

$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ muni de la loi de composition. On considère alors

$$\begin{array}{ccccl} G & \xrightarrow{\text{inj}} & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \sigma & \longmapsto & f, \text{ où } f(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array}$$

On peut vérifier que la deuxième flèche est bien un morphisme de groupe et injective.

L'idée du théorème de Cayley est de considérer $\mathfrak{S}(G)$ le groupe des bijections de G dans lui-même. On peut injecter G dans $\mathfrak{S}(G)$, en faisant agir G sur lui-même par produit à gauche, i.e. à $g \in G$ on associe la bijection $\phi_g : G \to G$ définie par $\phi_g(h) = gh$, et on pose

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ g & \longmapsto & \phi_g : h \mapsto gh \end{array}$$

On peut aussi vérifier que c'est un morphisme de groupe injectif. Ensuite $\mathfrak{S}(G)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ (numéroter de 1 à n les éléments du groupe...). $\square$

3.3.3 Groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, et $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.48. *Soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π tel que que :*

1) soit $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ représente une rotation d'angle θ, ou bien

2) $A \in O_2^-(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite polaire d'angle $\theta/2$.

On note R_θ la matrice de la rotation, et S_θ celle de la symétrie.

Exercice 3.49. Vérifier que S_θ est bien la matrice d'une symétrie orthogonale rapport à la droite polaire d'angle $\theta/2$ (appliquer une formule de changement de base, ou tester les vecteurs propres).

Corollaire 3.50. *Soit E euclidien de dimension 2 orienté, et soit $u, v \in E \setminus \{0\}$. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ et un unique endomorphisme $f \in \mathrm{SO}(E)$ de matrice R_θ dans une base orthonormée directe tel que*

$$f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}.$$

Si e est orthonormée directe, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\det(u,v)_e}{\|u\|\|v\|}.$$

On appelle θ l'*angle orienté* de u à v. Un changement d'orientation remplace θ par $2\pi - \theta$.

3.3.4 Groupe $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

On oriente $\mathbb{R}^3$ par sa base canonique e.

Proposition 3.51. *Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e\to e}$. Il existe une base $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ orthonormée telle que*

$$A' := \mathrm{M}(f)_{e'\to e'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

où $\varepsilon = \det A \in \{-1, +1\}$, avec $\varepsilon = 1$ si $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ si $A \in O_3^-(\mathbb{R})$.

Supposons $A \neq \pm\mathrm{Id}$. Si $\epsilon = 1$, A représente une rotation d'axe l'espace propre $E_\varepsilon = \mathrm{vect}\{e'_3\}$ et d'angle orienté θ dans le plan $\mathrm{vect}\{e'_1, e'_2\}$ orienté par $\{e'_1, e'_2\}$. Si $\varepsilon = -1$, A représente la composée de cette rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_\varepsilon^\perp$, c'est-à-dire $f = g \circ h$ où

$$M(g)_{e'\to e'} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(h)_{e'\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'angle orienté de rotation

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté, et soit $f \in O(E)$, qu'on suppose $\neq \pm\mathrm{Id}$. Soit e une base orthonormée directe, et $A = M(f)_{e\to e} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. D'après la proposition, f admet $\epsilon = \det A \in \{-1, +1\}$ pour valeur propre, d'espace propre E_ϵ de dimension 1. En restriction au plan euclidien $E_\epsilon^\perp$, c'est une rotation dont l'angle non orienté θ vérifie

$$\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\theta) + \det A \tag{2.3}$$

En effet la trace est invariante par changement de base donc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}A'P) = \mathrm{tr}(A'PP^{-1}) = \mathrm{tr}A'$. La formule détermine $\pm\theta$, soit encore θ ou $2\pi - \theta$. Pour déterminer le sens de rotation, on fixe une orientation de $E_\varepsilon^\perp$, en choisissant une orientation de la normale, c'est-à-dire $\vec{n} \in E_\varepsilon \setminus \{0\}$, le plan $E_\varepsilon^\perp$ est alors orienté par $\{v_1, v_2\}$ tel que $\{v_1, v_2, \vec{n}\}$ soit directe. L'angle orienté $\theta \in [0, 2\pi[$

est déterminé par (2.3) et

$$\sin(\theta) = \frac{\det\left(u, f(u), \vec{n}\right)_e}{\|u\|^2\|\vec{n}\|}$$

où $u \perp E_\varepsilon$ est un vecteur non nul du plan de rotation. On peut vérifier cette formule en prenant la base $e'' = \{v_1, v_2, \vec{n}\}$ orthonormée directe, et en utilisant $\left(u, f(u), \vec{n}\right)_e = P_{e \to e''}\left(u, f(u), \vec{n}\right)_{e''}$.

Remarque 3.52. On a aussi $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u, f(u)\rangle}{\|u\|^2}$.

3.3.5 Produit vectoriel

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté.

Définition 3.53. On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs indépendants $u, v \in E$ le vecteur $u \wedge v \in E$ tel que :

- $u \wedge v$ est orthogonal à $\mathrm{vect}\{u, v\}$
- $\|u \wedge v\| = |\sin\theta|\|u\|\|v\|$, où θ est l'angle (non orienté) de u, v,
- $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E.

Si u et v sont liés on pose $u \wedge v = 0$.

La quantité $|\sin\theta|\|u\|\|v\|$ est l'aire du parallélogramme engendré par u et v. Si $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormée directe, on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

Proposition 3.54. *On a les propriétés suivantes*

1) $v \wedge u = -u \wedge v$.

2) Si $\vec{n}$ est unitaire et orthogonal à $\mathrm{vect}\{u, v\}$, et θ est l'angle orienté de u à v pour l'orientation définie par $\vec{n}$ (i.e. $(u, v, \vec{n})$ est directe), alors

$$u \wedge v = \sin(\theta)\|u\|\|v\|\vec{n}$$

3) Si e est une base orthonormée directe et $\vec{n}$ est unitaire et orthogonal à $\mathrm{vect}\{u, v\}$, alors

$$u \wedge v = \det\left(u, v, \vec{n}\right)_e \vec{n}$$

Corollaire 3.55. *L'application $E \times E \to E \times E$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée. Si $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormée directe, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ on a*

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

Exercice 3.56. Démontrer la formule.

Proposition 3.57. *On a les propriétés suivantes*
1) **(Identité de Lagrange)** $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle$
2) **(double produit vectoriel)** $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$
3) **(Identité de Jacobi)** $x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$

Proposition 3.58. *Soient $x, y \in E$ et e une base orthonormée directe, alors $x \wedge y$ est l'unique vecteur de E tel que*

$$\forall z \in E, \qquad \langle x \wedge y, z \rangle = \det\big(x, y, z\big)_e$$

3.3.6 Miscellannées : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, décomposition polaire

Soit E un espace euclidien.

Théorème 3.59. *Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormée e de E telle que*

$$M(f)_{e \to e} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) &&& \\ &&&&&& \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) &&& \\ &&&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&&& \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ &&&&&&&&& \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{pmatrix}$$

On note que $f \in \mathrm{SO}(E)$ s'il a un nombre pair $2p$ de valeurs propres -1, qui correspondent à p rotations d'angle π sur des 2-plans deux à deux orthogonaux. On voit donc que $f \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si c'est une composée de rotations ($p + r$ dans ce cas), ce qui justifie qu'on appelle $\mathrm{SO}(E)$ le groupe des rotations.

On appelle *refléxion* une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à $F \subset E$ où F est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F = \dim E - 1$.

Théorème 3.60. *On suppose que* $\dim E = n \geq 2$. *Alors toute transformation orthogonale* $f \in \mathrm{O}(E)$ *s'écrit :*

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_r, \quad r \leq n$$

où les s_i *sont des réflexions (la décomposition n'est pas unique).*

Théorème 3.61 (Décomposition polaire). *Tout automorphisme* $f \in \mathrm{Aut}(E)$ *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f = g \circ a$$

où g *est orthogonal et* a *est auto-adjoint défini positif.*

4 Liste d'exercices

La question de cours de l'examen posera des questions parmi les suivantes.

E désigne un espace euclidien de dimension n, e une base quelconque, $G \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de Gram du produit scalaire dans la base e (i.e. la matrice de la forme bilinéaire), $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E et f^* l'endomorphisme adjoint de f. On définit $A = M(f)_{e \to e}$ et $A^* = M(f^*)_{e \to e}$.

Exercice 4.1. Démontrer les assertions suivantes.

1) On a $A^* = G^{-1}({}^tA)G$, et f est symétrique si et seulement si ${}^tAG = GA$.

2) Les endomorphismes $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont symétriques et positifs. De plus $f \circ f^*$, resp. $f^* \circ f$, est défini si f^* est injectif, resp. f est injectif.

3) f est orthogonale si et seulement si ${}^tAGA = G$.

4) f est orthogonale si et seulement si f envoie les bases orthonormées sur les bases orthonormées.

5) Une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

6) La matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ représente une symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite polaire d'angle $\theta/2$.

7) Si E est de dimension 3 et orienté, et $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormée directe, alors
$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$
pour tous $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$.

8) Soit F un sous-espace vectoriel, et $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de F. Alors il existe un produit scalaire sur F pour lequel u est orthonormée.

Exercice 4.2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

(a) Une projection orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

(b) Une symétrie qui est symétrique comme endomorphisme est un endomorphisme orthogonal.

(c) Une symétrie qui est un endomorphisme orthogonal est un endomorphisme symétrique.

(d) Une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Index