

Outils d'Analyse
pour les
Equations Differentielles
Ordinaires

*
* *

Ludovic Godard-Cadillac



Année Universitaire 2024-2025

Table des matières

0	Analyse réelle : rappels et compléments	5
0.1	Normes et topologie	5
0.2	Régularité des fonctions	6
0.2.1	Continuité, dérivabilité, caractère \mathcal{C}^1	6
0.2.2	Fonctions lipschitziennes	7
0.3	Comparaison asymptotique	8
0.4	Rappels et compléments d'algèbre	10
0.4.1	Matrices particulières et algorithmes	10
0.4.2	Reduction de Jordan et exponentielle de matrice	11
0.5	Bilan du chapitre	13
0.5.1	Ce qu'il faut retenir et savoir-faire	13
0.5.2	Exercices	13
1	Existence et unicité des solutions	15
1.1	Existence et unicité locale d'une solution	15
1.2	Durée de vie d'une solution et Lemme de Grönwall	19
1.2.1	recollement de deux solutions	19
1.2.2	Lemme de Grönwall	20
1.3	Résolution d'équations et analyse asymptotique	23
1.3.1	Equations différentielles linéaires à coefficients constants	23
1.3.2	Équations différentielles séparables	24
1.3.3	Analyse asymptotique par principes de comparaison	25
1.4	Bilan du Chapitre et exercices	26
1.4.1	Ce qu'il faut retenir et savoir-faire	26
1.4.2	Exercices	26
2	Analyse asymptotique et stabilité des solutions	37
2.1	Quantités conservées	37
2.1.1	Le cadre des équations linéaires	38
2.1.2	Le cadre Hamiltonien	38
2.1.3	Systèmes dissipatifs	43
2.2	Différentes notions de stabilité	44
2.2.1	Stabilité et stabilité asymptotique	44
2.2.2	Stabilité de Lyapunov et théorème de Lyapunov	45
2.2.3	Application à la mécanique hamiltonienne et dissipative	46
2.3	Stabilité des équations linéaires et stabilité du linéarisé	49
2.3.1	L'exponentielle d'un bloc de Jordan	49
2.3.2	Allure des solutions d'une équation linéaire	50
2.3.3	Stabilité pour les équations linéaire et théorème du linéarisé	53
2.3.4	4 exemples de dynamiques linéaires	53

2.4	Bilan du Chapitre et exercices	54
2.4.1	Ce qu'il faut retenir et savoir-faire	54
2.4.2	Exercices	54
3	Analyse numérique et approximations	59
3.1	Discrétisation des équations différentielles	59
3.1.1	Principe Général des méthodes à un pas	59
3.1.2	Premier exemple : Euler explicite et implicite	60
3.1.3	Erreur de Consistance et Stabilité	61
3.2	Discrétisations d'ordre plus élevé	64
3.2.1	Ordre de convergence d'un schéma	64
3.2.2	Crank-Nicolson et Point-Milieu implicite	65
3.2.3	Point-Milieu explicite et Méthode de Heun	67
3.2.4	Méthodes de Runge-Kutta	68
3.2.5	Méthodes de Adams-Bashforth	72
3.2.6	Liste d'autres méthodes numériques	73
3.3	Implémentation informatique	73
3.3.1	Implémentation des méthodes explicites	73
3.3.2	Implémentation des méthodes implicites	77
3.3.3	Calculer l'ordre empirique d'un schéma	78
3.3.4	Choisir le bon schéma et le bon pas de temps	79
3.4	Bilan du Chapitre et exercices	82
3.4.1	Ce qu'il faut retenir et savoir-faire	82
3.4.2	Exercices	82

Introduction

Ce polycopié consacré à l'analyse des Équations Différentielles Ordinaires (EDO) a été conçu pour les étudiants en première année du département de mathématiques pour la mécanique de l'école d'ingénieur ENSEIRB-MATMECA (Groupe Bordeaux-INP). Il s'adresse plus généralement à toutes celles et ceux qui souhaitent acquérir des bases solides dans l'analyse de ces équations, tant sous les aspects relatifs à l'étude des solutions exactes que l'implémentation de méthodes numériques pour la résolution approchée. Ce document peut être librement reproduit, diffusé ou imprimé. Son contenu a été construit sur la base du matériel pédagogique légué par les précédents responsables de ce cours, à savoir les professeurs Annabelle Collin et Kevin Santugini.

Important : Les éléments du polycopié signalés par le symbole (†) (appelé “*dague*” ou “*obèle*”) sont les éléments les plus importants du cours, qu'il faut travailler en priorité. Il s'agit de résultats fondamentaux que l'on peut utiliser sans refaire la démonstration lors de la résolution des exercices. Le symbole (‡) (“*double-dague*” ou “*double-obèle*”) signale en plus que ce résultat tombera comme question de cours le jour de l'examen...

Chapitre 0

Analyse réelle : rappels et compléments

0.1 Normes et topologie (†)

DÉFINITION 0.1 (Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel réel et soit $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. On dit que l'application \mathcal{N} est une *norme* sur E ssi elle vérifie les propriétés suivantes :

- **homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$.
- **séparation** : $\mathcal{N}(x) = 0 \implies x = 0$.
- **inégalité triangulaire** : $\forall x, y \in E, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Pour les normes, nous adopterons la notation usuelle suivante : $\| _ \|_E$.

L'inégalité triangulaire existe sous deux formulations équivalentes :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E \iff \forall x, y \in E, \left| \|x\|_E - \|y\|_E \right| \leq \|x - y\|_E.$$

Exemple de normes en dimension finie : les normes ℓ^p pour $p \in [1, +\infty]$ sont définies sur l'espace $E = \mathbb{R}^d$ (en séparant le cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$) par

$$\|x\|_{\ell^p} := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}, \quad \text{ou} \quad \|x\|_{\ell^\infty} := \max_{k=1, \dots, d} |x_k|.$$

Pour simplifier les notations par la suite, la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d , à savoir la norme ℓ^2 , sera simplement noté $|_ |$ par analogie avec la valeur absolue sur \mathbb{R} .

Exemple de normes en dimension infinie : les normes L^p pour $p \in [1, +\infty]$ sont définies sur l'espace $E = \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^p)$, avec Ω borné, par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x)|^p dx}, \quad \text{ou} \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

DÉFINITION 0.2 (Convergence en norme)

Soit $(E, \| _ \|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que (x_n) *converge vers* $x \in E$ ssi $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|x_n - x\|_E \leq \varepsilon$.

En dimension finie, la notion de convergence est indépendante du choix de la norme.

La convergence pour la norme L^∞ des fonctions s'appelle la convergence uniforme.

DÉFINITION 0.3 (Boule ouverte et boule fermée)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $r \geq 0$. On définit la *boule ouverte* de centre x et de rayon r par

$$\mathcal{B}(x, r) := \{y \in E : \|x - y\|_E < r\}.$$

On définit la *boule fermée* de centre x et de rayon r par

$$\overline{\mathcal{B}}(x, r) := \{y \in E : \|x - y\|_E \leq r\}.$$

DÉFINITION 0.4 (Ensemble ouvert et ensemble fermé)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et soit V un sous-ensemble de E . On dit que V est un *ensemble ouvert* ssi

$$\forall x \in V, \quad \exists r > 0, \quad \mathcal{B}(x, r) \subseteq V.$$

On dit que V est un *ensemble fermé* ssi son complémentaire est ouvert.

Dans la définition précédente, le $r > 0$ dépend implicitement du choix de $x \in V$.

Important : Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés. Il existe des ensembles qui sont et ouverts et fermés.

DÉFINITION 0.5 (Ensemble compact)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et soit V un sous-ensemble de E . On dit que V est un *ensemble compact* ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de V on peut extraire une sous-suite qui converge dans V .

En dimension finie, un ensemble est compact ssi il est fermé et borné.

En dimension infinie : la boule unité fermée de l'espace des fonctions L^2 n'est pas compacte.

0.2 Régularité des fonctions (†)

0.2.1 Continuité, dérivabilité, caractère \mathcal{C}^1

DÉFINITION 0.6 (Fonction continue)

Une fonction $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue* en un point $x \in \Omega$ ssi $f(y)$ tend vers $f(x)$ lorsque $y \in \Omega$ tend vers x_0 .

On rappelle que les fonctions dérivables sont continues mais que la réciproque est fautive.

DÉFINITION 0.7 (Fonction dérivable)

Une fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert, est *dérivable* en un point $x \in I$ ssi

$$h \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

admet une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est la dérivée de f en x , noté $\frac{df}{dx}(x)$, ou parfois $f'(x)$. En physique, lorsque la variable représente le temps t , on note aussi $\dot{f}(t)$.

La notion de *dérivabilité* est bien définie pour les fonctions d'une seule variable réelle. Pour les fonctions de plusieurs variables, on utilise la notion de *dérivée partielle*. La k^e dérivée partielle d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d) est la dérivée de f par rapport à la k^e composante de la variable, noté $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. On note $\nabla f(x)$ (le gradient de f) le vecteur formé de chacune des dérivées partielles de f .

DÉFINITION 0.8 (fonction \mathcal{C}^1)

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d) est de classe \mathcal{C}^1 ssi $x \mapsto \nabla f(x)$ est continue.

On définit de manière analogue les fonctions \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^∞ .

Remarque : Les fonctions \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sont toutes dérivables mais la réciproque est fautive. De même en dimension supérieure.

0.2.2 Fonctions lipschitziennes**DÉFINITION 0.9** (Fonction lipschitzienne)

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d) et soit $x \in \Omega$. On dit que f est *lipschitzienne* au point $x \in \Omega$ ssi

$$\exists r_x > 0, \quad \exists \lambda_x \geq 0, \quad \forall y \in \Omega \cap \mathcal{B}(x, r_x), \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda_x \|x - y\|.$$

On dit que f est *localement lipschitzienne* si elle est lipschitzienne en tout point $x \in \Omega$.

Si de plus on peut choisir r_x et λ_x indépendamment de $x \in \Omega$ alors on dit que f est *globalement lipschitzienne*. De manière équivalente :

$$\forall x, y \in \Omega, \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Pour la prononciation, dire : “*lip-chit-sienne*”. On dit aussi souvent “lipschitz” par simplicité.

Pour un fonction f globalement lipschitzienne, le plus petit λ possible dans la définition ci-dessus existe et s'appelle la *constante de Lipschitz* de la fonction f . Au niveau *intuitif*, il faut retenir que les fonctions (globalement ou localement) lipschitziennes sont les fonctions dont la pente est bornée (globalement ou localement). Il s'agit de fonctions beaucoup plus régulières que les fonctions juste “continues” et sont parfois qualifiées de “*presque dérivables*”.

Exemples de fonctions globalement lipschitz (sur \mathbb{R}) :

$$x \mapsto 2x + 1, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto \tanh(x), \quad x \mapsto \arccos(\cos(x)), \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^3}.$$

Exemples de fonctions localement mais pas globalement lipschitz :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin(x^2), \quad x \mapsto |x^3 - x|, \quad x \mapsto x^2 \sin(1/x)$$

Exemples de fonctions continues mais pas localement lipschitz :

$$x \mapsto x \ln(|x|), \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}, \quad x \mapsto x \sin(1/x), \quad x \mapsto \sqrt{|\sin(x)|}.$$

PROPOSITION 0.1 Régularité des fonctions lipschitziennes

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d).

- (i) Si f est \mathcal{C}^1 , alors elle localement lipschitz.
- (ii) Si f est \mathcal{C}^1 à dérivée bornée, alors elle globalement lipschitz.
- (iii) Si f est localement lipschitz, alors elle est continue.

Pour montrer qu'une fonction est globalement (resp. localement) lipschitz, il suffit souvent de montrer qu'elle est \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée pour la majorer (localement ou globalement). Si cette approche ne fonctionne pas, on peut par exemple utiliser les propriétés complémentaires suivantes :

(iv) Si f est dérivable sauf en un nombre fini de points, avec une dérivée localement bornée, alors elle localement lipschitz.

(v) Si f est dérivable sauf en un nombre fini de points, avec une dérivée globalement bornée, alors elle globalement lipschitz.

Remarque : Tous les polynômes sont localement lipschitz. Les fonctions affines sont les seuls polynômes qui sont globalement lipschitz.

PROPOSITION 0.2 (Stabilité de l'ensemble des fonctions lipschitziennes)

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d) deux fonctions globalement (resp. localement) lipschitz et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (i) $\lambda f + \mu g$ est globalement (resp. localement) lipschitz.
- (ii) fg est localement lipschitz (globalement si f et g bornées).
- (iii) $f \circ g$ est globalement (resp. localement) lipschitz.
- (iv) f/g est localement lipschitz sur $\Omega \setminus \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}$ et globalement sur $\{x \in \Omega : |g(x)| \leq \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé (avec une constante de Lipschitz λ qui dépend de ε) dès que f et $1/g$ sont bornées.

→ Ces propriétés sont utiles pour montrer qu'une fonction est lipschitzienne en la décomposant en plusieurs fonctions lipschitziennes plus simples.

Proposition 0.2.1. *Si une fonction est localement lipschitz sur un compact K alors elle est globalement lipschitz sur ce compact.*

0.3 Comparaison asymptotique (†)

On rappelle ici les concepts essentiels pour comparer le comportement asymptotique des fonctions au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Ces notions se généralisent pour l'analyse à l'infini.

DÉFINITION 0.10 (Fonctions négligeables et prépondérantes)

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d). On dit que f est *négligeable* devant g (ou bien g est *prépondérante* sur f) au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$ ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } x \rightarrow x_0.$$

On le note $f \ll g$ ou bien $f = o(g)$, tout en précisant le point x_0 étudié.

Exemple : $e^{-\frac{1}{x}} \ll x^2 \ll x \ll x \ln(x) \ll \sqrt{x} \ll \ln(x)^{-1}$, lorsque $x \rightarrow 0^+$.

DÉFINITION 0.11 (Fonctions équivalentes)

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d). On dit que f est *équivalente* à g au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$ ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1, \quad \text{lorsque } x \rightarrow x_0.$$

On le note $f \sim g$ ou bien $f = g + o(g)$, tout en précisant le point x_0 étudié.

Exemple : $\sin(x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

DÉFINITION 0.12 (Fonctions dominantes et dominées)

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d). On dit que f est *dominée* par g (ou g est *dominante* sur f) au voisinage de $x_0 \in \Omega$ ssi il existe une constante $C > 0$ et un rayon $r > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{B}(x_0, r), \quad f(x) \leq C g(x).$$

On le note $f \lesssim g$ ou bien $f = \mathcal{O}(g)$, tout en précisant le point x_0 étudié.

exemple : $3x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \lesssim x^2$ ou $3x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = \mathcal{O}(x^2)$, lorsque $x \rightarrow 0$.

La notation “*petit o*” et “*grand O*” sont très utiles pour écrire les développements limités :

$$\tanh(x) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} + \mathcal{O}(z^{11}).$$

DÉFINITION 0.13 (Fonctions comparables)

Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^d). On dit que f et g sont *comparables* au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$ ssi il existe deux constantes $0 < c \leq C$ et un rayon $r > 0$ tels que

$$\forall x \in \Omega \cap \mathcal{B}(x_0, r), \quad c g(x) \leq f(x) \leq C g(x).$$

On le note $f \simeq g$, ou bien $f = \Theta(g)$.

exemple : $3x^2 \left(1 + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \simeq x^2$ ou $3x^2 \left(1 + \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \Theta(x^2)$, si $x \rightarrow 0$.

remarque : par convention la notation \approx n'est pas utilisée pour les fonctions comparables. On réserve cette dernière notation pour des manipulations formelles et non rigoureuses en théorie de l'approximation pour faciliter la lecture et expliquer la démarche.

Il ne faut donc pas confondre “ \simeq ” (notation rigoureuse) et “ \approx ” (notation non-rigoureuse utilisée à des fins pédagogiques).

Autres résultats d'analyse à connaître

Quelques résultats fondamentaux d'analyse qu'il faut absolument connaître (il s'agit de l'analyse fonctionnelle élémentaire) :

- Théorème fondamental de l'analyse
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Hölder
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Inégalité des accroissements finis
- Théorème des croissances comparées
- Développements limités et notion d'asymptote
- Théorème des valeurs extrêmes de Weierstrass
- Équations différentielles linéaire d'ordre 1 et 2
- Méthode de variation de la constante
- Formule de changement de variables
- Dérivation des fonctions composées

0.4 Rappels et compléments d'algèbre (†)

0.4.1 Matrices particulières et algorithmes

Dans le cadre de l'analyse des équations différentielles, nous faisons appels à de nombreux outils issus de l'algèbre linéaire et bilinéaire. Ces outils sont très utilisés pour l'analyse des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. Il est donc important de bien les connaître dans le cadre de ce cours et plus généralement tout au long de la formation d'ingénieur. Il est ainsi impératif d'ouvrir ses cours des années précédentes afin d'être au point sur :

- Matrices carrées, rectangles, triangulaires, diagonales, tri-diagonales.
- Transposée d'une matrice, conjuguée, adjointe, inverse.
- Matrices équivalentes et matrices semblables.
- Polynômes annulateurs, polynôme caractéristique.
- Algorithme du pivot de Gauss, trigonalisation, diagonalisation.
- Le groupe linéaire et le groupe spécial linéaire.
- Matrices symétriques et anti-symétriques.
- Matrices orthogonales, unitaires, nilpotentes.
- Algorithme de Gram-Schmidt.

0.4.2 Réduction de Jordan et exponentielle de matrice

Dans le cadre de ce cours, nous utiliserons la réduction de Jordan pour les endomorphismes.

DÉFINITION 0.14 (Bloc de Jordan)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit le *bloc de Jordan* $J_k(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ comme étant la matrice carrée de taille k suivante :

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est diagonalisable que si $k = 1$ et elle est nilpotente ssi $\lambda = 0$.

THÉORÈME 0.1 (Réduction de Jordan) (†)

Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs et dont les blocs sont de Jordan :

$$M \sim \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & (0) \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & \\ & & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que, tout endomorphisme de \mathbb{R}^d se laisse représenter dans une certaine base par une matrice de Jordan (diagonale par blocs de Jordan). Un tel endomorphisme est diagonalisable ssi ses blocs de Jordan sont de taille 1. L'obtention de la réduction de Jordan se fait par la même approche que les méthodes de diagonalisation avec quelques ajouts. Plus précisément, l'algorithme est le suivant (†) :

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M et trouver ses racines (qui sont les valeurs propres de M).
2. Pour chaque valeur propre λ , déterminer l'espace propre associé $E_\lambda := \ker(M - \lambda I_n)$.
3. Pour construire les blocs de Jordan, on insère d'abord dans notre nouvelle base un vecteur propre de la matrice. ie : on prend $v_1 \in E_\lambda$ tel que $Mv_1 = \lambda v_1$.
4. On cherche alors un vecteur non-nul $v_2 \in \mathbb{C}^d$ tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$ et on le rajoute dans notre base de \mathbb{C}^d .
5. On procède itérativement on cherchant $(A - \lambda I_n)v_k = v_{k-1}$ jusqu'à ce que ce processus itératif ne donne plus de solutions.
6. Par construction, L'espace vectoriel engendré par les vecteurs (v_1, \dots, v_k) est stable par M . Dans cette base, l'endomorphisme canoniquement associé à M est représenté par le bloc de Jordan $J_k(\lambda)$.
7. Après avoir obtenu un bloc de Jordan, on revient à l'étape 2 et on recommence jusqu'à avoir obtenu tous les blocs de Jordan de la matrice M et la base associée.

L'un des principaux intérêts de la réduction de Jordan est qu'elle facilite grandement le calcul des puissances de cette matrice car il suffit de calculer les puissances des blocs de Jordan (qui se calculent à la main sans trop de difficultés). En particulier, cela permet de calculer facilement les exponentielles de matrices :

DÉFINITION 0.15 (Exponentielle de matrice) (†)

Pour une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ on définit l'exponentielle de la matrice M par

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Par ailleurs, si M est un bloc de Jordan $J(\lambda)$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tJ(\lambda)) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour calculer l'exponentielle d'une matrice, on peut commencer par calculer sa réduction de Jordan et ensuite appliquer l'exponentielle à la réduite de Jordan (dans le cas diagonal, l'exponentielle s'applique bloc par bloc). Ces matrices exponentielles vont jouer un rôle important dans l'analyse des équations différentielles.

Remarque importante : puisque nous travaillons avec des matrices à coefficients réels, lorsque l'on a une valeur propre λ avec une partie imaginaire non-nulle alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre. Ces deux valeurs propres complexes conjuguées auront les mêmes blocs de Jordan (il est donc important de toujours les étudier les espaces propres associés à λ et $\bar{\lambda}$ ensemble).

0.5 Bilan du chapitre

0.5.1 Ce qu'il faut retenir et savoir-faire

Ce chapitre est surtout consacré à des rappels de base + quelques compléments. Ce sont des concepts et des outils indispensables pour l'analyse des équations différentielles. Ce chapitre doit être compris et maîtrisé dans son ensemble. Les éléments les plus saillants à retenir sont les suivants :

- (†) Espace vectoriels normés et topologie, fonctions \mathcal{C}^0 , \mathcal{C}^1 .
- (†) Les fonctions lipschitziennes : retenir la définition et la proposition 0.2.1.
- (†) Comparaison asymptotique des fonctions.
- (†) Analyse fonctionnelle élémentaire.
- (†) Algèbre linéaire et bilinéaire.
- (†) Algorithme de réduction de Jordan et exponentielle de matrice

0.5.2 Exercices

Les exercices du chapitre 1 *ne seront pas traités en TD* mais il est conseillé de les faire afin de s'assurer de bien maîtriser les concepts de base de l'analyse ainsi que les concepts complémentaires de ce chapitre (fonctions lipschitziennes, réduction de Jordan). S'il y a le moindre blocage sur ces exercices fondamentaux, ne pas hésiter à se rapprocher des chargés de TD (en sachant que un certain nombre de ces notions seront de toute façon retravaillées dans le cours de calcul différentiel).

Exercice 0.1. Ces fonctions se prolongent-elles par continuité en $x = 0$? le prolongement est-il \mathcal{C}^1 ? \mathcal{C}^k ? \mathcal{C}^∞ ?

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}, \quad x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \mapsto \frac{\tan^2(x) \sinh(x)}{|x|}, \quad x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 0.2. Ces fonctions se prolongent-elles par continuité en $(x, y) = (0, 0)$? Le prolongement est-il \mathcal{C}^1 ?

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \quad (x, y) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 0.3. Montrer que : $e^x \left(2 - \frac{1}{x} - \sin(x)\right) \simeq e^x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 0.4. Montrer que, par croissance comparée :

$$e^{-\frac{1}{x}} \ll x^2 \ll x \ll x \ln(x) \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln(x)}, \quad \text{si } x \rightarrow 0^+.$$

Exercice 0.5. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{k^2 + n^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{8} + \frac{1}{n}\right) \simeq n^2$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 0.6. Trouver l'asymptote polynomiale en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{x^3}{x+1}$.

Exercice 0.7. Montrer que les fonctions suivantes sont globalement lipschitz (sur \mathbb{R}) :

$$x \mapsto 2x + 1, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto \tanh(x), \quad x \mapsto \max\{x, 0\}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^3}.$$

Montrer que les fonctions suivantes sont localement mais pas globalement lipschitz :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin(x^2), \quad x \mapsto |x^3 - x|, \quad x \mapsto x^2 \sin(1/x).$$

Montrer que les fonctions suivantes sont continues mais pas localement lipschitz :

$$x \mapsto x \ln(|x|), \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}, \quad x \mapsto x \sin(1/x), \quad x \mapsto \sqrt{|\sin(x)|}.$$

Exercice 0.8. Faire la réduction de Jordan des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 0.9. Dans la Définition 0.15 : démontrer que l'exponentielle de matrice est bien définie (la série converge) et démontrer la formule pour les exponentielles de blocs de Jordan (avec le paramètre $t \in \mathbb{R}$).

Chapitre 1

Existence et unicité des solutions

Dans ce chapitre nous présentons la théorie générale des équations différentielles ordinaires EDO permettant d'étudier le caractère bien posé de ces équations. Nous présentons les principaux théorèmes permettant d'établir l'existence et l'unicité locale (sur un petit intervalle de temps $[0, T_0[$) ou bien globale (sur $[0, +\infty[$ ou sur \mathbb{R} tout entier) des solutions d'une équation munie d'une donnée initiale à $t = 0$. On évoque également quelques principes de comparaison pour étudier le comportement des solutions au voisinage des temps pour lesquels existence ou unicité cessent d'être vérifiés.

Le chapitre se termine par un recueil d'exercices permettant de s'entraîner à l'étude des équations différentielles en appliquant les théorèmes fondamentaux de ce chapitre à des équations issus de modèles physiques ou biologiques.

1.1 Existence et unicité locale d'une solution

On appelle *équation différentielle* un équation dont l'inconnue est une fonction d'une seule variable réelle (assimilée à l'écoulement temps) et à valeurs vectorielles $X : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$. Cette équation est dite *explicite* ou bien *de Cauchy* si elle est de la forme : $\dot{X} = \mathcal{F}(t, X(t))$, avec $\mathcal{F} : [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d et $T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Dans ce qui suit, on dira que $X(t)$ est la *position* du système au temps t et que dX/dt , également noté \dot{X} est son *vecteur-vitesse*. La fonction \mathcal{F} est appelé le *champ de vitesse* associé à l'équation. Dans le cas où \mathcal{F} ne dépend pas de la variable temporelle, on dit que l'équation est *autonome*.

DÉFINITION 1.1 Problème de Cauchy (‡)

On appelle *problème de Cauchy* le problème consistant à trouver les solutions d'une équation différentielle étant donné leur position au temps initial. Autrement dit, pour $\mathcal{F} : [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $X_0 \in \Omega$ fixés (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d), on cherche les fonctions $X : [0, T) \rightarrow \Omega$ telles que

$$\frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0 \in \Omega. \quad (1.1)$$

Étant donné une équation différentielle munie d'une donnée initiale, il est naturel de penser qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy. En effet, il suffit pour le point $X(t)$ de suivre le champ de vitesse \mathcal{F} dès lors que celui-ci n'est pas trop irrégulier (on parle alors d'équation différentielle *ordinaire*). Cette intuition a été formalisée dans le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME 1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz (‡)

On considère, pour $\mathcal{F} : [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $X_0 \in \mathbb{R}^d$ fixés (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d) le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0. \quad (1.2)$$

(i) Si le champ de vitesse \mathcal{F} est une fonction *localement lipschitzienne*, alors il existe $T_0 \in]0, T[$ tel que le problème de Cauchy (1.2) admet une *unique* solution $X : [0, T_0[\rightarrow \mathbb{R}^d$.

(ii) Si de plus on a $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T = +\infty$ et si la fonction \mathcal{F} est *globalement lipschitzienne* alors le point précédent est vrai avec $T_0 = +\infty$.

Le plus grand temps T_0 tel que le théorème 1.1-(i) soit vérifié s'appelle le *temps maximal d'existence* de la solution et on le notera $T^*(X_0)$ ou plus simplement T^* quand la dépendance en la donnée initiale est implicite. Lorsque le temps T^* vaut $+\infty$, on parle alors de *solution globale*. Si on ne connaît pas le temps final T^* ou si celui-ci satisfait $T^* < +\infty$, on parle alors seulement de *solution locale*.

On dit alors que le problème de Cauchy est *bien-posé* (localement ou globalement).

La démonstration rigoureuse de ce théorème a nécessité plus d'un siècle (essentiellement pendant le XIXe siècle) avec des contributions de mathématiciens parmi les meilleurs de leur époque. Parmi-eux on retient souvent les noms principaux, à savoir Augustin-Louis Cauchy, Rudolf Lipschitz, Emile Picard, Stephan Banach, et Ernst Lindelöf. Cette théorème est célébré à la fois pour son caractère fondamental dans l'étude des équations différentielles, mais également de par l'étonnant détour théorique nécessaire pour obtenir sa démonstration. On utilise notamment le théorème (abstrait) d'analyse fonctionnelle suivant :

THÉORÈME 1.2 Point-fixe de Picard-Banach

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, T]; \Omega)$, avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d , et on munit l'espace E de la norme L^∞ . On considère une fonctionnelle $\mathfrak{G} : E \rightarrow E$ et on suppose qu'elle est *contractante* :

$$\exists \delta < 1, \quad \forall \phi, \psi \in E, \quad \|\mathfrak{G}(\phi) - \mathfrak{G}(\psi)\|_{L^\infty} \leq \delta \|\phi - \psi\|_{L^\infty}. \quad (1.3)$$

Autrement-dit, elle est globalement lipschitz avec une constante $\delta < 1$. Dans ce cas, la fonctionnelle \mathfrak{G} admet un unique point-fixe :

$$\exists! \phi^* \in E, \quad \phi^* = \mathfrak{G}(\phi^*).$$

Les outils théoriques permettant de démontrer le théorème de Picard-Banach en toute généralité seront présentés en détails lors du prochain semestre dans le cadre du cours consacré au calcul d'intégrales. Pour l'instant nous admettons ce résultat qui va nous permettre de démontrer la première partie du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Démonstration du théorème 1.1-(i). *Etape 1 : Formule de Duhamel.* Si on considère l'équation différentielle et qu'on l'intègre au cours du temps entre 0 et $t \geq 0$, on obtient :

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mathcal{F}(s, X(s)) ds.$$

On remplace à présent $X(0)$ par la donnée initiale du problème de Cauchy $X_0 \in \Omega$ et on aboutit à la formule de Duhamel :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mathcal{F}(s, X(s)) ds. \quad (1.4)$$

Réciproquement, une fonction $X : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ qui vérifie la formule de Duhamel est également solution du problème de Cauchy associé à avec la donnée initiale $X(0) = X_0$. En effet, il est immédiat de vérifier que si on prend $t = 0$ dans (1.4) alors $X(0) = X_0$. De plus, puisque $s \mapsto X(s)$ est continue, on a donc $s \mapsto \mathcal{F}(s, X(s))$ continue comme composée de fonctions continues. En effet, \mathcal{F} est continue car lipschitzienne. Le théorème fondamental de l'analyse nous permet alors de conclure que

$$t \mapsto \int_0^t \mathcal{F}(s, X(s)) ds \quad \text{est } \mathcal{C}^1, \quad \text{et sa dérivée vaut } t \mapsto \mathcal{F}(t, X(t)).$$

On peut ainsi dériver (1.4) et retrouver l'équation initiale. Ceci établit l'équivalence entre le problème de Cauchy et la formule de Duhamel.

Etape 2 : Construction de la fonctionnelle \mathfrak{G} . Il n'est pas possible de travailler directement sur Ω tout entier car on va avoir besoin d'un argument nécessitant un compact. On travaille alors dans le compact $K := \overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$ où le rayon $R > 0$ est choisi assez petit pour que $K \subset \Omega$ (un tel R existe car Ω un ouvert). Soit $T_0 > 0$ un paramètre (que l'on ajustera plus tard). On pose $E = \mathcal{C}^0([0, T_0]; K)$ et on définit la fonctionnelle \mathfrak{G} par

$$\forall X \in E, \quad \mathfrak{G}(X)(t) := X_0 + \int_0^t \mathcal{F}(s, X(s)) ds \quad (1.5)$$

Puisque X et \mathcal{F} sont continues, on en déduit que la fonction $\mathfrak{G}(X)$ est continue à valeurs dans \mathbb{R}^d . Autrement dit, \mathfrak{G} est une fonction qui va de $E = \mathcal{C}^0([0, T_0]; K)$ dans $\mathcal{C}^0([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$.

À présent, pour $X, Y \in E$ fixés on a (par l'inégalité triangulaire) :

$$\forall t \in [0, T_0], \quad \left| \mathfrak{G}(X)(t) - \mathfrak{G}(Y)(t) \right| \leq \int_0^t \left| \mathcal{F}(s, X(s)) - \mathcal{F}(s, Y(s)) \right| ds. \quad (1.6)$$

On rappelle alors que \mathcal{F} est une fonction localement lipschitzienne. Elle est donc globalement lipschitzienne sur le compact K (par la proposition 0.2.1) et on note λ_K sa constante de Lipschitz. On a donc $|\mathcal{F}(s, X(s)) - \mathcal{F}(s, Y(s))|$ majoré par $\lambda_K |X(s) - Y(s)|$ pour tout s . Ainsi (1.6) devient :

$$\forall t \in [0, T_0], \quad \left| \mathfrak{G}(X)(t) - \mathfrak{G}(Y)(t) \right| \leq \lambda_R \int_0^t |X(s) - Y(s)| ds.$$

En prenant à présent le suprémum à pour la variable temporelle sous l'intégrale :

$$\forall t \in [0, T_0], \quad \left| \mathfrak{G}(X)(t) - \mathfrak{G}(Y)(t) \right| \leq \lambda_R \int_0^t \|X - Y\|_{L^\infty} ds = \lambda_R t \|X - Y\|_{L^\infty}.$$

Puis le suprémum à l'extérieur de l'intégrale :

$$\|\mathfrak{G}(X) - \mathfrak{G}(Y)\|_{L^\infty} \leq \lambda_R T_0 \|X - Y\|_{L^\infty}.$$

Par conséquent, si $T_0 > 0$ est choisi assez petit (strictement inférieur à $1/\lambda_R$), alors \mathfrak{G} est contractante.

Etape 3 : Conclusion de la preuve par un argument de point-fixe. On souhaite utiliser le Théorème de point-fixe de Picard-Banach (Théorème 1.2) sur la fonctionnelle contractante \mathfrak{G} . Le problème c'est que *a priori* la fonctionnelle \mathfrak{G} prends ses valeurs dans $\mathcal{C}^0([0, T_0], \mathbb{R}^d)$ et

non pas dans $E = \mathcal{C}^0([0, T_0], K)$. Cependant, on remarque que (1.5) implique par l'inégalité triangulaire que

$$\forall t \in [0, T_0], \quad \left| \mathfrak{G}(X)(t) - X_0 \right| \leq \int_0^t \left| \mathcal{F}(s, X(s)) \right| ds \quad (1.7)$$

Puisque on travaille avec des fonctions $t \mapsto X(t)$ à valeurs dans le compact K , on en déduit, par le théorème des valeurs extrêmes de Weierstrass, que cette fonction est bornée. Il s'en suit de même, puisque $[0, T_0] \times K$ est un compact, que \mathcal{F} est bornée sur $[0, T_0] \times K$. On peut donc effectuer la majoration suivante :

$$\forall t \in [0, T_0], \quad \left| \mathfrak{G}(X)(t) - X_0 \right| \leq \int_0^t \|\mathcal{F}\|_{L^\infty([0, T_0] \times K)} ds \leq T_0 \|\mathcal{F}\|_{L^\infty([0, T_0] \times K)} \quad (1.8)$$

Par conséquent, si on choisit T_0 assez petit, on a $T_0 \|\mathcal{F}\|_{L^\infty} \leq R$ et donc pour tout $t \in [0, T_0]$ on a $\mathfrak{G}(X)(t) \in K = \overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$.

Ainsi, \mathfrak{G} est bien une fonction de E dans E contractante. On peut alors appliquer le Théorème de point-fixe de Picard-Banach (Théorème 1.2) et en déduire l'existence et l'unicité de $X^* \in E$ tel que

$$X^* = \mathfrak{G}(X^*). \quad (1.9)$$

Ceci équivaut à dire que $t \in [0, T_0] \mapsto X^*(t)$ est l'unique fonction continue qui vérifie la formule de Duhamel (1.4). Cette formule étant équivalente au problème de Cauchy étudié, on a donc démontré l'existence et l'unicité des solutions au problème de Cauchy sur $[0, T_0]$. \square

Remarque : On démontre le théorème dans le cadre où la solution est définie sur un intervalle de temps de la forme $[0, T[$. Si on souhaite traiter un intervalle de temps plus général, de type $[T_1, T_2]$, avec une donnée initiale donnée au temps T_1 , il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème translatée, en étudiant $t \mapsto X(t - T_1)$. On mets donc le temps initial à 0 pour simplifier (en règle générale).

Remarque 2 : Il est également possible d'étudier ce qui se passe pour les temps négatif $] -T, 0]$ avec une donnée initiale au temps 0. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème symétrisée en temps en étudiant $t \mapsto X(-t)$. En conséquence, en plus du temps maximal d'existence sur les temps positifs $T^* \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, il y a aussi un temps maximal d'existence dans les temps négatifs $T_* \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$. La solution $t \mapsto X(t)$ définie sur l'intervalle de temps $]T_*, T^*[$ est souvent appelée *solution maximale*.

Remarque 3 : Dans le cas des équations différentielles faisant intervenir des dérivées d'ordre plus élevé, il est toujours possible de se ramener à un système d'équations avec seulement des dérivées d'ordre 1 en faisant intervenir un plus grand nombre de variables. Par exemple si on travaille avec

$$\ddot{x}(t) = a\dot{x}(t) + bx(t),$$

on peut introduire une nouvelle variable $v(t) = \dot{x}(t)$ afin de faire diminuer l'ordre de la dérivation tout en faisant grossir la taille du système. En effet, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

De manière générale (†) : il faut s'entraîner à reformuler les systèmes d'EDO sous la forme d'un problème de Cauchy !

1.2 Durée de vie d'une solution et Lemme de Grönwall

1.2.1 recollement de deux solutions

Il est possible de recoller deux solutions d'une même équation différentielle posées sur des intervalles de temps contigus. La fonction ainsi recollée devient solution de l'équation sur la réunion des deux intervalles de temps. Ce type de manipulations permet notamment d'étudier de temps de vie des solutions de l'EDO :

THÉORÈME 1.3 fin d'existence d'une solution (†)

On considère, $\mathcal{F} : [0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $X_0 \in \mathbb{R}^d$ fixés (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d) le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0 \in \Omega. \quad (1.10)$$

On suppose que T^* , le temps maximal d'existence de la solution $t \mapsto X(t)$, est fini. Dans ce cas, pour tout $K \subseteq \Omega$ compact, il existe un temps $t_K \in [0, T^*[$ tel que

$$\forall t \in]t_K, T^*[, \quad X(t) \in \Omega \setminus K.$$

Démonstration. *Etape 1 :* L'idée de la démonstration consiste à travailler sur un intervalle de temps $[0, T_1[$ sur lequel la conclusion du théorème est fautive et on démontre alors que $T_1 < T^*$. Par contraposition, ceci démontrera le théorème. L'argument consiste à faire des “recollements de solutions” au temps T_1 . On suppose donc qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et une suite de temps $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n \rightarrow T_1^-$ et $X(t_n) \in K$. Puisque K est un compact, on peut supposer (quitte à faire une extraction) que la suite de temps est telle que $X(t_n) \rightarrow X_1$ pour un certain $X_1 \in \mathbb{R}^d$. On considère alors

$$\frac{dY}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, Y(t)), \quad \text{et} \quad Y(t = T_1) = X_1. \quad (1.11)$$

Par Cauchy-Lipschitz, la solution Y est bien définie de manière unique sur un intervalle $[T_1, T[$ pour un certain $T > T_1$. On pose alors $Z : [0, T[\rightarrow \Omega$ telle que $Z(t) := X(t)$ si $t < T_1$ et $Z(t) = Y(t)$ si $t \geq T_1$. On va démontrer que $t \mapsto Z(t)$ est \mathcal{C}^1 et vérifie :

$$\forall t \in [0, T[, \quad \frac{dZ}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, Z(t)).$$

Autrement dit, si on recolle la solution sur $[0, T_1[$ avec la solution sur $[T_1, T[$, on obtient la solution sur $[0, T[$. Un tel résultat impliquerait que T_1 n'est pas le temps maximal d'existence de la solution.

Etape 2 : Il est aisé de montrer que Z est \mathcal{C}^1 et vérifie la bonne équation pour les temps $t \in [0, T[$ dès lors que $t \neq T_1$. Le cas $t = T_1$ nécessite un argument pour montrer que le raccord est bien \mathcal{C}^1 et vérifie l'équation ci-dessus. On étudie d'abord la limite à droite (pour $t > T_1$; c'est-à-dire là où $Z(t) = Y(t)$).

- On sait que Y est continue, de sorte que $Y(t)$ converge lorsque $t \rightarrow T_1^+$ (elle converge vers X_1)
- Comme \mathcal{F} est lipschitzienne, elle est donc continue et donc $t \mapsto \mathcal{F}(t, Y(t))$ est aussi continue.
- Ainsi, cette fonction converge vers $\mathcal{F}(T_1, X_1)$.
- Il s'en suit, par l'égalité (1.11), que \dot{Y} converge vers $\mathcal{F}(T_1, X_1)$ lorsque $t \rightarrow T_1^+$.

Concernant la limite à gauche (pour $t < T_1$; c'est-à-dire là où $Z(t) = X(t)$), il n'est pas possible de refaire directement le même raisonnement car on se sait pas si $X(t)$ converge vers X_1 lorsque $t \rightarrow T_1^-$. En effet, cette convergence n'est vraie que le long de la suite (t_n) (on ne sait même pas si $t \mapsto X(t)$ va rester dans le compact K entre t_n et t_{n+1}).

Etape 3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé tel que $\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$. Pour N assez grand, on a $X(t_N) \in \overline{\mathcal{B}}(X_1, \varepsilon)$ (car $X(t_N) \rightarrow X_1$) et par continuité on sait que $X(t) \in \overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon)$ sur un petit intervalle de la forme $[t_N, t_N + \delta[$ avec $\delta > 0$. On sait que \mathcal{F} est globalement lipschitz sur le compact $\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon)$ (par la Proposition 0.2.1) et donc bornée. Ainsi, avec l'inégalité triangulaire, on obtient pour tout $t \in [t_N, t_N + \delta[$,

$$\begin{aligned} |X(t) - X(t_N)| &= \left| \int_{t_N}^t \frac{dX}{dt}(s) ds \right| = \left| \int_{t_N}^t \mathcal{F}(s, X(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_N}^t \left| \mathcal{F}(s, X(s)) \right| ds \leq \int_{t_N}^t \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))} ds \end{aligned}$$

En sortant la norme L^∞ de l'intégrale (car c'est une constante) on aboutit à :

$$|X(t) - X(t_N)| \leq \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))} \int_{t_N}^t ds = (t - t_N) \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))} \leq \delta \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))}. \quad (1.12)$$

On choisit à présent δ le plus grand possible. Dans le cas où on a $t \mapsto X(t)$ qui reste dans $\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon)$ jusqu'au temps T_1 (cas 1) on peut conclure que $t \mapsto X(t)$ est borné sur l'intervalle $[t_N, T_1]$. Si au contraire (cas 2) on peut choisir $\delta > 0$ de telle sorte que $t \mapsto X(t)$ sorte de la boule pour la première fois au temps $t_N + \delta$ (ce qui veut dire $|X(t_N + \delta) - X(t_N)| = 2\varepsilon$), l'inégalité ci-dessus implique

$$2\varepsilon \leq \delta \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))}.$$

Donc si on choisit N assez grand de sorte que $T_1 - t_N > 2\varepsilon / \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{B}}(X_1, 2\varepsilon))}$, on en déduit que le cas 2. ne se produit pas.

Etape 4. Le bilan de l'étape 3. est que $t \mapsto X(t)$ reste borné pour $t \in [t_N, T_1]$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

- Comme \mathcal{F} est continue, on en déduit que $t \mapsto \mathcal{F}(t, Y(t))$ est également bornée.
- On utilise à présent l'équation pour obtenir que \dot{X} est bornée sur $t \in [t_N, T_1]$
- Par conséquent on a $t \mapsto X(t)$ qui se prolonge par continuité lorsque $t \rightarrow T_1^-$.

On peut alors refaire le raisonnement de l'étape 2 et en déduire que $t \mapsto Z(t)$ admet un prolongement \mathcal{C}^1 au temps $t = T_1$ et que $\dot{Z}(T_1) = \mathcal{F}(T_1, Z(T_1))$. \square

1.2.2 Lemme de Grönwall

Nous avons jusqu'à présent seulement démontré le point (i) du théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est-à-dire que nous avons seulement l'*existence locale*. Le point (ii) nous donne une condition suffisante pour que le temps de vie d'une solution, noté T^* , soit égal à $+\infty$. Ceci correspond à l'*existence globale* de la solution. L'existence globale n'est pas toujours vraie. Un exemple simple pour le voir est le suivant :

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad \text{avec} \quad x(0) = 0. \quad (1.13)$$

La solution de cette équation est la bien connue fonction "tangente" et le temps maximal d'existence de la solution est $T^* = \pi/2$. L'équation ci-dessus cesse d'être bien posé au temps $\pi/2$ et

on ne peut pas prolonger la solution de manière \mathcal{C}^1 . Un autre exemple pour lequel l'existence globale n'est pas assurée est le suivant :

$$\dot{x} = -\frac{1}{2x}, \quad \text{avec} \quad x(0) = 1. \quad (1.14)$$

Cette fois la solution est $t \mapsto \sqrt{1-t}$ et sa dérivée diverge lorsqu'on s'approche du temps $T^* = 1$. Dans ce deuxième exemple, l'ouvert sur lequel est bien posé le problème est $\Omega = \mathbb{R}^*$. On peut vérifier directement sur ces deux exemples la validité du théorème de fin de vie 1.3 : les solutions sortent bien définitivement de tous les compacts (ceux de \mathbb{R} pour le premier exemple et ceux de \mathbb{R}^* pour le second).

Afin d'étudier le *temps d'existence* ou *temps de vie* de la solution d'une équation différentielle, on utilise généralement le lemme suivant :

LEMME 1.1 Lemme de Grönwall (version intégrale) (†)

Si $\psi \geq 0$ et ϕ sont deux fonctions continues réelles sur un intervalle $[a, b]$ qui vérifient

$$\forall t \in [a, b], \quad \phi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\phi(s) ds,$$

pour une certaine constante $K \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall t \in [a, b], \quad \phi(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

Démonstration. (†) On pose

$$f(t) = \frac{K + \int_a^t \psi(s)\phi(s) ds}{\exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right)}$$

On calcule sa dérivée

$$\frac{df}{dt} = \psi(t) \frac{\phi(t) - K - \int_a^t \psi(s)\phi(s) ds}{\exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right)}.$$

En utilisant l'hypothèse, on remarque que le numérateur de cette fraction est négatif. Comme ψ est positive, on en déduit que $df/dt \leq 0$ et donc $f(t)$ est décroissante. En utilisant à nouveau l'hypothèse du lemme, le caractère décroissant de f donne :

$$\frac{\phi(t)}{\exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right)} \leq f(t) \leq f(0) = K. \quad (1.15)$$

□

Remarque : Si on veut généraliser en autorisant la constante K à varier au cours du temps ($t \mapsto K(t)$), le lemme devient :

$$\forall t \geq t_0 \quad \phi(t) \leq K(t) + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds$$

implique

$$\forall t \geq t_0 \quad \phi(t) \leq K(t) + \int_{t_0}^t K(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(\tau) d\tau\right) ds.$$

Le lemme de Grönwall admet également une version différentielle qui peut se révéler utile dans certains cas :

LEMME 1.2 Lemme de Grönwall (version différentielle) (†)

Si ψ et ϕ sont deux fonctions continues réelles sur un intervalle $[a, b]$ qui vérifient pour tout temps

$$\frac{d\phi}{dt}(t) \leq \psi(t) \phi(t),$$

alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad \phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

Si on suppose que ϕ est positive alors ce lemme est plus faible que le lemme de Grönwall sous forme intégrale (car on peut intégrer les inégalités mais pas les dériver). L'intérêt de la version différentielle est qu'il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse de signe sur ψ .

Démonstration. On fait le même raisonnement en travaillant avec $t \mapsto \frac{\phi(t)}{\exp(\int_a^t \psi(s) ds)}$. \square

Le principal intérêt du lemme de Grönwall réside dans le fait qu'il nous permet d'étudier le comportement d'une solution au voisinage de la fin de son intervalle d'existence T^* . En particulier, on peut utiliser le lemme de Grönwall pour faire la démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz-(ii) :

Démonstration du théorème 1.1-(ii). On considère, pour $\mathcal{F} : [0, T[\times \mathbb{R}^d$ globalement lipschitz et $X_0 \in \mathbb{R}^d$ fixés, le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0. \quad (1.16)$$

On sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-(i), qu'il existe une unique solution $t \mapsto X(t)$ sur un certain intervalle $[0, T_0[$, avec $T_0 \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On va supposer que $T_0 < +\infty$ et on va démontrer que dans ce cas T_0 n'est pas le temps maximal d'existence T^* .

On note λ la constante de lipschitz de \mathcal{F} de sorte que :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T_0[, \quad \left| \mathcal{F}(t, X) - \mathcal{F}(t, Y) \right| \leq \lambda |X - Y|.$$

On considère une boule $\overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$ pour $R > 0$ un paramètre fixé par la suite. En particulier, on va prendre $R \geq 2\|X_0\|$ de sorte que si $X \notin \overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$, alors $|X| \geq |X_0|$. Dans ce cas le caractère globalement lipschitz de \mathcal{F} implique pour tout $t \in [0, T_0[$, par inégalité triangulaire,

$$\forall X \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{B}}(X_0, R), \quad \left| \mathcal{F}(t, X) - \mathcal{F}(0, X_0) \right| \leq \lambda |X - X_0| \leq \lambda (|X| + |X_0|) \leq 2\lambda |X|.$$

On sait que au temps initial on a $X(0) = X_0 \in \overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$. Supposons à présent qu'il existe un temps t_1 tel que $X(t_1) \in \partial\overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$ et $X(t) \notin \overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$ sur un intervalle de temps $]t_1, t_2[\subseteq [0, T_0[$. alors

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \left| \frac{dX}{dt}(t) \right| \leq 2\lambda |X(t)|.$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $|X|^2 = X \cdot X$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \frac{d}{dt} |X(t)|^2 \leq 4\lambda |X(t)|^2.$$

On peut à présent appliquer à présent le lemme de Grönwall sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ à la fonction $t \mapsto |X(t)|^2$:

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad |X(t)|^2 \leq |X(t_1)|^2 e^{4\lambda t} = R^2 e^{4\lambda t} \leq R^2 e^{4\lambda T_0}$$

On en conclut que si $X(t)$ sors de $\overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$, alors il reste dans la boule $\overline{\mathcal{B}}(0, Re^{2\lambda T_0})$.

La dynamique reste donc dans le compact $\overline{\mathcal{B}}(X_0, R) \cup \overline{\mathcal{B}}(0, Re^{2\lambda T_0})$ sur tout l'intervalle de temps $[0, T_0]$. Par application du théorème 1.3, on en déduit que T_0 n'est pas le temps maximal d'existence T^* . Comme T_0 est quelconque, on en déduit que $T^* = +\infty$. \square

1.3 Résolution d'équations et analyse asymptotique

Dans cette section on présente un certain nombre de techniques pour résoudre explicitement des équations différentielles ordinaires dans certains cas particuliers. On peut ensuite utiliser ces solutions particulières pour les comparer avec des équations plus compliquées afin de comprendre leur comportement asymptotique de leurs solutions.

1.3.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

LEMME 1.3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants (†)

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients constants. Soit $b : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ localement lipschitzien. Alors le problème de Cauchy

$$\frac{dX}{dt} = AX + b(t), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0 \quad (1.17)$$

admet comme unique solution : $X(t) = e^{tA} \left(X_0 + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right)$.

La démonstration de ce lemme est laissé en exercice au lecteur. Ainsi, l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires se fait à l'aide du concept d'exponentielle de matrice introduit à la définition 0.15. Une étude plus systématique du cas particulier $b \equiv 0$ sera faite au chapitre 2.

Cas particulier : les équations du second ordre sans second membre. On étudie une équation sur $x : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\ddot{x} = a\dot{x} + bx, \quad \text{et} \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

On commence par mettre ce système sous la forme 1.17 en introduisant la variable auxiliaire $v(t) := \dot{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Pour étudier l'exponentielle de la matrice, on utilise la réduction de Jordan (théorème 0.1). Le calcul du polynôme caractéristique nous donne 2 cas.

Si les deux valeurs propres, notées λ et μ , sont distinctes alors la matrice est diagonalisable. Dans ce cas, le calcul de l'exponentielle de matrice nous dit que l'ensemble des solutions à l'équation différentielle est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs

$$t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{\mu t}.$$

Les solutions sont donc de la forme $x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$ avec A et B deux constantes déterminées grâce aux conditions initiales.

Si en revanche on a $\lambda = \mu$, alors la matrice n'est pas diagonalisable (car sinon elle serait égale à λId) mais elle est semblable à un bloc de Jordan de taille 2. Le calcul de l'exponentielle

de cette matrice nous donne que l'ensemble des solutions à l'équation différentielle est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs

$$t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad t \mapsto t e^{\lambda t}.$$

Important : La formule donnée par le lemme 2.5 devient fausse si on autorise les coefficients de la matrice A à dépendre du temps. Dans ce cas la résolution explicite n'est pas toujours possible. Néanmoins, il est possible de faire une étude à l'aide du déterminant de la matrice wronskienne (hors programme).

Remarque : Cette formule permet de mieux appréhender le fonctionnement de la méthode de variation de la constante. En effet, la résolution de (1.17) avec $b \equiv 0$ nous donne le premier terme : $X_0 \exp(tA)$; et en faisant "varier la constante" on en déduit le second.

Attention : Malgré le lemme 2.5 et bien qu'il s'agisse du programme de première année d'études supérieures, **la méthode de variation de la constante est exigible le jour de l'examen!!!**

1.3.2 Équations différentielles séparables

Dans le cas particulier des équations scalaires, c'est-à-dire dont l'inconnue est une fonction à valeur dans \mathbb{R} , il y a un cas pour lequel l'étude est beaucoup plus simple : ce sont les *équations séparable*. On dit qu'une équation d'inconnue $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ est séparable si elle se met sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = b(t) \mathcal{G}(x(t)) \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

Dans ce cas, la méthode pour étudier cette équation différentielle s'appelle la *méthode de séparation des variables* et consiste en l'idée suivante (†) :

1. On divise à gauche et à droite par $\mathcal{G}(x)$ et on intègre en temps :

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{\mathcal{G}(x(s))} ds = \int_0^t b(s) ds.$$

2. En posant $\Phi(y) := \int_0^y \frac{du}{\mathcal{G}(u)}$, on remarque que le terme sous l'intégrale de gauche n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction composée $\Phi \circ x(t)$. On peut donc intégrer et obtenir

$$\Phi(x(t)) - \Phi(x_0) = \int_0^t b(s) ds.$$

3. On inverse la fonction Φ pour obtenir une formule sur $x(t)$.

Dans beaucoup de cas, cette méthode nécessite des adaptations en fonction de l'équation étudiée. Il faut donc savoir mettre en place cette méthode au cas-par-cas.

Cas particulier Dans le cas particulier où $\dot{x} = ax^\alpha$ avec $a, \alpha \in \mathbb{R}$ et $x(0) = x_0 > 0$, la méthode de séparation des variables donne (exercice) :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \exp(at) && \text{si } \alpha = 1, \\ x(t) &= \left(x_0^{1-\alpha} - A(1-\alpha)t \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On remarque que cette équation est globalement bien posée (sur \mathbb{R}) seulement dans les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Les 3 cas possibles de perte du caractère bien posé sont présents ici :

- Si $\alpha > 1$, on a $x(t) \rightarrow \pm\infty$ (en fonction du signe de a) lorsque $t \rightarrow T^*$.
- Si $\alpha < 0$, on travaille sur $\Omega = \mathbb{R}^*$ et on a $x(t)$ qui converge vers 0 en temps fini. En revanche $\dot{x}(t) \rightarrow \pm\infty$.
- Si $0 < \alpha < 1$ alors $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ convergent mais on perd l'unicité de la solution (on peut exhiber deux solutions différentes qui ont la même valeur au moment où $X(t) = 0$).

1.3.3 Analyse asymptotique par principes de comparaison

Dans de nombreux cas il n'est pas possible d'obtenir une formule explicite pour les solution d'une équation différentielle donnée. Pourtant, nous pouvons néanmoins étudier les propriétés qualitatives des solutions dans le cas 1D grâce à deux méthodes différentes dont nous présentons ici les idées générales sur un exemple :

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \arctan(x(t)), \quad \text{et} \quad x(0) = x_0. \quad (1.18)$$

Principe de comparaison des solutions : cette méthode consiste à comparer deux solutions différentes d'une même équation mais avec des données initiales différentes. Dans notre cas, on peut démontrer que si $x_0 \neq 0$ alors la solution de (1.18) ne s'annule jamais.

1. On constate tout d'abord que la fonction nulle est solution de l'équation avec $x_0 = 0$.
2. On considère x une solution avec $x_0 \neq 0$ et on suppose qu'en un temps $t_0 > 0$ on a $x(t_0) = 0$.
3. On regarde alors l'équation rétrograde (en remplaçant t par $t_0 - t$). On a donc trouvé 2 fonctions solutions, la fonction nulle et $x(t_0 - t)$, pour l'équation rétrograde avec la même donnée initiale 0.
4. Ceci est contradictoire avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Principe de comparaison des équations : Cette fois-ci, on va comparer la solution à l'équation avec des solutions d'autres équations similaires plus simples (en général on conserve la donnée initiale).

1. On sait que arc-tangente prend ses valeurs entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ et donc : $\frac{dx}{dt} \leq \frac{\pi}{2}x(t)$.
2. Si on suppose par exemple que $x_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et donc $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \leq \frac{\pi}{2}$.
3. On intègre cette inégalité en temps en on en déduit que : $x(t) \leq x_0 \exp\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Remarque : La solution est ainsi localement bornée et donc globalement bien posée par la caractérisation du temps de fin d'existence (Théorème 1.3).

1.4 Bilan du Chapitre et exercices

1.4.1 Ce qu'il faut retenir et savoir-faire

Ce chapitre est consacré aux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions aux équations différentielles mises sous la forme d'un problème de Cauchy. Il se termine par une analyse asymptotique dans des cas particuliers. Les principaux éléments à retenir sont les suivants :

- (‡) Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz.
 - Savoir reformuler une EDO sous la forme d'un problème de Cauchy.
- (†) Caractérisation de la fin d'existence des solutions (théorème 1.3).
- (†) Lemme de Grönwall (les deux versions) et sa démonstration.
- (†) Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.
 - Méthode de séparation des variables.
 - Méthode de variation de la constante
 - Principes de comparaison des solutions.

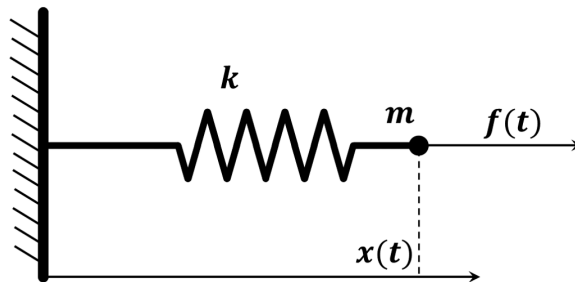
1.4.2 Exercices

Les exercices ci-dessous proposent d'étudier quelques équations différentielles à l'aide des outils présentés dans ce chapitre 1. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre. Les exercices les plus importants sont identifiés avec le symbole (★).

Exercice 1.1 (L'oscillateur harmonique). (★) L'oscillateur harmonique est le système mécanique le plus simple et modélise l'évolution 1D d'une masse ponctuelle accrochée à un ressort. Ce système est décrit par l'équation d'évolution suivante :

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x} + kx(t) = f(t),$$

avec m la masse de l'objet, k la raideur du ressort, λ le coefficient de frottement, $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la force extérieure et $x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la position de l'objet (l'inconnue du problème).



1) En introduisant la vitesse $v(t) := \dot{x}(t)$ comme variable auxiliaire du système, montrer que l'équation étudiée est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où A est une matrice constante dont on précisera les coefficients.

2) On suppose que f est globalement lipschitzienne. Montrer que si on pose $X(t) := (x(t), v(t))^T$, alors on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\dot{X} = \mathcal{F}(t, X(t)),$$

où $\mathcal{F} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ est une fonction à préciser.

3) A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que ce système admet une unique solution globale étant donné la position initiale $x(0) = x_0$ et la vitesse initiale $v(0) = v_0$ où $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres fixés.

3) Dans le cas où la matrice A est diagonalisable et $f \equiv 0$, résoudre cette équation en cherchant des solutions de la forme

$$B e^{-\mu t} \cos(\omega_0 t) + D e^{-\nu t} \sin(\omega_0 t),$$

où l'on précisera la valeurs des paramètres B, D, μ, ν et ω_0 à l'aide des valeurs propres de la matrice A et des données du problème.

4) Dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable et $f \equiv 0$, résoudre cette équation en cherchant des solutions de la forme

$$B e^{-\mu t} \cos(\omega_0 t) + D t e^{-\nu t} \cos(\omega_0 t),$$

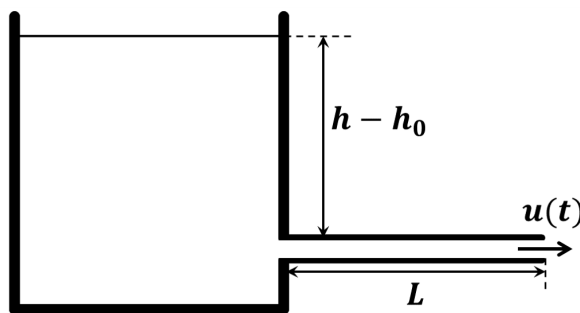
où l'on précisera la valeurs des paramètres B, D, μ, ν et ω_0 à l'aide des valeurs propres de la matrice A et des données du problème.

5) Par la méthode de variation de la constante, résoudre les cas $f(t) = t$ et $f(t) = \cos(\omega_1 t)$.

Exercice 1.2 (La sortie du tuyau). (★) On considère un grand réservoir de hauteur totale h et à sa base se trouve un tuyau de longueur L relié au réservoir par une ouverture à la hauteur h_0 . Si on suppose que h et L sont grands par rapport au diamètre du tuyau et que le fluide est initialement au repos, on peut simplifier les équations de Euler de la mécanique des fluides (l'approximation est valable sur un intervalle de temps pas trop grand de sorte que h puisse être considéré comme constant) et alors obtenir :

$$L \frac{du}{dt} = (h - h_0)g - \frac{u^2}{2},$$

où g est l'accélération de la pesanteur et où $u : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ la vitesse de fluide à la sortie du tuyau est l'inconnue du problème. Au temps initial cette vitesse est nulle.



1) Réécrire ce système sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\dot{u}(t) = \mathcal{F}(t, u(t)), \quad \text{et} \quad u(0) = 0,$$

où \mathcal{F} est une fonction que l'on précisera.

2) A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que ce problème est localement bien posé (existence d'une unique solution locale en temps).

3) Montrer qu'il existe une donnée initiale positive (que l'on précisera) telle que la solution à l'équation soit constante. On note cette constante u_∞ .

4) A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que une autre solution de l'EDO ne peut jamais atteindre cette valeur u_∞ .

5) Montrer que la solution associée à la donnée initiale $u(0) = 0$ est croissante et concave. En déduire, par la caractérisation des temps de fin d'existence des solutions, que ce problème de Cauchy est bien posé pour $t \in [0, +\infty[$.

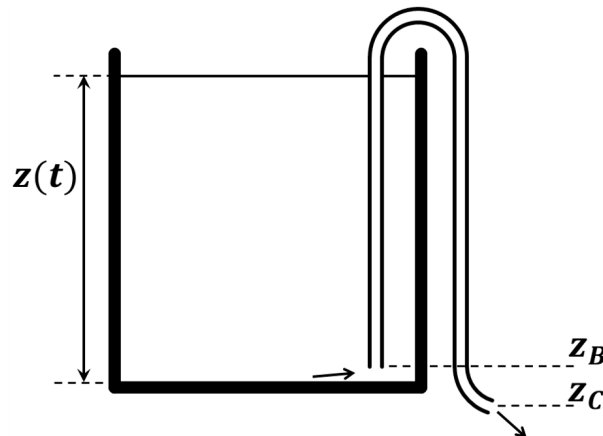
6) Montrer que cette solution converge vers u_∞ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

7) A l'aide de la méthode de séparation des variables, résoudre cette équation explicitement et en déduire le temps t_ε à partir duquel $u(t)$ est à distance $\varepsilon > 0$ de la limite u_∞ (avec $\varepsilon > 0$ fixé quelconque).

Exercice 1.3 (Vidange d'un réservoir par un siphon). (★) On considère un réservoir cylindrique de section S muni d'un siphon de section s . Initialement le réservoir est rempli jusqu'à une hauteur H . A partir des équations de Euler, on peut dériver une équation simplifiée pour l'évolution de la hauteur de l'eau $z(t)$ dans le réservoir cylindrique :

$$\frac{1}{g} \left(\frac{S}{s} \dot{z}(t) \right)^2 = z(t) - z_C,$$

avec z_C la hauteur de l'extrémité du siphon située à l'extérieur du réservoir.



1) Sachant que \dot{z} est négatif, écrire ce système sous la forme d'un problème de Cauchy défini sur l'ouvert $\Omega := \mathbb{R} \setminus \{z_C\}$ et montrer qu'il existe une unique solution locale.

2) On se place dans l'hypothèse $z_B \leq z_C$, où z_B est la hauteur de l'extrémité du siphon située à l'intérieur du réservoir. A l'aide de la méthode de séparation des variables, montrer que le système atteint la position $z = z_C$ en temps fini et qu'il cesse d'être bien posé à ce moment-là (montrer par exemple la perte d'unicité en comparant avec des solutions constantes).

3) On suppose désormais que $z_B \geq z_C$. On dit que le réservoir est vide lorsque $z = z_B$. Calculer le temps t_B pour lequel le siphon est vidé.

Exercice 1.4 (L'équation logistique). (★) L'équation logistique est un modèle simple empirique d'évolution de la population d'une espèce animale ou végétale (par exemple la prolifération d'un ensemble de bactéries). L'équation logistique est donnée par

$$\dot{x}(t) = ax - bx^2.$$

Ici $x(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t . Le terme ax représente la croissance du nombre de bactéries par division cellulaire et le terme $-bx^2$ représente la compétition pour l'accès aux ressources (lorsque ce terme devient dominant on parle de "surpopulation").

1) Montrer que, si on se donne une donnée initiale x_0 positive, cette équation admet une unique solution locale.

2) Calculer les solutions stationnaires. En déduire le caractère globalement bien posé.

3) Calculer la solution exacte à l'aide de la méthode de séparation des variables. Étudier le comportement asymptotique de ces solutions.

Exercice 1.5 (Utilisation du lemme de Grönwall). (★) On propose dans cet exercice quelques exemples d'équations pour lesquelles on démontre le caractère globalement bien posé à l'aide du théorème 1.3 et du lemme de Grönwall.

1) Montrer que le problème de Cauchy sur \mathbb{R} (avec $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé quelconque) admet une unique solution globale :

$$\frac{dx}{dt} = x(\lambda + \sin(x^2)), \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

2) Même question avec le problème de Cauchy ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + \mu x \cos^2\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^*,$$

3) Même question avec le système de 2 équations suivant (équipé de conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$) :

$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad \text{et} \quad \dot{y} = x + y - y^3.$$

Exercice 1.6 (Le système de Lotka-Volterra). (★) Le système de Lotka-Volterra s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{x} = x - xy, \quad \text{et} \quad \dot{y} = -y + xy.$$

Ce système modélise l'évolution au cours du temps d'une population d'un ensemble de proies (par exemple les sardines dans la mer) représentée par la variable x , et d'une population de prédateurs (par exemple des requins) représentée par y . Il y a tout d'abord un terme d'auto-engendrement : il est positif pour les proies (qui se reproduisent rapidement et se nourrissent de plancton supposé très abondant) et négatif pour les prédateurs qui, pour pouvoir prospérer, doivent trouver à se nourrir. L'autre terme est donc l'interaction entre les deux espèces : cette interaction est négative pour les proies et positive pour les prédateurs.

1) Étant donnée une donnée initiale fixée quelconque $x_0, y_0 \geq 0$, Montrer qu'il existe une unique solution locale à ce problème de Cauchy.

2) Calculer les solutions stationnaires.

3) Montrer que pour tout t on a, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ dès lors que $x_0, y_0 > 0$.

4) on pose $\psi(t) = \ln x(t) + \ln y(t) - x(t) - y(t)$. Montrer que la fonction ψ est constante.

5) On souhaite montrer le caractère globalement bien-posé de cette équation.

5.1) Étudier la fonction $u \mapsto \ln(u) - u$.

5.2) En déduire que $\ln(x(t)) - x(t) \geq \psi(0) + 1$. Faire de même pour y .

5.3) Montrer alors que les solutions x et y sont bornées.

5.4) En déduire que le système est globalement bien posé.

6) On divise le premier quadrant $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en quatre zones :

$$A = \{(u; v) : 0 < u < 1; 0 < v < 1\}, \quad B = \{(u; v) : u > 1; 0 < v < 1\},$$

$$C = \{(u; v) : u > 1; v > 1\}, \quad D = \{(u; v) : 0 < u < 1; v > 1\}.$$

Montrer que si $(x_0; y_0) \neq (1; 1)$, alors la solution passe successivement de A à B , puis à C puis enfin à D avant de revenir dans A .

7) En utilisant la quantité conservée ψ , montrer que la solution est périodique.

8) Étudier la convexité de la courbe du plan formée par la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$.

9) Tracer les deux fonctions $t \mapsto x(t), y(t)$ et tracer dans le plan les courbes de niveaux de ψ (c'est-à-dire les courbes d'équation $\psi = \text{constante}$).

Exercice 1.7. Trouver toutes les solutions globales $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour l'équation $t^2 \dot{x} = x$. Pour quelles données initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ a-t-on existence ? unicité ?

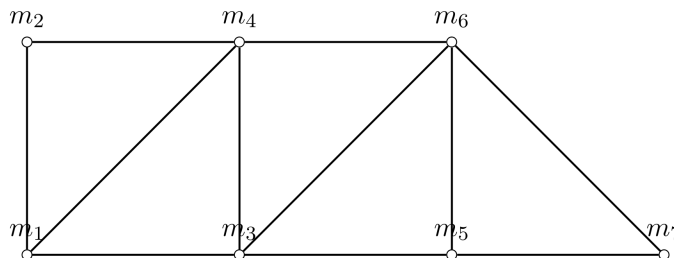
Exercice 1.8 (Treillis de poutres élastiques). (\star) On considère un système de poutres de masses négligeables qui sont connectés les unes aux autres avec des liaisons de type "rotules". On place une masse ponctuelle m_i au niveau de chacune des N connexions de poutres. On note par $x_i \in \mathbb{R}^3$ la position de la i^e masse ponctuelle. On note \mathcal{N}_i l'ensemble des masses ponctuelles voisines de la i^e masse, c'est à dire qu'il existe une poutre qui relie ces deux masses. On note k_{ij} la raideur élastique de cette poutre et ℓ_{ij} sa longueur au repos. Finalement, on note par \mathcal{A} l'ensemble des masses qui sont immobiles (fixées à un mur par exemple).

L'équation de la dynamique de ce système de poutres s'écrit pour tout $i \notin \mathcal{A}$:

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} k_{ij} \left(\ell_{ij} - |x_i - x_j| \right) e_{ij},$$

où $e_{ij} := \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|}$ est le vecteur unitaire qui pointe en direction de x_j depuis la position x_i .

Dans le cas où $i \in \mathcal{A}$, on fixe l'accélération à 0.



1) Montrer que ce système d'équations différentielles admet une unique solution globale étant donné les conditions initiales suivantes

$$x_i(0) = x_{i,0}, \quad \text{et} \quad \dot{x}_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \mathcal{A}, \\ v_{i,0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $x_{i,0}$ et $v_{i,0}$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 fixés quelconques.

2) Que se passe-t-il si on rajoute une force extérieure ?

Exercice 1.9. A l'aide de la méthode de variation des constantes, résoudre :

$$t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} - 2x = g(t),$$

où g est une fonction \mathcal{C}^1 quelconque.

Exercice 1.10 (le pendule simple). L'équation du pendule simple est la suivante :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0,$$

avec λ le coefficient de dissipation et ω_0 la fréquence caractéristique.

1) Montrer que cette équation est globalement bien posée si on se donne au temps initial un angle $\theta(0) = \theta_0$ et une vitesse angulaire $\dot{\theta}(0) = \theta_1$.

2) Montrer que pour $\lambda = 0$ on a préservation de l'énergie mécanique au cours du temps $E := \dot{\theta}^2/2 + \mathcal{P}(\theta)$ où le potentiel \mathcal{P} est une fonction à expliciter.

3) Trouver les solutions constantes de cette équation et montrer qu'elles coïncident avec les points-critiques de \mathcal{P} .

4) On va maintenant étudier le système dans le cas dissipatif $\lambda > 0$ et montrer que le système converge.

4.1) Calculer la dissipation instantanée d'énergie mécanique (en fonction de $\dot{\theta}$).

4.2) Pour $a, b > 0$ on considère la quantité suivante :

$$\Gamma_{a,b} := \frac{\dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta} \sin(\theta) + b \sin^2(\theta)}{2}.$$

En utilisant le fait que $2xy \leq x^2 + y^2$, trouver les valeurs de $a > 0$ pour lesquelles cette quantité est toujours positive quel que soit les valeurs de θ et $\dot{\theta}$.

4.3) Montrer que pour a et b assez petit on a

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{a,b} \leq -C \Gamma_{a,b},$$

où C est une constante strictement positive à expliciter (en fonction de a, b, λ et ω_0^2).

4.4) En utilisant le lemme de Grönwall, montrer que $\Gamma_{a,b}$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

4.4) En déduire que le système converge vers un point-critique du potentiel \mathcal{P} .

5) On travaille maintenant dans le cadre $\lambda = 0$. On appelle *séparatrices* les solutions θ telles que $E(\theta) = \max \mathcal{P}$. On rappelle les formules de trigonométrie suivantes :

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{et} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5.1) Montrer que $t \mapsto 2 \arctan(\sinh(t))$ est solution de $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$. En déduire la formule générale pour toutes les séparatrices.

5.2) Montrer que les solutions sont bornées si et seulement si elles ont une énergie inférieure aux séparatrices. Montrer que si leur énergie est strictement inférieure aux séparatrices alors elles sont périodiques.

5.3) Si elles ont une énergie strictement supérieure aux séparatrices, montrer que $t \mapsto \sin(\theta(t))$ est périodique.

5.4) En déduire le diagramme des phases.

Exercice 1.11. On souhaite ici comprendre comment faire le lien entre deux fonctions dont la dérivée se comporte de manière comparable (au sens de la Définition 0.13).

1) Résoudre, pour $x(0) = x_0 > 0$, le système $\dot{x} = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et montrer que ce système est globalement bien posé ssi $\alpha = 0$ ou 1 (distinguer les cas). Que se passe-t-il pour $\dot{x} = -x^\alpha$?

2) On considère, une fonction positive y telle que $\dot{y} \simeq y^\alpha$ avec $y(0) = x(0)$. Dans quels cas est-il vrai que cela implique $y(t) \simeq x(t)$? Même question avec $\dot{y} \simeq -y^\alpha$.

3) Si nous n'avons pas $y(t) \simeq x(t)$, quel est l'encadrement du comportement asymptotique de y que l'on peut malgré tout obtenir ? Quand est-ce que y est globalement bien posée ?

Exercice 1.12. Donner la CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour avoir $\ddot{x} = x^\alpha$ globalement bien posé sur tous les temps positifs sachant que $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ sont strictement positives (*indication* : multiplier par \dot{x} et intégrer en temps). Étudier le comportement asymptotique au voisinage du temps de fin d'existence de la solution (qu'il soit fini ou infini).

Exercice 1.13 (Lemme de Grönwall amélioré).

1) Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(x))$ et résoudre le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}x = x \ln(x), \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0.$$

2) Montrer le lemme de Grönwall amélioré (lemme de Grönwall-Osgood) :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) \leq \psi(t) \phi(t) \ln(\phi(t)) \implies \phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right)\right).$$

3) On considère à présent un problème de Cauchy $\dot{X} = \mathcal{F}(t, X)$ avec \mathcal{F} défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 et avec la donnée initiale $X(0) = X_0$. Montrer que si la solution vérifie

$$\left| \frac{dX}{dt} \right| \lesssim |X| (1 + |\ln(X)|),$$

alors la solution est globale en temps.

4) Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ et de $x \mapsto \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$. Proposer une généralisation des résultats démontré ci-dessus.

Exercice 1.14 (Collisions de points-vortex). (illustrations de C. Marchioro et M. Pulvirenti). Le système de points-vortex est un système d'équations différentielles issues de la mécanique des fluides incompressibles du plan (équations de Euler 2D ou équations atmosphériques en régime fortement stratifié). Ce système rend compte de la dynamique des centres des tourbillons présents dans un fluide planaire en faisant l'approximation que la vorticité du fluide est très concentrée. Chaque vortex est représenté par sa position dans le plan $z_j(t) \in \mathbb{C}$ pour $j = 1, \dots, N$ et son intensité $a_j \in \mathbb{R}^*$ (celle-ci est constante au cours du temps). L'évolution de la position du vortex $z_j \in \mathbb{C}$ au cours du temps est donné par (avec la notation $i^2 = -1$) :

$$\frac{d}{dt}z_j = \sum_{k=1}^N a_j \frac{i(z_j - z_k)}{|z_j - z_k|^2},$$

1) Existence et unicité des solutions :

1.1) Montrer l'existence et l'unicité locale d'une solution à ce système sur l'ouvert

$$\Omega := \bigcap_{j \neq k} \left\{ Z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N \mid z_j \neq z_k \right\}.$$

1.2) Montrer que le temps maximal d'existence T^* est fini ssi on a une collision de vortex :

$$\liminf_{t \rightarrow T^-} \min_{j \neq k} |z_j(t) - z_k(t)| = 0.$$

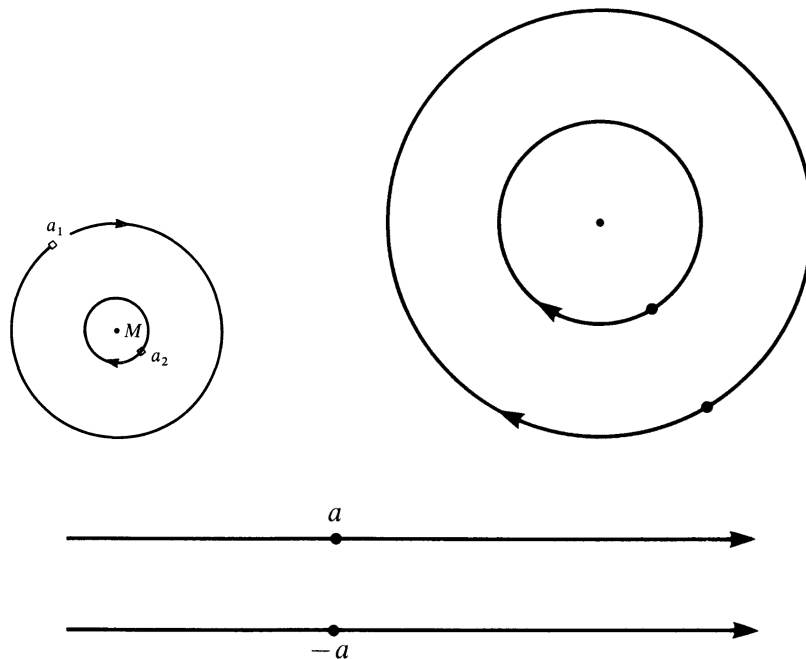
1.3) Montrer que les quantités suivantes sont constantes au cours du temps :

$$B(Z) := \sum_{j=1}^N a_j z_j, \quad \text{et} \quad L(Z) := \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N a_j a_k |z_j - z_k|^2.$$

1.4) Montrer que le barycentre $M(Z) := B(Z) / \sum_{j=1}^N a_j$ est constant au cours du temps.

1.5) Dans le cas $N = 2$ montrer que la préservation de $L(Z)$ implique la préservation de la distance entre les 2 vortex (et donc l'existence globale).

1.6) En déduire la solution exacte du système pour $N = 2$. Il faut pour cela distinguer les cas selon les valeurs de a_1 et a_2 (les 3 cas possibles correspondent aux 3 illustrations ci-dessous).



2) Pour $N = 2$, on a montré que le système était globalement bien posé. On va montrer que pour $N \geq 3$ il existe des données initiales qui aboutissent à des collisions en temps fini. On va plus précisément s'intéresser aux collisions auto-similaires. Dans un premier temps on va extraire les conditions nécessaires associées à ces solutions particulières pour mieux comprendre la collision. On appelle "*collision auto-similaire*" une solution du problème de points-vortex de la forme

$$z_j : t \in [0, T[, \mapsto z_j(0) r(t) e^{i\theta(t)},$$

pour tout $j = 1, \dots, N$, où les fonctions r et θ sont continues et vérifient

$$r(0) = 1, \quad r(T) = 0, \quad \text{et} \quad \theta(0) = 0.$$

2.1) Expliquer l'appellation "collision auto-similaire" à partir d'une telle définition.

2.2) Montrer que la condition d'auto-similarité implique que pour tout $j \neq k$

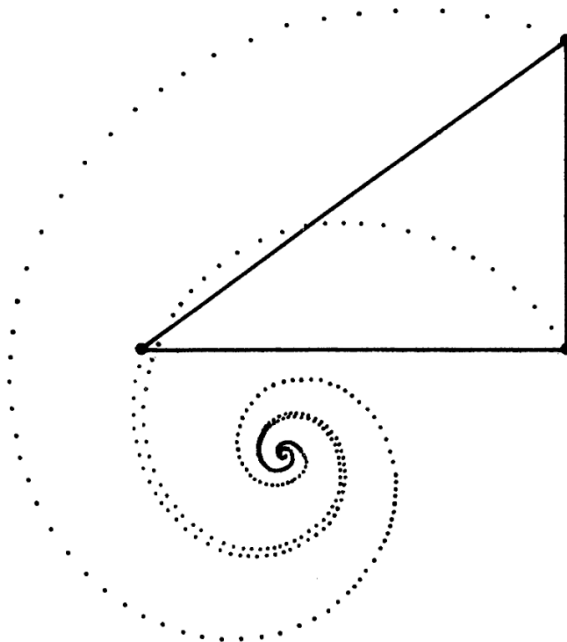
$$\frac{d}{dt} |z_j(t) - z_k(t)|^2 = 2 |z_j(0) - z_k(0)|^2 \dot{r}(t) r(t).$$

2.3) En utilisant l'équation des points-vortex et le résultat de la question précédente, en déduire que nécessairement $t \mapsto r(t)$ vérifie $\dot{r}(t) = C/r$ où C est une constante qui dépend des données initiales du problème (à expliciter).

2.4) En utilisant la séparation des variables, montrer que nécessairement $r(t) = \sqrt{\frac{T-t}{T}}$.

2.5) Montrer également qu'il existe une constante D telle que $\theta(t) = -DT \ln\left(\frac{T-t}{T}\right)$.

2.6) Pour le système de points-vortex, on parle souvent de "collision en spirale" (voir illustration ci-dessous). Justifier cette terminologie au regard des résultats des deux questions précédentes.



3) On va maintenant construire la collision auto-similaire (solution du système point-vortex) qui est représentée sur l'illustration ci-dessus. On va donc travailler avec $N = 3$. Plus précisément, on pose $a_2 = a_3 = 1$ et $a_1 = a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre fixé plus tard. On pose $A = |x_2 - x_3|$, $B = |x_3 - x_1|$ and $C = |x_1 - x_2|$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. On va choisir les valeurs de $x_1(0)$, $x_2(0)$ et $x_3(0)$ tel que ces trois points forment un triangle orthogonal direct avec $A(0) = 1$, $B(0) = \lambda$ et $C(0) = \sqrt{\lambda^2 + 1}$ (par Pythagore, ceci définit bien un triangle rectangle). Nous voulons maintenant trouver une valeur pour λ et a telles que $B(t) = \lambda A(t)$ et $C(t) = \sqrt{\lambda^2 + 1} A(t)$ soient vraies pour tout temps t , et telles que $A(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow T$ pour un certain $T > 0$.

1) Pour $N = 3$, les équations peuvent être réécrites en utilisant Δ , l'aire du triangle direct (x_1, x_2, x_3) . Rappel sur le calcul de l'aire d'un triangle :

$$(x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_1)^\perp = (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)^\perp = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)^\perp = -2\Delta. \quad (1.19)$$

En utilisant l'équation des points-vortex, montrer que

$$\frac{d}{dt}A^2 = 4a\Delta \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right), \quad \frac{d}{dt}B^2 = 4\Delta \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}C^2 = 4\Delta \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right). \quad (1.20)$$

2) Pour avoir le caractère auto-similaire, il faut propager la propriété $B(t) = \lambda A(t)$ et $C(t) = \sqrt{\lambda^2 + 1} A(t)$. En utilisant la question précédent, montrer que ceci équivaut à

$$4\Delta \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) = 4a\Delta \lambda \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right), \quad \text{et} \quad 4\Delta \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) = 4a\Delta \sqrt{\lambda^2 + 1} \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right).$$

On montrera par exemple que c'est équivalent à la préservation au cours du temps du rapport A/B et du rapport A/C .

3) En utilisant le fait que $B(t) = \lambda A(t)$ et $C(t) = \sqrt{\lambda^2 + 1} A(t)$, montrer qu'une telle condition équivaut à

$$\left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} - 1 \right) = a\lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2 + 1} \right), \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = a\sqrt{\lambda^2 + 1} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2 + 1} \right).$$

4) Résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues λ et a et conclure à l'existence d'une collision auto-similaire pour $N = 3$ point-vortex.

Chapitre 2

Analyse asymptotique et stabilité des solutions

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé quelques outils simples pour faire des analyses asymptotiques du comportement des solutions, notamment à l'aide de principes de comparaisons ou du lemme de Grönwall. Ces outils sont utiles pour montrer qu'une équation est globalement bien posée ou, dans le cas contraire, étudier son comportement au voisinage du temps de fin d'existence.

Au cours de ce chapitre nous allons poursuivre cette étude du comportement asymptotique des solutions avec des outils plus puissants, notamment la théorie développée par Alexander Lyapunov et d'autres mathématiciens au début du XX^e siècle. Le grand intérêt de tous ces outils concerne l'analyse de la stabilité des solutions aux équations. C'est-à-dire : étant donné deux valeurs initiales différentes mais proches l'une de l'autre, peut-on savoir si elles vont rester proches au cours du temps ou non ?

Pour des raisons pédagogiques, nous étudierons la théorie de la stabilité des EDO dans le cadre des EDO autonomes (c'est-à-dire \mathcal{F} ne dépend pas du temps). De nombreux concepts et théorèmes s'étendent au cas non-autonome.

2.1 Quantités conservées

Pour l'étude de la stabilité et du comportement asymptotique des solutions, une étude incontournable est celle des quantités conservées par l'équation. L'étude des systèmes physiques abonde d'exemples montrant l'utilité des quantités telles que l'énergie mécanique, le moment cinétique, etc... On va étudier ici une formulation générale de ce type d'outils.

On considère, pour $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $X_0 \in \mathbb{R}^d$ fixés (avec Ω ouvert de \mathbb{R}^d) le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{F}(X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0. \quad (2.1)$$

DÉFINITION 2.1 Quantités conservées (†)

Soit $\mathcal{G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On dit que \mathcal{G} est une *quantité conservée* par l'équation (2.1) ssi pour toute solution $t \in [0, T^*[\mapsto X(t)$ au problème de Cauchy on a

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad \frac{d}{dt}\mathcal{G}(X(t)) = 0.$$

Les quantités conservées donnent de nombreuses informations précieuses sur la dynamique.

En effet, cela nous dit que le point $X(t)$ va rester à l'intérieur d'une même composante connexe d'un même ensemble de niveau de \mathcal{G} (c'est-à-dire les hypersurfaces d'équation $\mathcal{G}(X) = \text{constante}$, où la constante se calcule à l'aide des données initiales).

En effet par exemple, on peut démontrer que si $\|\mathcal{G}(X)\| \rightarrow +\infty$ lorsque $\|X\| \rightarrow +\infty$, alors toutes les trajectoires sont bornées puisque les ensemble de niveaux de \mathcal{G} sont eux-même bornés.

2.1.1 Le cadre des équations linéaires

Dans le cadre des équations différentielles linéaires à coefficients constants, il peut y avoir de nombreuses quantités conservées par le flot qui prennent la forme de polynômes, de fractions rationnelles ou de fonctions exponentielles. Dans le cadre de ce paragraphe, on regardera surtout les quantités conservées quadratiques. On considère, pour A une matrice constante de taille d le problème de Cauchy

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX(t), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0. \quad (2.2)$$

PROPOSITION 2.1 Quantités conservées quadratiques

Soit M une matrice symétrique de taille d . Alors ces propositions sont équivalentes :

- La quantité $\frac{1}{2}X^T M X$ est conservée par l'équation.
- La matrice MA est antisymétrique : $(MA)^T + MA = 0$.

La démonstration de cette proposition s'obtient directement en dérivant $X^T M X$ au cours du temps et en utilisant la symétrie de M :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} X^T M X &= \dot{X}^T M X + X^T M \dot{X} = (AX)^T M X + X^T M A X = X^T A^T M X + X^T M A X \\ &= X^T ((MA)^T + (MA)) X \end{aligned}$$

Le principal intérêt de cette proposition est que la recherche d'une quantité conservée (c'est-à-dire la recherche de M) se réduit à la résolution d'un système linéaire : $(MA)^T + MA = 0$. On peut même préciser :

PROPOSITION 2.2 Critère de Lyapunov

- (i) La quantité $\frac{1}{2}X^T M X$ est croissante au cours du temps pour toute donnée initiale $X_0 \neq 0$ ssi la matrice symétrique $(MA)^T + MA$ est une matrice positive.
- (ii) Cette quantité est strictement croissante pour toute donnée initiale $X_0 \neq 0$ ssi $(MA)^T + MA$ est défini-positive.

2.1.2 Le cadre Hamiltonien

Définition de la dynamique hamiltonienne

Le cadre hamiltonien est un cadre dans lequel il est aisé d'obtenir des quantités conservées. C'est notamment le cadre de la mécanique classique dans le régime conservatif (c'est-à-dire non-dissipatif) et c'est dans ce cadre que l'on obtient les lois de conservation standard de la mécanique classique. On va écrire ici quelques éléments essentiels.

DÉFINITION 2.2 Système hamiltonien (†)

On travaille en dimension paire $d = 2k$. Soit $\mathcal{H} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On dit que l'équation (1.1) est *hamiltonienne*, et on dit que \mathcal{H} est son Hamiltonien ssi, quitte à faire un changement de base, on a :

$$\forall t \in [0, T^*[, \quad \frac{d}{dt}X = - \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \nabla \mathcal{H}(X(t)),$$

où I_k désigne la matrice identité de taille k .

La notion de *Hamiltonien* est une version plus générale et plus “mathématique” de la notion d'énergie bien connue en physique. On définit la matrice J_k (simplement notée J s'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice J a 2 propriétés algébriques très importantes :

- La matrice J est *anti-symétrique* : $J^T = -J$.
- Elle est dans le *groupe spécial orthogonal* : $J^T = J^{-1}$ et $\det(J) = 1$.

Une conséquence directe est son caractère *anti-involutif* : $J^{-1} = -J$. Son polynôme annulateur minimal est $X^2 + 1$ et ses valeurs propres sont $\pm i$. Lorsque $k = 1$, on retrouve la célèbre matrice de rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire la multiplication par $+i$ dans \mathbb{C}). Pour $k \geq 2$, la matrice J_k se comprend comme la généralisation multi-dimensionnelle de la rotation d'angle $\pi/2$. Plus précisément, on peut aisément réorganiser les vecteurs de la base canonique (changement de base orthogonale) en montrant que J_k est ortho-semblable à

$$\Gamma_k := \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & J_1 \end{pmatrix}$$

Il suffit pour cela, si on part de la base canonique $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ de réécrire la matrice J_k dans la base $(e_1, e_{k+1}, e_2, e_{k+2}, \dots, e_k, e_{2k})$.

Lien avec la mécanique classique en régime conservatif

La mécanique classique pour la dynamique du point (ou d'un ensemble de points) se laisse réécrire sous la forme d'une dynamique hamiltonienne lorsque le système est conservatif. on considère une équation de la mécanique classique pour une inconnue $t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^k$ avec une force conservative, c'est-à-dire qui dérive d'un potentiel \mathcal{P} :

$$\ddot{X} = -\nabla \mathcal{P}(X).$$

Pour faire apparaître le hamiltonien, on commence par reformuler cette équation pour la mettre sous la forme de Cauchy. On introduit pour cela le vecteur vitesse $V(t) := \dot{X}(t)$. On a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ -\nabla \mathcal{P}(X) \end{pmatrix} = -J \nabla \mathcal{H}(X, V), \quad (2.3)$$

avec comme choix du hamiltonien : la célèbre énergie mécanique ! Elle est définie par :

$$E_M = \mathcal{H}(X, V) := \frac{|V|^2}{2} + \mathcal{P}(X).$$

Lorsque le Hamiltonien se met sous la forme d'une énergie mécanique comme ci-dessus (quitte à faire un changement de base) on dit qu'il s'agit d'une **équation de la mécanique hamiltonienne** ou d'une **équation mécanique conservative**.

Un exemple très important d'équation de la mécanique hamiltonienne est le cas particulier des équations de la **mécanique hamiltoniennes linéaires**. Dans le cadre des équations linéaires, c'est-à-dire lorsque le potentiel \mathcal{P} est quadratique, la dynamique s'étudie directement en utilisant les exponentielles de matrices (voir la définition 0.15). Lorsque \mathcal{P} est une fonction quadratique défini-positive, on parle alors d'un **oscillateur harmonique généralisé**.

Remarque : La mécanique des solides indéformables, lorsque le système est conservatif, se laisse également réécrire sous forme hamiltonienne.

Propriétés des équations hamiltoniennes

Le principal intérêt des systèmes hamiltoniens réside dans le fait qu'on peut aisément obtenir des quantités conservées.

THÉORÈME 2.1 Préservation du hamiltonien

Si une équation différentielle est hamiltonienne alors son hamiltonien est une quantité conservée par la dynamique.

Démonstration. En utilisant la dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(X(t)) = \nabla \mathcal{H}(X(t)) \cdot \frac{dX}{dt} = -\nabla \mathcal{H}(X(t))^T \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \nabla \mathcal{H}(X(t)) = 0;$$

où pour la dernière inégalité on a utilisé le fait général suivant : $Y^T J Y = 0$ pour tout vecteur Y dès que la matrice J est antisymétrique. \square

THÉORÈME 2.2 Invariance par translation

On suppose qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $X \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on ait $X + \lambda X_0 \in \Omega$ et

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(X + \lambda X_0).$$

Dans ce cas, la dynamique hamiltonienne associée à \mathcal{H} stabilise tous les hyperplans affines orthogonaux au vecteur JX_0 . Ceci revient à la propriété de conservation suivante :

$$\frac{d}{dt} (JX_0)^T X(t) = 0.$$

Démonstration. Puisque \mathcal{H} est invariant par translation dans la direction X_0 , on a la dérivée directionnelle de \mathcal{H} dans la direction X_0 qui est nulle :

$$0 = \frac{\mathcal{H}(X + \lambda X_0) - \mathcal{H}(X)}{\lambda} \longrightarrow \nabla \mathcal{H}(X)^T X_0, \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent, puisque $J^T = -J$ et $J^2 = I_{2d}$:

$$\frac{d}{dt}(JX_0)^T X(t) = (JX_0)^T \dot{X}(t) = -(JX_0)^T J \nabla \mathcal{H}(X) = \nabla \mathcal{H}(X)^T X_0 = 0.$$

□

On va à présent énoncer le théorème de conservation des quantités quadratiques associées aux propriétés d'invariance du hamiltonien par rotation. Les idées sont très proches de la démonstration précédente mais leur mise en oeuvre nécessite quelques outils techniques. Pour $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \mathbb{R}^k$, et pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit la matrice de rotation généralisée de taille $2k$ par la formule suivante :

$$\bar{R}_{\omega, \theta} := \begin{pmatrix} R_{\omega_1 \theta} & & & \\ & R_{\omega_2 \theta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_{\omega_k \theta} \end{pmatrix}$$

avec la notation R_{ϑ} qui désigne la matrice associée à la rotation du plan d'angle ϑ . On rappelle que les blocs de rotation d'angle ϑ s'écrivent

$$R_{\vartheta} := \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On peut vérifier par exemple que $R_{\frac{\pi}{2}} = J_1$. Nous aurons également besoin des *matrices de cisaillement* (la généralisation des matrices anti-symétriques particulières Γ_k), définies par :

$$\Gamma_{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 J_1 & & & \\ & \omega_2 J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \omega_k J_1 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 2.3 Invariance par rotation

Soit $\omega \in \mathbb{R}^k$ et soit une matrice O spéciale orthogonale. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $M_{\theta} := O \bar{R}_{\omega, \theta} O^T$ (qui est elle-même une matrice spéciale orthogonale). On suppose que pour tout $X \in \Omega$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait $M_{\theta} X \in \Omega$ et

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(M_{\theta} X).$$

Dans ce cas, l'équation hamiltonienne associée à \mathcal{H} stabilise toutes les coniques centrées engendrées par la matrice $A_{\omega} := JO \Gamma_{\omega} O^T$. Plus précisément, on a :

$$\frac{d}{dt} X^T A_{\omega} X = 0.$$

On peut remarquer que la matrice $O \Gamma_{\omega} O^T$ est anti-symétrique, et donc que A_{ω} est symétrique. On peut reformuler ce théorème en disant que la dynamique préserve la forme quadratique canoniquement associée à la matrice symétrique A_{ω} . Concernant la matrice O : elle joue le rôle d'une matrice de changement de base. On peut refaire cette démonstration en prenant $O = I_{2d}$ et en se plaçant directement dans une base adaptée aux rotations $\bar{R}_{\omega, \theta}$.

Démonstration. Étape 1. On commence par reformuler la propriété d'invariance sur \mathcal{H} par une condition sur son gradient. Par un développement limité au voisinage de $\theta = 0$:

$$0 = \frac{\mathcal{H}(M_\theta X) - \mathcal{H}(X)}{\theta} = \frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(M_\theta X) \Big|_{\theta=0} + \mathcal{O}(\theta).$$

On calcule :

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{H}(M_\theta X) = \nabla \mathcal{H}(X)^T O \left(\frac{d}{d\theta} \bar{R}_{\omega\theta} \right) O^T X.$$

On calcule la dérivation de la matrice $R_{\omega\theta}$ blocs par blocs, sachant que

$$\frac{d}{d\theta} R_{\omega_0\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0\theta) & -\sin(\omega_0\theta) \\ \sin(\omega_0\theta) & \cos(\omega_0\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 \sin(\omega_0\theta) & -\omega_0 \cos(\omega_0\theta) \\ \omega_0 \cos(\omega_0\theta) & \omega_0 \sin(\omega_0\theta) \end{pmatrix}$$

On vérifie que en $\theta = 0$ on a $dR_{\omega_0\theta}/d\theta = \omega_0 J_1$, de sorte que

$$\frac{d}{d\theta} \bar{R}_{\omega\theta} \Big|_{\theta=0} = \Gamma_\omega$$

Si on injecte cette identité dans la première équation, on en déduit que

$$\nabla \mathcal{H}(X)^T O \Gamma_\omega O^T X = 0.$$

Étape 2. A présent on démontre la propriété de conservation. En utilisant le fait que A_ω symétrique :

$$\frac{d}{dt} X^T A_\omega X = \dot{X}^T A_\omega X + X^T A_\omega \dot{X} = 2\dot{X}^T A_\omega X = -2(J\nabla \mathcal{H}(X))^T A_\omega X.$$

En remplaçant A_ω par son expression et en utilisant $J^T J = -I_{2d}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} X^T A_\omega X = -2\nabla \mathcal{H}(X)^T J^T J O \Gamma_\omega O^T X = 2\nabla \mathcal{H}(X)^T O \Gamma_\omega O^T X = 0.$$

□

L'important n'est pas vraiment de retenir les énoncés de ces deux théorèmes et leur démonstration mais plutôt l'état d'esprit avec lequel on traite ces questions :

- On identifie un invariant dans le hamiltonien \mathcal{H} .
- On en déduit une condition sur $\nabla \mathcal{H}$.
- On en déduit une loi de conservation.

Cette idée a été plus tard généralisée et rendue rigoureuse par le théorème de Noether, dont un énoncé simplifié est le suivant :

Theorem 2.1.1 (Noether).

À toute transformation infinitésimale qui laisse invariante le hamiltonien correspond une quantité qui se conserve.

C'est avec ce théorème que l'on démontre toutes les lois de conservation de la mécanique classique (conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, de la charge électrique, du flux magnétique, etc...) mais aussi de la mécanique quantique.

Remarque importante : il n'est pas nécessaire qu'un système soit hamiltonien pour avoir des quantités conservées !

2.1.3 Systèmes dissipatifs

Les systèmes dissipatifs sont les systèmes qui perdent de l'énergie au cours du temps. On les définit de manière formelle comme suit :

DÉFINITION 2.3 Systèmes dissipatifs (†)

Un système dynamique $t \mapsto X(t)$ est dit *dissipatif* lorsqu'il existe un hamiltonien $\mathcal{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et un terme dissipatif $\mathcal{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\frac{d}{dt}X = -J\nabla\mathcal{H}(X) - \mathcal{D}(X),$$

où le terme dissipatif vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall X \in \Omega, \quad \nabla\mathcal{H}(X)^T\mathcal{D}(X) \geq 0, \quad \text{et} \quad \exists X \in \Omega, \quad \nabla\mathcal{H}(X)^T\mathcal{D}(X) > 0.$$

On peut vérifier que si \mathcal{D} est nul alors la dynamique est hamiltonienne. La notion de système dissipatif est donc pertinente dans les régions où l'inégalité ci-dessus est stricte. Les points X pour lesquels l'inégalité ci-dessus est stricte sont les **points dissipatifs** ou de **zones de dissipation**. Le terme dissipatif est le terme dans l'équation qui engendre un phénomène de dissipation d'énergie :

PROPOSITION 2.3 Dissipation du hamiltonien

Le hamiltonien décroît au cours du temps et sa vitesse de décroissance est donnée par

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(X(t)) = -\nabla\mathcal{H}(X(t))^T\mathcal{D}(X(t)) \leq 0.$$

Un exemple de système dissipatif est celui des frottements linéaires à coefficients constants en mécanique classique. Il s'agit des systèmes de la forme (avec $X \in \mathbb{R}^d$) :

$$\ddot{X} = -\nabla\mathcal{P}(X) - D\dot{X}$$

où D est une matrice diagonale positive. A l'aide de l'énergie mécanique $E_M = |V|^2/2 + \mathcal{P}(X)$, on réécrit ce système sous forme hamiltonienne + un terme dissipatif :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = -J\nabla E_m - \begin{pmatrix} 0 \\ DV \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, on peut vérifier que

$$\nabla E_m^T \begin{pmatrix} 0 \\ DV \end{pmatrix} = V^T DV \geq 0.$$

On remarque enfin que les zones de dissipations sont les zones pour lesquelles le terme ci-dessus est strictement positif. Si la matrice D est défini-positive, alors les zones de dissipation correspondent à la condition $V \neq 0$.

DÉFINITION 2.4 terme dissipatif pour la mécanique hamiltonienne

On considère un terme dissipatif $\mathcal{D}(X, V)$ associé à un hamiltonien mécanique $\mathcal{H}(X, V)$, on dit que le dissipateur est **mécanique** lorsqu'il est nul ssi la vitesse est nulle :

$$\forall X \in \Omega \quad V \neq 0 \iff \nabla\mathcal{H}(X, V) \cdot \mathcal{D}(X, V) > 0.$$

On parle alors d'un **système mécanique dissipatif**.

2.2 Différentes notions de stabilité

L'étude de la stabilité consiste à étudier le comportement des solutions d'une EDO au voisinage d'une solution. L'étude de la stabilité est fondamentale pour la construction de schémas numériques pour la résolution des EDO à l'aide d'un ordinateur. C'est également un concept qui joue un rôle important en physique pour l'étude de l'existence physique d'états stationnaires. Cependant, différentes notions de stabilité existent pour décrire des phénomènes de stabilité proches mais ayant certaines différences. Pour la suite on considère le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0 \in \Omega, \quad (2.5)$$

Pour exprimer la dépendance par rapport à la donnée initiale, on utilise la notation “*flot*” :

DÉFINITION 2.5 Nouvelle notation : le flot

Étant donné une fonction \mathcal{F} fixée quelconque, on note $\mathcal{S}^{t,t_0}X$ la solution du problème de Cauchy (2.5) avec la donnée initiale $X \in \Omega$ donnée au temps initial t_0 . Autrement-dit : $\mathcal{S}^{t,t_0}X(t_0) := X(t)$. Lorsque $t_0 = 0$ on écrit simplement \mathcal{S}^t .

2.2.1 Stabilité et stabilité asymptotique

La première notion de *stabilité*, la plus naturelle également, consiste à regarder l'ensemble des données initiales proches de la donnée X_0 et à comparer le comportement relatif des solutions en temps long.

DÉFINITION 2.6 Stabilité et stabilité asymptotique (‡)

(i) La solution $t \mapsto \mathcal{S}^t X_0$ est dite **stable** ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|X_1 - X_0| \leq \delta \quad \implies \quad \sup_{t \geq 0} |\mathcal{S}^t X_1 - \mathcal{S}^t X_0| \leq \varepsilon.$$

(ii) La solution $t \mapsto \mathcal{S}^t X_0$ est dite **asymptotiquement stable** ssi il existe $\delta > 0$ tel que

$$|X_1 - X_0| \leq \delta \quad \implies \quad |\mathcal{S}^t X_1 - \mathcal{S}^t X_0| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Remarque : La notion de *stabilité asymptotique* implique la notion de *stabilité* mais la réciproque est fautive puisque le ε ne dépend pas du temps.

DÉFINITION 2.7 Etat stable (‡)

On dit que $X_0 \in \Omega$ est un **état stable** (resp. un **état asymptotiquement stable**) ssi

- Il s'agit d'un état stationnaire. Autrement dit : $\mathcal{S}^t X_0 = X_0$ pour tout temps $t \geq 0$.
- La solution associée est stable (resp. asymptotiquement stable).

L'instabilité est simplement défini comme étant la négation de la stabilité :

DÉFINITION 2.8 instabilité (†)

La solution $t \mapsto \mathcal{S}^t X_0$ est dite **instable** ssi elle n'est pas stable. Si X_0 est un état stationnaire alors dans ce cas on dit que c'est un **état instable**.

2.2.2 Stabilité de Lyapunov et théorème de Lyapunov

La notion de stabilité introduite par Aleksandr Lyapunov consiste à exploiter les propriétés des quantités conservées ou dissipées par le flot de l'équation pour décrire le comportement de la solution.

DÉFINITION 2.9 Stabilité au sens de Lyapunov (‡)

On considère un problème de Cauchy associé à une fonction \mathcal{F} (2.5) supposée autonome en temps et X_0 un état stationnaire pour cette équation. On dit que X_0 est **stable au sens de Lyapunov** ssi il existe $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés (pour $\delta > 0$) :

- On a $V(X_0) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout X dans $\mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$.
- Pour tout $X \in \mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$, on a $\nabla \mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{F}(X) \leq 0$.

Si cette dernière inégalité est stricte, on dit que X_0 est un état **asymptotiquement stable au sens de Lyapunov**.

Pour simplifier le vocabulaire, on dit parfois seulement que l'état X_0 est \mathcal{L} -stable ou bien *asymptotiquement \mathcal{L} -stable*. La fonction \mathcal{L} est appelée **fonction de Lyapunov**. On a également une notion d'instabilité au sens de Lyapunov :

DÉFINITION 2.10 Instabilité au sens de Lyapunov (†)

On dit que X_0 est **instable au sens de Lyapunov** ssi il existe $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et une courbe lipschitz $s \in [0, \delta] \mapsto X_s \in \mathcal{B}(0, \delta)$ pour $\delta > 0$ qui satisfont les propriétés :

- On a $V(X_0) = 0$ et $V(X_s) \leq 0$ pour tout $s \in]0, \delta]$.
- Pour tout $X \in \mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$, on a $\nabla \mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{F}(X) \leq 0$.

Intuitivement, la fonction \mathcal{L} se comprend comme étant une mesure de la distance à l'état d'équilibre étudié. Il est important de remarquer que la deuxième condition implique **la décroissance de \mathcal{L} au cours du temps** dans le cas stable (et sa croissance dans le cas instable). En effet,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(X(t)) = \nabla \mathcal{L}(X(t)) \cdot \frac{dX}{dt} = \nabla \mathcal{L}(X(t)) \cdot \mathcal{F}(X(t)) \leq 0.$$

Ainsi, on peut regarder \mathcal{L} comme étant la représentation d'une énergie dissipée au sein d'un puits de potentiel (dans le cas stable).

On comprend le sens qu'il faut donner à la courbe $s \mapsto X_s$: il s'agit d'une courbe le long de laquelle l'énergie décroît et donc au voisinage de laquelle le système va s'éloigner indéfiniment de l'état stationnaire X_0 .

THÉORÈME 2.4 Le théorème de stabilité de Lyapunov-Persidsky (‡)

On considère un problème de Cauchy associé à une fonction \mathcal{F} (2.5) supposée autonome en temps et X_0 un état stationnaire pour cette équation. On a :

- X_0 est stable au sens de Lyapunov $\iff X_0$ est stable.
- X_0 asymptotiquement Lyapunov stable $\iff X_0$ asymptotiquement stable.

Remarque : Dans le cadre de ce cours, on étudie seulement des fonctions de Lyapunov indépendantes du temps (cas autonome). Cette théorie se généralise de manière naturelle au

cas où \mathcal{F} et \mathcal{L} dépendent du temps. Remarquons enfin qu'il existe d'autres notions de stabilité (orbitale, structurelle, etc...) mais qui ne sont pas abordés dans ce cours. Il est donc recommandé de préciser qu'on parle de la *stabilité de Lyapunov*.

Le sens \Rightarrow a été démontré par Lyapunov dans le cadre de ses travaux fondateurs sur la stabilité de Lyapunov. Persidsky démontre la réciproque. Son nom étant moins connu, on appelle généralement ce théorème seulement du nom de Lyapunov.

THÉORÈME 2.5 Le théorème d'instabilité de Lyapunov-Chetaev (‡)

On considère un problème de Cauchy associé à une fonction \mathcal{F} supposée autonome en temps et X_0 un état stationnaire pour cette équation. On a :

$$X_0 \text{ Lyapunov instable} \implies X_0 \text{ instable.}$$

Attention ! Contrairement au théorème de stabilité, la réciproque est fautive ici ! En effet, il existe des instabilités qui ne suivent pas l'intuition d'une "courbe d'instabilité" telle que introduite dans la définition de l'instabilité de Lyapunov. Cependant, il s'agit de situations mathématiques considérées comme pathologiques et rarement rencontrées en pratique pour l'analyse des équations issues de la physique ou de la biologie.

Lyapunov démontre un cas particulier de ce théorème : lorsque l'énergie décroît dans toutes les directions de l'espace. Cette version plus forte est due à Chetaev.

2.2.3 Application à la mécanique hamiltonienne et dissipative

La théorie de Lyapunov est particulièrement utile pour étudier la stabilité des points-critiques pour les potentiels d'énergie en mécanique hamiltonienne ou dissipative.

PROPOSITION 2.4 Stabilité pour les équations de la mécanique

On considère un problème de Cauchy de la mécanique hamiltonienne ou dissipative d'inconnue $(X, V) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On note \mathcal{P} le potentiel mécanique, \mathcal{H} le hamiltonien mécanique et \mathcal{D} un terme dissipatif (éventuellement nul). Soit X_0 un point-critique du potentiel \mathcal{P} .

- (i) Si X_0 est un minimum local strict du potentiel \mathcal{P} , alors $(X_0, 0)$ est un *état stable* quel que soit le dissipateur \mathcal{D} .
- (ii) Si X_0 est un minimum local strict de \mathcal{P} et si \mathcal{D} est un dissipateur mécanique, alors $(X_0, 0)$ est un *état asymptotiquement stable*.
- (iii) Si X_0 est un maximum local de \mathcal{P} le long d'une courbe lipschitzienne d'équation $s \in [0, 1] \mapsto X_0 + \Xi(s)$ (avec $\Xi(0) = 0$) alors $(X_0, 0)$ est un *état instable*.

Démonstration. Une première remarque importante : comme conséquence de la formulation mécanique donnée à l'équation (2.3), le fait que X_0 soit un point-critique de \mathcal{P} implique que $(X_0, 0)$ soit une solution stationnaire. En effet, tout d'abord on remarque que $\nabla \mathcal{P}(X_0) = 0$ implique $\nabla \mathcal{H}(X_0, 0) = 0$. Par ailleurs, comme le terme dissipatif \mathcal{D} est un terme dissipatif mécanique (Définition 2.4), on a aussi $\mathcal{D}(X_0, 0) = 0$ de sorte que $(X_0, 0)$ est bien un état stationnaire. Pour cette démonstration on notera ∇_x le gradient par rapport à X et ∇_v celui par rapport à V (et aussi $\nabla_{x,v}$ celui par rapport aux 2 variables vectorielles).

Preuve du point (i). On choisit le hamiltonien (corrigé d'une constante additive) comme

fonction de Lyapunov : $\mathcal{L} := \mathcal{H} - \mathcal{P}(X_0)$. En particulier, on a

$$\mathcal{L}(X_0, 0) = \mathcal{H}(X_0, 0) - \mathcal{P}(X_0) = \frac{|0|^2}{2} + \mathcal{P}(X_0) - \mathcal{P}(X_0) = 0.$$

Comme X_0 est un minimum strict du potentiel, on a $\mathcal{P}(X) > \mathcal{P}(X_0)$ pour tout X dans le boule épointé $\mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$ et donc pour tout $X \neq X_0$ dans cette boule et pour tout $V \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{L}(X, V) = \frac{|V|^2}{2} + \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) > \frac{|V|^2}{2} + \mathcal{P}(X_0) - \mathcal{P}(X_0) \geq 0.$$

On a donc vérifié le premier point de la définition de la stabilité de Lyapunov (Définition 2.9). Par ailleurs, comme \mathcal{D} est dissipateur pour ce hamiltonien, on a, pour $X \in \mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$:

$$\nabla_x \mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{F}(X) = \nabla_x \mathcal{H}(X) \cdot (-J \nabla_x \mathcal{H}(X) - \mathcal{D}(X)) = -\nabla_x \mathcal{H}(X) \cdot \mathcal{D}(X) \leq 0. \quad (2.6)$$

où l'on a utilisé $\nabla_x \mathcal{L} = \nabla_x \mathcal{H}$ ainsi que la propriété $Y^T J Y = 0$ car J est anti-symétrique. On a donc vérifié le second point de la définition de la stabilité de Lyapunov (Définition 2.9). On en conclut donc par théorème que $(X_0, 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

Preuve du point (ii). Si le voisinage de $(X_0, 0)$ était une zone de dissipation pour toutes les vitesses on pourrait conclure directement au caractère asymptotiquement stable avec l'inégalité précédente (devenue stricte). Cependant, cette propriété n'est vraie que si la vitesse est non nulle car \mathcal{D} est un terme dissipatif mécanique. Pour arriver à la conclusion, il faut nécessairement modifier la fonction de Lyapunov. Nous allons faire la preuve dans le cas particulier de la dissipation linéaire uniforme :

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} 0 \\ DV \end{pmatrix}, \quad \text{avec } D \text{ une matrice } d \times d \text{ diagonale et définie positive.}$$

La preuve dans le cas général est beaucoup plus technique et difficile à lire mais pas très intéressante. Les idées principales sont contenues dans la démonstration qui suit (et qui est beaucoup plus claire). Nous commençons par introduire une fonction de Lyapunov modifiée (avec un paramètre $\mu > 0$) :

$$\mathcal{L}_\mu(X, V) := \mathcal{L}(X, V) + \mu V^T \nabla_x \mathcal{P}(X) + \frac{1}{\mu} D(\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)).$$

On remarque que nous avons toujours $\mathcal{L}(X_0, 0) = 0$. nous avons aussi pour $X \in \mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$ (comme D est diagonale défini-positive et X_0 un minimum local strict) :

$$\frac{1}{\mu} D(\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)) > 0.$$

Donc,

$$\mathcal{L}_\mu(X, V) > \frac{|V|^2}{2} + \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) - \mu V^T \nabla \mathcal{P}(X)$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Young ($2|ab| \leq (a^2 + b^2)$) pour borner le produit scalaire $V^T \nabla \mathcal{P}$ terme à terme, on aboutit à

$$\frac{|V|^2}{2} + \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) - \mu V^T \nabla \mathcal{P}(X) \geq \frac{2-\mu}{4} |V|^2 + \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) - \frac{\mu}{2} |\nabla \mathcal{P}(X)|^2, \quad (2.7)$$

On remarque à présent que, puisque X_0 est un minimum local, il n'y a pas de terme d'ordre 1 dans le développement limité (en notant $H := X - X_0$) :

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X_0) + H^T \nabla^2 \mathcal{P}(X_0) H + \mathcal{O}(|H|^3),$$

Puisque le gradient du hamiltonien \mathcal{H} est localement lipschitzien, il s'en suit que le gradient du gradient, c'est-à-dire la matrice hessienne $\nabla^2\mathcal{P}$, est borné sur $\mathcal{B}(X_0, \delta)$. Donc

$$|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)| \lesssim \|\nabla^2\mathcal{P}\|_{L^\infty} |H|^2.$$

Cette dernière inégalité implique, en refaisant un développement limité,

$$|\nabla\mathcal{P}(X)|^2 = \frac{|\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)|^2}{H^2} + \mathcal{O}(H) \lesssim \|\nabla^2\mathcal{P}\|_{L^\infty} |\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)|$$

Par conséquent, si μ est assez petit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) - \frac{\mu}{2} |\nabla\mathcal{P}(X)|^2 &\gtrsim \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) - \frac{\mu}{2} \|\nabla^2\mathcal{P}\|_{L^\infty} |\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0)| \\ &\gtrsim \mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(X_0) > 0, \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que X_0 est un minimum strict. La constante multiplicative qui est cachée dans le dernier symbole \gtrsim ci-dessus va dépendre de la valeur de $\|\nabla^2\mathcal{P}\|_{L^\infty}$. De même, le bon choix pour μ "assez petit" va dépendre de $\|\nabla^2\mathcal{P}\|_{L^\infty}$. A présent, si on injecte ce résultat dans l'équation (2.7) et les précédentes, on aboutit à :

$$\mathcal{L}_\mu(X, V) > \frac{2 - \mu}{4} |V|^2.$$

Si on demande en plus à ce que $\mu \leq 2$, cette inégalité implique,

$$\forall X \in \mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}, \quad \mathcal{L}_\mu(X, V) > 0.$$

ce qui prouve le premier point de la définition des fonctions de Lyapunov.

Pour prouver le second point, on commence par calculer le gradient de \mathcal{L}_μ :

$$\nabla_x \mathcal{L}_\mu(X, V) = \nabla_x \mathcal{P}(X) + \mu \nabla_x^2 \mathcal{P}(X) V + \frac{1}{\mu} D \nabla_x \mathcal{P}(X)$$

$$\nabla_v \mathcal{L}_\mu(X, V) = V + \mu \nabla_x \mathcal{P}.$$

On calcule à présent le produit scalaire avec le champ de vitesse $\mathcal{F} = -J \nabla_{x,v} \mathcal{H} - \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{x,v} \mathcal{L}_\mu \cdot \left(-J \nabla_{x,v} \mathcal{H} - \mathcal{D} \right) &= -V^T D V + \mu V^T \nabla_x^2 \mathcal{P} V + \mu V^T \left(\frac{1}{\mu} D \nabla_x \mathcal{P} \right) - \mu |\nabla_x \mathcal{P}|^2 - V^T D \nabla_x \mathcal{P} \\ &= -V^T D V + \mu V^T \nabla_x^2 \mathcal{P} V - \mu |\nabla_x \mathcal{P}|^2, \end{aligned}$$

où pour la deuxième égalité on a remarqué que les termes en positions 3 et 5 de l'équation précédente se simplifient. On remarque à présent que, si on note $\lambda_1(D) > 0$ la plus petite valeur propre de la matrice diagonale D , on a

$$|V^T D V| \geq \lambda_1(D) |V|^2.$$

Par ailleurs, on va utiliser de nouveau le fait que la matrice hessienne de \mathcal{P} est bornée sur la boule $\mathcal{B}(X_0, \delta)$ pour écrire

$$|V^T \nabla_x^2 \mathcal{P}(X) V| \lesssim \|\nabla_x^2 \mathcal{P}\|_{L^\infty} |V|^2.$$

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$-V^T D V + \mu V^T \nabla_x^2 \mathcal{P}(X) V \leq -c |V|^2.$$

En effet, il suffit de choisir μ assez petit par rapport à la valeur de $\lambda_1(D)$ et $\|\nabla_x^2 \mathcal{P}\|_{L^\infty}$. Si on injecte cette estimation dans le calcul du produit scalaire, on a

$$\nabla_{x,v} \mathcal{L}_\mu \cdot \mathcal{F} \leq -c|V|^2 - \mu|\mathcal{P}(X)|^2.$$

Puisque X_0 est un minimum strict de \mathcal{P} on en déduit que $|\mathcal{P}(X)|^2 > 0$ sur $\mathcal{B}(X_0, \delta) \setminus \{X_0\}$ et donc :

$$\nabla_{x,v} \mathcal{L}_\mu(X, V) \cdot \mathcal{F}(X, V) < 0,$$

dès que $(X, V) \neq (X_0, 0)$. Par théorème de Lyapunov, on en conclut que $(X_0, 0)$ est un état stationnaire asymptotiquement stable.

Preuve du point (iii). Si on travaille de nouveau avec $\mathcal{L} = \mathcal{H} - \mathcal{P}(X_0)$ comme fonction de Lyapunov, on constate que le long de la courbe lipschitzienne $s \in [0, 1] \mapsto (X_0 + \Xi(s), 0)$ nous avons :

$$\mathcal{L}(X_0 + \Xi(s), 0) = \frac{|0|^2}{2} + \mathcal{P}(X_0 + \Xi(s)) - \mathcal{P}(X_0) \leq 0.$$

On conclut par le théorème d'instabilité de Lyapunov-Chetaev. \square

2.3 Stabilité des équations linéaires et stabilité du linéarisé

Une partie importante de l'analyse de la stabilité des système concerne l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires. Lorsque le système est non-linéaire, on peut le linéariser au voisinage de l'état stationnaire et obtenir des résultats de stabilité non-linéaire à partir de l'étude de la stabilité linéaire.

2.3.1 L'exponentielle d'un bloc de Jordan

On rappelle que la résolution d'un système linéaire se fait à l'aide de la réduction de Jordan (définition 0.14) et des exponentielles de matrices (définition 0.15).

PROPOSITION 2.5 Analyse asymptotique des systèmes linéaires de Jordan (†)

Soit $J_k(\lambda)$ une matrice de Jordan (voir Définition 0.14) avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Si $\Re(\lambda) < 0$, alors $\|\exp(tJ_k(\lambda))\| \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- Si $\Re(\lambda) > 0$, alors $\|\exp(tJ_k(\lambda))\| \rightarrow +\infty$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- Si $\Re(\lambda) = 0$, et $k > 1$ alors $\|\exp(tJ_k(\lambda))\| \rightarrow +\infty$.
- Si $\Re(\lambda) = 0$, et $k = 1$ alors $\|\exp(tJ_k(\lambda))\| \leq 1, \forall t$.

On rappelle que les ensembles de matrices sont aussi des espaces vectoriels de dimension finie. Ainsi la convergence présente dans ce résultat est la convergence associée à la norme euclidienne canonique $\|M\| := (\sum_{j,k} m_{jk}^2)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$. La démonstration de ce théorème est élémentaire à partir des calculs effectués lors de la définition des exponentiels de blocs de Jordan.

On constate que lorsque $\Re(\lambda) = 0$, le comportement diffère selon la taille du bloc de Jordan. Si une valeur propre λ n'a que des blocs de Jordan de taille 1, on dit qu'il s'agit d'une *valeur propre semi-simple*. Le corollaire immédiat de cette proposition est le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6 Théorème de stabilité linéaire (†)

On étudie le système linéaire à coefficients constants $\dot{X} = AX$, qui admet 0 comme état stationnaire.

(i) 0 est asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative.

(ii) 0 est stable ssi toutes les valeurs propres de la matrice A sont, soit de partie réelle strictement négative, soit de partie réelle nulle et semi-simples.

2.3.2 Allure des solutions d'une équation linéaire**Allure des solutions d'une équation linéaire 2D**

L'ensemble des comportements possibles pour les système de 2 équations linéaires est résumé dans le tableau situé à la page suivante. Ces résultats se retrouvent directement à partir du calcul des exponentielles de matrices. Il est important de connaître ces résultats mais il est surtout primordial de savoir les retrouver à l'aide des exponentielles de blocs de Jordan. On a omis dans ce tableau les cas faciles correspondant aux cas où l'une des valeurs propre est nulle en effet, dans ces cas-là on peut se ramener à une dynamique 1D (on parle alors de dynamique *dégénérée*) Lorsqu'on parle de *décrire l'allure des solutions* d'une équation linéaire : on fait explicitement référence aux différents cas possibles dans ce tableau (ou bien on dit que la dynamique est 1D le cas échéant).

Remarque : Les courbes tracées représentent l'allure des solutions associées au bloc de Jordan. Pour en déduire le comportement réel de la solution, il faut penser à refaire le changement de base dans l'autre sens. Ainsi une dynamique qui, dans une base adaptée, est périodique sur des cercles, devient une dynamique périodique sur des ellipses inclinées après retour dans la base initiale. Il en de même pour les dynamiques en spirales, en hyperboles, etc...

Allure des solutions d'une équation linéaire en dimension supérieure

L'analyse qui conduit à ce tableau en 2D peut se reproduire sur des blocs de Jordan de toutes les tailles. Il y a peu de différences entre les résultats 2D et leurs équivalents en dimensions supérieures (y compris concernant les dégénérescences dimensionnelles liées à des valeurs propres nulles). Les 2 principales différences importantes sont les suivantes :

1) Les blocs de Jordan de taille plus grande que 2 vont donner des nœuds impropres (stables ou instables) avec des perturbations polynomiales multiplicatives d'ordre de plus en plus grand (l'ordre de la perturbation polynomiale est égale à la taille du bloc de Jordan).

2) A partir de la dimension 4 on voit apparaître des blocs de Jordan de la forme :

$$\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \bar{z} & 1 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix},$$

avec $z = a + ib$ et $b \neq 0$ (ou des blocs similaires de taille plus grande). Lorsque $a \neq 0$, ces blocs donnent un *point spiral impropre* qui est asymptotiquement stable ssi $a < 0$ et instable sinon et les trajectoires sont des perturbations polynomiales multiplicatives de la spirale logarithmique. Dans le cas où $a = 0$, on obtient également un *point spiral impropre* et celui-ci est instable. La différence étant que la dynamique n'est plus exponentielle mais polynomiale (on parle de spirale polynomiale). Dans le cas où les deux blocs sont de taille 1, on obtient les spirales d'Archimède.

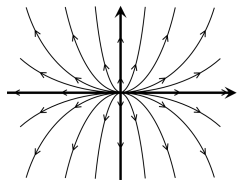
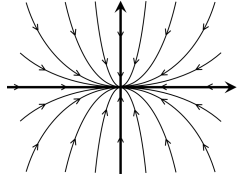
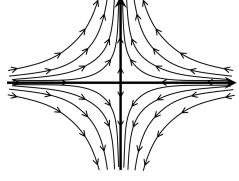
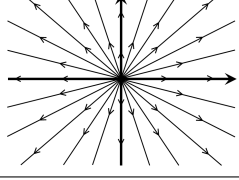
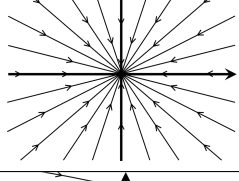
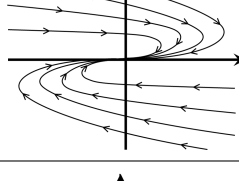
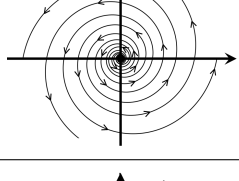
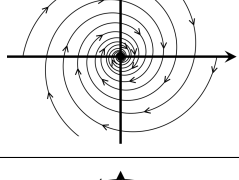
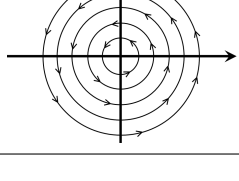
Réduite de Jordan	Nomenclature	Trajectoire	Stabilité	Schéma
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $0 < \lambda < \mu$	Nœud instable (ou source)	Divergence exponentielle le long de courbes de type parabolique	Non	
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\mu < \lambda < 0$	Nœud stable (ou puits)	Convergence exponentielle le long de courbes de type parabolique	Asymptotique	
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda < 0 < \mu$	Point col (ou selle)	Divergence exponentielle le long de courbes de type hyperbolique	Non	
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $0 < \lambda$	Nœud instable isotrope (étoile instable)	Divergence exponentielle le long de droites linéaires	Non	
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda < 0$	Nœud stable isotrope (étoile stable)	Convergence exponentielle le long de droites linéaires	Asymptotique	
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$	Nœud impropre	Perturbation polynomiale multiplicative d'une dynamique exponentielle	Asyp. stable ssi $\lambda < 0$ sinon : instable	
$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ $z = a + ib$ $0 < a, b \neq 0$	Noeud spiral instable	Divergence exponentielle le long de spirales logarithmiques	Non	
$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ $z = a + ib$ $a < 0, b \neq 0$	Noeud spiral stable	Convergence exponentielle le long de spirales logarithmiques	Asymptotique	
$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ $z = a + ib$ $a = 0, b \neq 0$	Point elliptique	Trajectoire periodique sur des ellipses	Lyapunov mais pas asmptotique	

FIGURE 2.1 – L'ensemble des cas possibles pour l'allure d'une solution d'un système différentiel linéaire 2D non dégénéré et à coefficients constants.

Sens de rotation des spirales

Une question naturelle à partir du tableau précédent consiste à savoir s'il est possible de raffiner cette analyse pour les spirales afin de savoir dans quel sens tourne la dynamique associée. Pour cela on commence par séparer la dynamique en 2 blocs formés de la partie exponentiellement divergente (ou convergente) de la partie qui produit la rotation. C'est-à-dire écrire, en notant P la matrice de changement de base qui diagonalise le système,

$$P \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} + bP \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Lorsque $a < 0$, l'écriture ci-dessus est une décomposition entre une partie dissipative et une partie hamiltonienne. Lorsque $a > 0$, la dissipation est négative (autrement-dit, c'est la dynamique de $t \mapsto (x(-t), y(-t))^T$ qui est dissipative). Lorsque $a = 0$, le système est hamiltonien et parcourt une ellipse (qui se calcule à l'aide de la proposition 2.1) avec une vitesse angulaire égale à b . Pour pouvoir étudier cette rotation, on réécrit le bloc hamiltonien à l'aide de la matrice J_1 (matrice de rotation d'angle $\pi/2$). On écrit

$$P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Les nouvelles matrices de changement de base Q et Q^{-1} sont nécessairement à coefficients réels et s'obtiennent très simplement à partir de P et P^{-1} en utilisant la formule suivante (appelée parfois formule de de Moivre) :

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

La dynamique associée à la matrice J_1 , c'est-à-dire $\dot{Y} = J_1 Y$, est une dynamique périodique sur des cercles centrés dans \mathbb{R}^2 à vitesse angulaire 1 et cette rotation constante se fait dans le sens trigonométrique. Ainsi, étudier la dynamique de

$$\dot{X} = Q \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} X,$$

revient à étudier la dynamique de $\dot{Y} = J_1 Y$ modulé par un changement de base $Y = Q^{-1} X$ (ce changement de base n'étant pas forcément orthogonal). On obtient donc une dynamique périodique sur des *ellipses* centrées dans \mathbb{R}^2 à vitesse angulaire 1 et cette rotation constante se fait dans le sens suivant :

- Si $\det Q > 0$, alors le sens de la rotation est trigonométrique.
- Si $\det Q < 0$, alors le sens de la rotation est anti-trigonométrique.

En effet, le signe du déterminant signale que le changement de base en 2D préserve l'orientation dans le cas positif (le changement de base est composé uniquement de rotations et de matrices symétriques défini-positives) ou inverse l'orientation dans le cas négatif (dans ce cas, il y a en plus une symétrie axiale). L'équation de l'ellipse stabilisée par le flot est donnée par la préservation de la norme de $Y = Q^{-1} X$. C'est-à-dire :

$$X^T Q^{-T} Q^{-1} X = \text{constante}.$$

2.3.3 Stabilité pour les équations linéaire et théorème du linéarisé

L'un des principaux attrait de l'étude de la stabilité pour les systèmes linéaires consiste dans le fait qu'on peut toujours linéariser une dynamique compliquée au voisinage d'un point critique $X_0 \in \Omega$. En effet, si $\mathcal{F}(X_0) = 0$, on peut écrire pour $X \in \mathbb{R}^d$ petit le développement limité suivant :

$$\mathcal{F}(X_0 + H) = 0 + \nabla \mathcal{F}(X_0)^T H + \mathcal{O}(|H|^2).$$

Dans cette équation $\nabla \mathcal{F}(X_0)^T$ fait référence à la matrice jacobienne :

$$\nabla \mathcal{F}(X_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il est naturel pour étudier la dynamique au voisinage de X_0 de la comparer à celle du linéarisé, c'est-à-dire la dynamique donnée par

$$\frac{d}{dt} H = \nabla \mathcal{F}(X_0)^T H.$$

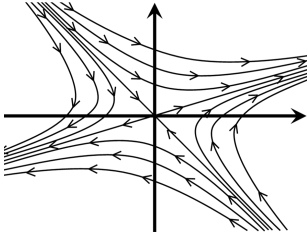
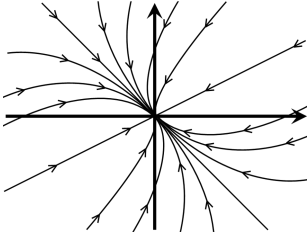
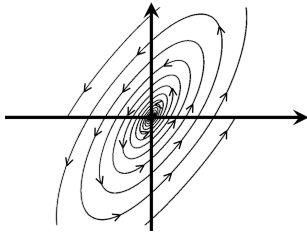
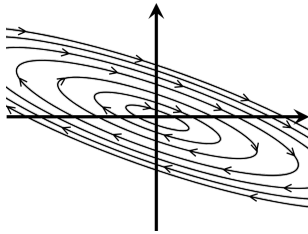
Cette dynamique, d'inconnue H admet des propriétés de stabilité que l'on obtient facilement en utilisant le théorème 2.6. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7 Théorème de stabilité du linéarisé (Lyapunov) (†)

- (i) Si le système linéarisé est asymptotiquement stable en 0 alors le système initial est asymptotiquement stable en X_0 .
- (ii) Si le système linéarisé est instable en 0 alors le système initial est instable en X_0 .

Lorsque ce théorème s'applique, on dit que X_0 est *linéairement stable* (ou instable). Dans de nombreux cas ce théorème permet de démontrer un résultat de stabilité de manière simple et efficace sans avoir à recourir aux fonctions de Lyapunov. Dans le cas des valeurs propres semi-simples de partie réelle nulle : on ne peut malheureusement pas conclure. On peut vérifier que ce cas correspond à un dynamique de la mécanique hamiltonienne (point elliptique). L'ajout d'effets dissipatifs ou anti-dissipatifs d'ordre plus élevé que linéaire font basculer le système du côté asymptotiquement stable (dissipation positive) ou instable (dissipation négative). Le seul moyen de conclure consiste alors à construire une fonction de Lyapunov qui fasse apparaître les effets non-linéaires d'ordres plus élevés.

2.3.4 4 exemples de dynamiques linéaires

$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$
			
axe stable : $y = -x$ axe instable : $3y = x$	axe rapide : $x = 2y$ axe lent : $x = -y$	grd. axe : $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ rotation sens trigo.	grd. axe : $x = \frac{-5-\sqrt{41}}{4}y$ rotation sens horaire

2.4 Bilan du Chapitre et exercices

2.4.1 Ce qu'il faut retenir et savoir-faire

Ce chapitre est premièrement consacré à l'analyse des quantités conservées ou dissipées par une équation différentielle ordinaire et aux propriétés que cela donne sur sa dynamique. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la stabilité des solutions, et plus particulièrement des solutions stationnaires à l'aide de la théorie de Lyapunov qui s'appuie sur la notion de quantité conservée. Les principaux éléments à retenir ou savoir-faire sont les suivants :

- (†) Quantités conservées (définition)
 - Quantités conservées quadratiques et critère de Lyapunov
- (†) Systèmes hamiltoniens et dissipatifs (définitions)
 - Propriété de préservation ou dissipation du hamiltonien
- (‡) Deux notions de stabilité et le théorème de stabilité de Lyapunov
- (†) Deux notions d'instabilité et le théorème d'instabilité de Lyapunov
 - Théorème de stabilité pour les équations de la mécanique
- (†) Analyse asymptotique des systèmes linéaires de Jordan
 - Le tableau de l'allure des solutions d'une équation linéaire 2D.
- (†) Le théorème de stabilité du linéarisé.

2.4.2 Exercices

Les exercices ci-dessous proposent d'étudier les quantités conservées et la stabilité des états stationnaires pour quelques équations différentielles, à l'aide des outils présentés dans ce chapitre. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre. Les exercices les plus importants sont identifiés avec le symbole (★).

Exercice 2.1 (Retour sur l'oscillateur harmonique). (★) Cet exercice revient sur l'oscillateur harmonique étudié lors de l'exercice 1.1. On rappelle son équation sans source extérieure :

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x} + kx(t) = 0,$$

avec m la masse de l'objet, k la raideur du ressort, λ le coefficient de frottement et avec $x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la position de l'objet. L'objectif de cet exercice est de manipuler les concepts du cours sur une équation simple (il ne faut donc pas s'aider de la formule qui donne les solutions exactes...).

1) En introduisant la vitesse $v(t) := \dot{x}(t)$ comme variable auxiliaire du système, montrer que l'équation étudiée est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) = -JA \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu v \end{pmatrix},$$

où $\mu > 0$ s'exprime à partir des données du problème, J est la matrice de rotation d'angle $\pi/2$ et A est une matrice constante dont on précisera les coefficients.

2) Pour cette question, on travaille sans frottements : $\lambda = 0$.

2.1) Montrer qu'il existe une fonction quadratique \mathcal{H} telle que

$$\nabla_{x,v} \mathcal{H}(x, v) = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

2.2) En déduire que la dynamique est hamiltonienne (préciser son hamiltonien).

2.3) Montrer que le hamiltonien est une quantité conservée.

2.4) En utilisant le théorème de stabilité de Lyapunov, montrer que $(0, 0)$ est un état stable de la dynamique.

3) On travaille désormais *avec* frottements : $\lambda > 0$.

3.1) Montrer que $(0, -\mu v)$ est un terme dissipatif et montrer que le hamiltonien décroît au cours de temps.

3.2) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction suivante :

$$\mathcal{L}_{a,b} := ax^2 + 2bxv + v^2.$$

En ajustant les paramètres a et b , trouver une fonction de Lyapunov pour démontrer que l'origine est un point critique asymptotiquement stable.

3.3) Montrer que cette fonction de Lyapunov est une norme. A l'aide du lemme de Grönwall, montrer qu'elle décroît exponentiellement.

Exercice 2.2 (Allures de solutions d'équations linéaires). (★) A l'aide du tableau résumant les différentes allures possibles des solutions des équations linéaire 2D, donner l'allure des solutions pour les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

Exercice 2.3 (phénomène de stabilité non-linéaire). (★) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y + \lambda x^3 \\ \dot{y} = \beta x + \mu y^3 \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des paramètres.

1) Étudier la stabilité linéaire de $(0, 0)$ en fonction des valeurs de $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$

2) On suppose désormais que α et β sont de signes opposés et que $\lambda, \mu = 0$. Montrer qu'il s'agit d'une dynamique de la mécanique hamiltonienne et montrer que $(0, 0)$ est Lyapunov stable.

3) Montrer que si $\lambda, \mu < 0$, alors le terme cubique est un terme dissipatif. Montrer que $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. Montrer que si $\lambda, \mu > 0$, alors $(0, 0)$ est instable.

4) Refaire cette question avec $\mu = 0$.

Exercice 2.4 (Stabilité pour des potentiels 1D). (★) On s'intéresse à la stabilité des états stationnaires pour des équations de la mécanique hamiltonienne en dimension 1 :

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\nabla\mathcal{P}(x).$$

Étudier la stabilité des état stationnaires pour les potentiels suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}(x) = x^2, & \mathcal{P}(x) = -x^4, & \mathcal{P}(x) = x^3, \\ \mathcal{P}(x) = x^4 - 2x^2, & \mathcal{P}(x) = \cos(x), & \mathcal{P}(x) = 0. \end{array}$$

Que se passe-t-il si on ajoute des frottements linéaires de la forme $-\lambda\dot{x}$ avec $\lambda > 0$?

Exercice 2.5 (Retour sur le système de Lotka-Voltera). (★) Cet exercice est dans la continuité de l'exercice sur le système de Lotka-Voltera (Exercice 1.6).

1) Pour chaque état stationnaire, étudier la stabilité du problème linéarisé au voisinage de l'état d'équilibre. Dans quels cas peut-on conclure à la stabilité asymptotique ? à l'instabilité ?

2) Étudier la stabilité de Lyapunov des états stationnaires à l'aide des propriétés obtenues au cours de l'exercice 1.6.

Exercice 2.6 (Les 4 exemples de dynamiques linéaires). À la fin du Chapitre 2 de ce poly (avant les exercices), on donne 4 exemples de dynamiques linéaires 2D avec un dessin précis représentant ces 4 dynamiques. Nous allons les étudier plus en détail ici.

1) Concernant le premier système d'équations,

1.1) Donner l'allure des solutions.

1.2) Montrer qu'il y a 2 droites laissées stables par la dynamique et trouver leurs équations.

Montrer qu'il y a une direction le long de laquelle $(0, 0)$ est asymptotiquement stable et que l'autre est instable.

1.3) Montrer que la dynamique suit des branches d'hyperboles. Pour cela, trouver les équations des hyperboles laissées stables par le flot.

1.4) En déduire le dessin tracé pour le premier système.

2) Concernant le deuxième système d'équations,

2.1) Donner l'allure des solutions.

2.2) Montrer qu'il y a 2 droites laissées stables par l'équation et trouver leurs équations.

Montrer qu'il y a une direction le long de laquelle la dynamique est plus rapide d'un exposant 4 par rapport à l'autre.

2.3) En déduire que les trajectoires sont des courbes quartiques (c'est-à-dire de la forme $y = x^4$) en trouvant toutes les courbes quartiques laissées stables par le flot.

2.4) En déduire le dessin tracé pour le deuxième système.

3) Concernant le troisième système d'équations,

3.1) Donner l'allure des solutions.

3.2) Cette équation laisse stable des spirales logarithmiques à profil elliptique. Donner les équations de ces spirales (en coordonnées polaires : c'est plus simple).

3.3) En déduire le dessin tracé pour le troisième système.

4) Concernant le quatrième système d'équations,

4.1) Donner l'allure des solutions.

4.2) Montrer que cette équation de la mécanique hamiltonienne.

4.3) Montrer que cette équation conserve un ensemble d'ellipses du plan dont on donnera les équations ainsi que la direction du grand axe.

4.4) En déduire le dessin tracé pour le quatrième système.

Exercice 2.7 (retour sur le pendule simple). Lors de l'exercice 1.10 consacré au pendule simple, on a étudié les propriétés asymptotique de la dynamique à l'aide d'une fonction $\Gamma_{a,b}$.

1) Montrer que cette fonction est une fonction de Lyapunov.

2) Étudier la stabilité des points stationnaires du pendule simple (distinguer les cas avec ou sans frottements).

3) Montrer que le pendule simple est un système mécanique hamiltonien ou dissipatif.

4) Effectuer une linéarisation au voisinage des points stationnaire et étudier l'allure de la solution linéarisée.

Exercice 2.8 (Stabilité pour des potentiels 2D). On s'intéresse à la stabilité des états stationnaires pour des équations de la mécanique hamiltonienne en dimension 2 :

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\nabla \mathcal{P}(x, y).$$

Étudier la stabilité des états stationnaires pour les potentiels suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}(x, y) = x^2 + xy + y^2, & \mathcal{P}(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, & \mathcal{P}(x, y) = x^3 + y^2, \\ \mathcal{P}(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2, & \mathcal{P}(x, y) = x^4 + y^4, & \mathcal{P}(x, y) = x^2 + xy^2, \\ \mathcal{P}(x, y) = x^3 - 3xy^2, & \mathcal{P}(x, y) = \cos(x) \cos(y), & \mathcal{P}(x, y) = \cos(x^2 + 2y^2). \end{array}$$

Que se passe-t-il si on ajoute des frottements linéaires de la forme $-\lambda\dot{x} - \mu\dot{y}$ avec $\lambda, \mu > 0$?

Exercice 2.9 (Équation de Landau-Lifschitz). L'équation de Landau-Lifschitz modélise la dynamique de l'orientation moyenne du spin magnétique d'un atome. Cette équation a été dérivée par Landau et Lifschitz à partir de l'équation de Schrödinger et elle est une bonne approximation de l'évolution de l'aimantation spontanée du nuage électronique d'un atome si on regarde sur ces échelles de temps pas trop courtes. Un terme de dissipation issu de l'équation de Dirac est rajouté pour modéliser les effets relativistes à l'échelle atomique. L'équation de Landau-Lifschitz s'écrit :

$$\frac{dM}{dt} = -M \wedge H - \alpha M \wedge (M \wedge H),$$

avec $M : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aimantation moyenne de l'atome, $H = he_z$ le champ magnétique extérieur supposé uniforme et constant dans la direction verticale, et $\alpha \geq 0$ la constante de Gilbert.

- 1) Montrer que la norme de M est conservée. En déduire le caractère globalement bien posé.
- 2) Puisque la norme est conservée, la dynamique de M a lieu sur la sphère (c'est donc une dynamique 2D). Écrire cette équation en coordonnées sphériques.
- 3) Lorsque $\alpha = 0$, montrer que cette équation est hamiltonienne. Montrer que les trajectoires sont périodiques sur des cercles.
- 4) Lorsque $\alpha > 0$, montrer que cette équation est dissipative.
- 5) Étudier la stabilité des états stationnaires (distinguer les cas selon $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$).
- 6) Donner l'allure des solutions en étudiant le linéarisé au voisinage des états stationnaires.

Exercice 2.10 (Stabilité de la dynamique képlérienne). La dynamique képlérienne désigne la dynamique d'une masse ponctuelle plongée dans un champ gravitationnel générée par une masse immobile. Cette dynamique d'inconnue $X(t) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $\dot{X} = -X/|X|^3$.

- 1) On définit l'*orbite positionnelle* issue de la position X_0 et à la vitesse V_0 par

$$\mathcal{O}[X_0, V_0] := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ X(t) \in \mathbb{R}^2 \mid X \text{ solution avec } X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = V_0 \right\}.$$

Montrer que dans le cas de la dynamique képlérienne ce sont toujours des coniques.

- 2) Étudier la stabilité de Lyapunov pour les solutions de la dynamique képlérienne.
- 3) On parle de *stabilité des orbites positionnelles* lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$:

$$|X_0 - X_1|^2 + |V_0 - V_1|^2 \leq \delta^2 \quad \implies \quad \inf_{X \in \mathcal{O}[X_0, V_0]} \inf_{Y \in \mathcal{O}[X_1, V_1]} |X - Y| \leq \varepsilon.$$

Étudier la stabilité des orbites positionnelles pour la dynamique képlérienne.

- 4) Mêmes questions en dimension 3.

Chapitre 3

Analyse numérique et approximations

Dans ce nombreuses situations il n'est pas possible de trouver une formule explicite pour résoudre les équations différentielles ordinaire dans leur formulation générale. Pour pouvoir étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle nous avons proposé plusieurs outils d'analyse lors des chapitres précédents. Cependant, ces outils montrent vite leurs limites lorsqu'il s'agit de récupérer des informations précises sur le comportement de la solution pour des applications pratiques et techniques dans le cadre d'un travail d'ingénieur.

L'analyse numérique et la théorie des approximations permetts d'approcher la solution à l'aide d'un algorithme que l'on peut programmer sur une un ordinateur et ainsi obtenir un résultat exploitable pour des applications pratiques. L'idée principale consiste, étant donné une suite croissante de temps (t_n) finie, à fabriquer récursivement une suite (x_n) qui est une approximation de la solution exacte :

$$x_n \approx x(t_n).$$

La théorie de l'analyse numérique des équations différentielles, introduite dans ce chapitre, se développe dans la continuité de l'analyse classique des équations différentielles présentée aux chapitres 1 et 2.

3.1 Discrétisation des équations différentielles

3.1.1 Principe Général des méthodes à un pas

On considère une équation différentielle mise sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathcal{F}(t, X(t)), \quad \text{et} \quad X(0) = X_0, \quad (3.1)$$

avec $\mathcal{F} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champs de vitesse, $X_0 \in \Omega$ la donnée initiale et $X[0, T] \rightarrow \Omega$ l'inconnue du problème. On commence par discrétiser le temps en se donnant un pas de temps $\Delta t > 0$ fixé et on pose $t_0 = 0$ et $t_{n+1} := t_n + \Delta t = n\Delta t$. On note également par N le nombre total de pas de temps et on doit ajuster N et Δt de sorte que $T = N\Delta t$, où T est le temps final pour l'étude du système dynamique.

On construit alors la suite $(X_n)_{n=0}^N \in \Omega^{N+1}$ par un algorithme récursif d'ordre 1. Autrement dit, la suite est définie par récurrence avec X_0 comme donnée initiale et :

$$X_{n+1} = \mathfrak{A}[n, \Delta t, \mathcal{F}](X_n). \quad (3.2)$$

La fonction \mathfrak{A} va dépendre de l'algorithme choisi pour discrétiser l'équation différentielle. On a bien une structure récursive classique de la forme $X_{n+1} = \mathfrak{A}(X_n)$ sauf que la fonction de

réursion va dépendre de n , Δt et du champ de vitesse \mathcal{F} . On a rappelé cette dépendance par le terme entre crochet ci-dessus. Pour que cette fonction \mathfrak{A} soit un bon algorithme, il est nécessaire de la construire telle que

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} \approx \frac{d}{dt}X(t_n). \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, on étudiera différents choix possibles pour \mathfrak{A} et les propriétés qui en découlent. On fera toujours l'hypothèse implicite que l'algorithme est initialisé avec X_0 et $t_0 = 0$.

Remarque : Toutes les méthodes présentées plus loin sont des méthodes à 1 pas sauf celles présentées à la toute fin (Méthodes de Adams-Bashforth). Les méthodes multi-pas fournissent des algorithmes récursifs d'ordre plus élevé que 1. Pour des raisons pédagogiques, on présente la théorie générale sur les méthodes à 1 pas mais de nombreux résultats se généralisent au multi-pas.

3.1.2 Premier exemple : Euler explicite et implicite

Euler explicite

Le premier exemple, le plus naturel et le plus simple de discrétisation est l'algorithme de Euler-Explicite proposé par le mathématicien suisse Léonhard Euler en 1768. Il s'agit du premier exemple historique d'algorithme de discrétisation d'une équation différentielle. Elle consiste tout simplement à remplacer dX/dt par $\mathcal{F}(t_n, X_n)$ dans l'approximation (3.3). On obtient :

DÉFINITION 3.1 Méthode de Euler Explicite (‡)

On se donne un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthode (ou schéma) d'**Euler Explicite** l'algorithme itératif suivant :

$$X_{n+1} := X_n + \Delta t \mathcal{F}(t_n, X_n).$$

Pour Euler-Explicite, on retrouve bien la forme algorithmique itérative (3.2) avec

$$\mathfrak{A}[n, \Delta t, \mathcal{F}](X) = X + \Delta t \mathcal{F}(n\Delta t, X).$$

Euler implicite

Une autre approximation naturelle dans la continuité de Euler-Explicite consiste à reprendre le développement limité (3.3) et à le réécrire dans l'autre sens :

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} \approx \frac{d}{dt}X(t_{n+1}).$$

En remplaçant également nouveau dX/dt à l'aide de l'équation dynamique, on obtient :

DÉFINITION 3.2 Méthode de Euler Implicite (‡)

On se donne un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthode (ou schéma) d'**Euler Implicite** l'algorithme itératif suivant :

$$X_{n+1} := X_n + \Delta t \mathcal{F}(t_{n+1}, X_{n+1}).$$

Contrairement à Euler Explicite, il est beaucoup moins clair ici qu'il soit possible de mettre cet algorithme sous forme itérative (3.2). Si on note par \mathcal{I} la fonction identité de \mathbb{R}^d , on peut

réécrire cet algorithme comme suit :

$$\left(\mathcal{I} - \Delta t \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathcal{I})\right)(X_{n+1}) = X_N.$$

Lorsque Δt est assez petit (par rapport à la constante de Lipschitz de \mathcal{F}), la fonction apparaissant à gauche de cette équation devient inversible et on peut alors écrire Euler-Implicite sous forme itérative avec :

$$\mathfrak{A}[n, \Delta t, \mathcal{F}](X) = \left(\mathcal{I} - \Delta t \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathcal{I})\right)^{-1}(X).$$

Schémas explicites et implicite

Ces deux schémas sont très simples mais suffisamment riches pour expliquer les principaux concepts et difficultés de l'analyse numérique.

Concernant Euler-Explicite, comme nous le verrons par la suite, ce schéma pose des problèmes de stabilité lorsque le pas de temps est trop important : l'algorithme cesse d'être une bonne approximation de la dynamique car il accumule trop d'erreurs et les amplifie exponentiellement. Il prend alors des valeurs absurde. Il faut faire des petits pas de temps Δt pour être sûr que l'algorithme renvoie des valeurs exploitables.

Euler-Implicite est un schéma beaucoup plus stable. En revanche, comme son nom l'indique, c'est un schéma *implicite*. C'est-à-dire que pour pouvoir l'écrire sous forme itérative (3.2), il est nécessaire de faire le calcul d'une inversion de fonction. De manière générale, les schémas implicites sont plus stables que explicites mais posent la difficulté supplémentaire de devoir résoudre de problème d'inversion (nous y reviendrons dans la section 3.3 consacrée à l'implémentation).

3.1.3 Erreur de Consistance et Stabilité

Pour pouvoir apprécier la qualité d'un schéma numérique, nous devons étudier en particulier sa précision, c'est-à-dire la différence entre ce schéma et la solution exacte.

Erreur de consistance

Le première erreur que nous pouvons estimer est l'erreur de troncature locale, c'est-à-dire l'erreur que commet à chaque itération de l'algorithme. On va pour cela faire de nouveau usage de la notation "flot" introduite à la définition 2.5 :

DÉFINITION 3.3 Erreur de troncature locale et erreur de consistance (‡)

On définit l'*erreur de troncature locale* à l'étape $n + 1$, notée η^{n+1} , comme étant l'erreur commise par l'algorithme entre les instants t_n et t_{n+1} (pour le calcul de X_{n+1}) par rapport à la résolution exacte de l'équation différentielle sur $[t_n, t_{n+1}]$ avec X_n comme donnée initiale. Autrement dit,

$$\eta_{n+1} := |X_{n+1} - \mathcal{S}^{t_{n+1}, t_n} X_n|.$$

On définit l'*erreur de consistance* du schéma comme étant la somme des erreurs de troncature locale :

$$\eta := \sum_{n=1}^N \eta_n.$$

DÉFINITION 3.4 Erreur totale (†)

On appelle *erreur totale* la différence en norme L^∞ entre la solution exacte et l'approximation numérique :

$$\text{Err} := \sup_{n=1, \dots, N} |X(t_n) - X_n|.$$

Remarque : L'erreur de consistance n'est pas l'erreur totale qui est la différence entre la solution exacte et la solution numérique. En effet, lorsqu'on calcule l'erreur de troncature locale, on regarde le flot à partir du point X_n (qui est déjà une approximation) alors que dans la formule ci-dessus on considère le flot total depuis l'origine. Il y a donc des erreurs qui s'accumulent au fur-et-à-mesure de l'exécution de l'algorithme de résolution numérique *qui ne seront pas prise en compte* lors du calcul de l'erreur de consistance !

Stabilité d'un schéma numérique

L'erreur de consistance est en pratique assez facile à estimer grâce à un développement limité sur $[t_n, t_{n+1}]$. Pour faire le lien avec l'erreur totale, il faut comprendre comment se propagent les erreurs lors de l'itération du schéma numérique. Cette question est très liée à celle de stabilité numérique :

DÉFINITION 3.5 Stabilité numérique (†)

Une méthode numérique associée à une fonction algorithmique \mathfrak{A} est dite *stable* en X_0 s'il existe une constante $S > 0$ (qui ne dépend que du temps final T) telle que pour toute suite (X_n) et (Y_n) vérifiant $X_0 = Y_0$ et

$$\begin{cases} X_{n+1} = \mathfrak{A}(X_n), \\ Y_{n+1} = \mathfrak{A}(Y_n) + \delta_n, \end{cases}$$

pour une suite de vecteurs δ_n de norme inférieure à 1, on ait :

$$\sup_{n=1, \dots, N} |Y_n - X_n| \leq S \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} |\delta_n|.$$

Dans la définition, il faut voir les vecteurs δ_n comme étant des petites erreurs faites au cours de l'algorithme et on compare la solution perturbée avec la résolution algorithmique sans les perturbations. Il faut comprendre la stabilité au sens suivant : il y a stabilité lorsque l'algorithme n'amplifie pas exponentiellement les erreurs lors de son exécution.

La notion de stabilité pour les schémas numérique est proche de la notion de stabilité pour les équations différentielles telle que travaillée au Chapitre 2 : dans les deux cas il s'agit de vérifier qu'une petite perturbation ne vas pas s'amplifier au cours du temps. Cette notion de stabilité dépend *a priori* du champ de vitesse \mathcal{F} de l'équation sur laquelle on travaille.

Dans le cadre de la stabilité, c'est-à-dire lorsque le schéma n'amplifie pas les erreurs au cours de l'algorithme, on peut comparer l'erreur de consistance et l'erreur totale. Nous admettrons le théorème suivant **valable uniquement pour les méthodes à 1 pas** :

THÉORÈME 3.1 Théorème de convergence numérique (‡)

Si un schéma numérique à *un pas* est stable alors l'erreur de consistance est du même ordre de grandeur que l'erreur totale :

$$\eta \simeq \text{Err}, \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0^+.$$

Le corollaire immédiat étant que si le schéma est à la fois stable et consistant, c'est-à-dire si l'erreur de consistance η tend vers 0 lorsque $\Delta t \rightarrow 0^+$, alors le schéma est **convergent** (l'erreur totale tend vers 0).

Ce théorème a de nombreux avatars et car il a été obtenu par de nombreuses personnes différentes plus ou moins indépendamment et très souvent amélioré, raffiné, reformulé... On cite généralement le nom de Augustin-Louis Cauchy puisque c'est lui qui a démontré la première version de ce théorème en 1824, dans la suite de ses travaux sur le théorème d'existence et d'unicité.

Schémas à 1 pas : Toutes les méthodes numériques étudiées dans la suite sont des méthodes à 1 pas sauf les toutes dernières (Méthodes de Adams-Bashforth). Dans le cas du multi-pas, on a toujours la convergence mais l'erreur totale peut avoir un ordre de convergence plus faible (voir l'exercice sur Störmer-Verlet).

Condition de Courant–Friedrichs–Lewy

Dans de nombreuses situations, démontrer la propriété de stabilité n'est pas aisé. On a recours alors à une condition plus faible qui est la notion de *stabilité linéaire*.

DÉFINITION 3.6 Stabilité numérique linéaire (ou A -stabilité) (†)

On se donne un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ fixé et un schéma d'intégration \mathfrak{A} .

(i) Le **domaine de stabilité linéaire** ou de **A -stabilité** est l'ensemble des matrices A pour lesquelles le schéma numérique intègre le système linéaire $\dot{X} = (A/\Delta t)X$ en donnant uniquement des suites (X_n) bornées lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(ii) Ce schéma \mathfrak{A} est dit **linéairement stable** ou bien **A -stable** ssi le domaine de stabilité contient toutes les matrices diagonalisables dont les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle.

Autrement-dit, on a A -stabilité dès que le domaine de stabilité contient l'ensemble des matrices vérifiant le théorème de stabilité linéaire (Théorème 2.6), c'est-à-dire que si la solution est bornée alors le schéma donne des solutions bornées. Le domaine de A -stabilité est une notion qui permet de bien décrire les endroits où on perd de la stabilité. **Important :** dans la quasi-totalité des cas, ce domaine de dépend pas de Δt !

L'intérêt de la notion de A -stabilité est qu'elle est beaucoup plus facile à étudier que la définition générale de la stabilité. Comme la plupart des schémas sont eux-mêmes linéaires, on peut étudier la A -stabilité du schéma en se ramenant à l'étude d'un problème algébrique.

Dans un certain nombre de cas, surtout si le schéma est explicite, la A -stabilité n'est pas forcément assurée et si Δt est trop large on observe des phénomènes de croissance exponentielle de l'erreur accumulée. Il faut alors imposer sur Δt une condition que l'on appelle **Condition de Courant–Friedrichs–Lewy** (abrégé en “*condition CFL*”). La condition CFL permet de nous assurer que nous intégrons l'équation à l'intérieur du domaine de A -stabilité.

THÉORÈME 3.2 Condition de Courant–Friedrichs–Lewy (†)

On se donne un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un schéma d'intégration. On note $\lambda_{\mathcal{F}}$ la constante de Lipschitz de \mathcal{F} en espace et en temps :

$$\lambda_{\mathcal{F}} := \sup_{t \neq s \geq 0} \sup_{X \neq Y} \frac{|\mathcal{F}(t, X) - \mathcal{F}(s, Y)|}{|X - Y|}.$$

Si la matrice $-(\lambda_{\mathcal{F}} \Delta t)I_d$ appartient au domaine de A -stabilité pour ce pas de temps Δt alors le schéma est stable.

La régularité Lipschitz est relié au fait que la fonction \mathcal{F} ne se comporte pas plus mal qu'une fonction linéaire (au moins localement). L'idée de ce résultat consiste à estimer le comportement de \mathcal{F} à l'aide des fonctions linéaires de norme λ et d'en déduire une estimation du comportement de la solution elle-même (grâce au travail des 2 chapitres précédents) mais aussi du comportement du schéma numérique.

En pratique : Si la fonction \mathcal{F} est \mathcal{C}^1 alors $\lambda_{\mathcal{F}}$ est tout simplement égal à la norme infinie du gradient de \mathcal{F} . La seule difficulté consiste à étudier le domaine de A -stabilité du schéma. Les limites du domaine de A -stabilité sont souvent atteintes par les matrices μI_d avec $\mu < 0$ (particulièrement si le schéma est isotrope). Il est donc utile d'étudier la A -stabilité avec ces matrices prioritairement pour obtenir une première inégalité pour Δt . Dans le cas où le schéma est A -stable, on en déduit la *stabilité inconditionnelle* du schéma.

3.2 Discrétisations d'ordre plus élevé

3.2.1 Ordre de convergence d'un schéma

Une fois analysé la stabilité d'un schéma, on souhaite montrer qu'il est convergent en montrant que son erreur de consistance tend vers 0. Celle-ci s'étudie à l'aide de développements limités sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ par rapport au petit paramètre $\Delta t > 0$. Cependant, tous les schémas ne convergent pas à la même vitesse lorsque $\Delta t \rightarrow 0^+$. Pour les classifier, on définit la notion d'ordre de convergence du schéma :

DÉFINITION 3.7 Ordre de consistance d'un schéma (†)

L'*ordre de convergence* d'un schéma numérique est l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'erreur totale est comparable avec Δt^k :

$$Err \simeq \Delta t^k, \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0^+.$$

Les constantes multiplicatives qui apparaissent dans la définition du symbole \simeq (on rappelle la définition 0.13) sont pas trop grandes et en pratique on observe un grande proximité de comportement entre l'erreur totale et Δt^k même pour des pas de temps assez grand. Dans le cas où le théorème de convergence numérique s'applique, l'ordre de convergence est égale à l'ordre de consistance. Pour simplifier on peut interpréter la notion d'ordre comme suit :

- **Ordre 1** : si je divise Δt par 10, je divise l'erreur par 10^1 (je gagne **1** décimale).
- **Ordre 2** : si je divise Δt par 10, je divise l'erreur par 10^2 (je gagne **2** décimales).
- **Ordre 3** : si je divise Δt par 10, je divise l'erreur par 10^3 (je gagne **3** décimales).
- etc...

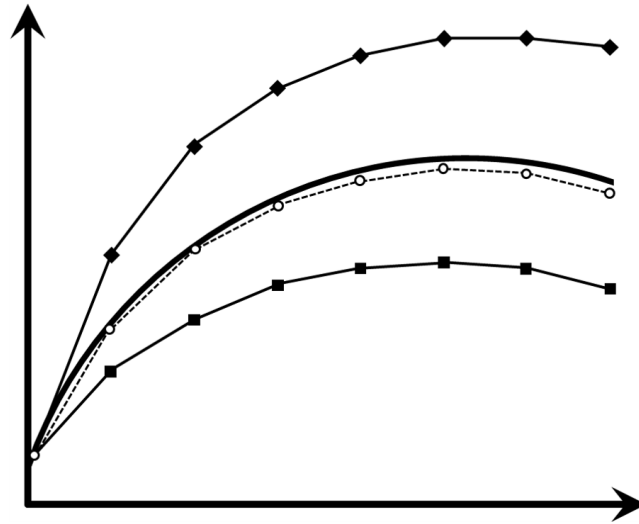


FIGURE 3.1 – Comparaison du schéma de Euler-Explicite (sur les losanges), Euler Implicite (sur les carrés) et Crank-Nicolson (en pointillés) avec la solution exacte (en gras)

On peut à présent énoncer le théorème relatif à la convergence de la méthode de Euler explicite ou implicite :

PROPOSITION 3.1 Ordre de convergence pour les schémas de Euler (†)

- (i) Le schéma de Euler Explicite est stable sous condition CFL et son ordre vaut 1.
- (ii) Le schéma de Euler Implicite est stable sans condition et son ordre vaut 1.

La démonstration de ce théorème est proposée comme exercice à la fin de ce chapitre.

3.2.2 Crank-Nicolson et Point-Milieu implicite

L'objectif de cette section est de reprendre les méthodes de Euler pour les améliorer et ainsi obtenir deux méthodes d'ordre 2 (la méthode de Crank-Nicolson et celle du point-milieu) qui vont avoir de bien meilleures propriétés de convergence.

Méthode de Crank-Nicolson

L'une des grands défauts de la méthode de Euler-Explicite est qu'elle sous-estime systématiquement la courbure de la solution exacte et donc tend significativement à s'en éloigner (d'où une convergence lente à l'ordre 1). La méthode de Euler Implicite, au contraire, va sur-estimer la courbure et s'éloigner de la courbe exacte mais dans la direction contraire (voir Figure 3.1 pour une illustration). Si on fait le développement limité à l'ordre 2 pour estimer l'erreur de troncature locale, on obtient effectivement une erreur liée à un terme de courbure de la trajectoire $t \mapsto X(t)$:

- *Euler explicite* :

$$X_1 - \mathcal{S}^{t_1} X_0 = X_0 + \Delta t \mathcal{F}(t_0, X_0) - \left(X_0 + \int_0^{\Delta t} \mathcal{F}(s, X(s)) ds \right) = -\Delta t^2 \ddot{X}(t_0) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

- *Euler implicite* :

$$X_{n+1} - \mathcal{S}^{t_1} X_0 = X_0 + \Delta t \mathcal{F}(t_1, X_1) - \left(X_0 + \int_0^{\Delta t} \mathcal{F}(s, X(s)) ds \right) = \Delta t^2 \ddot{X}(t_0) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

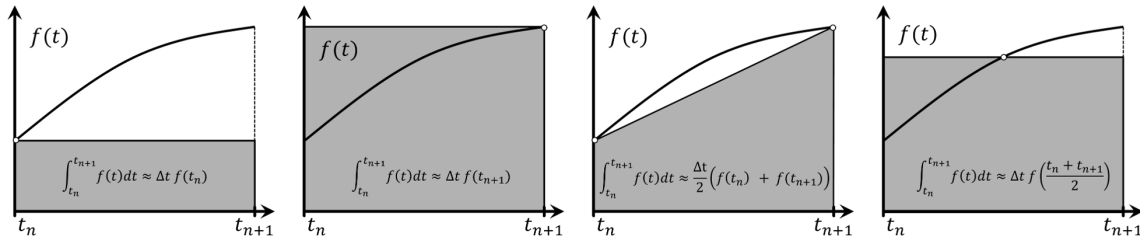


FIGURE 3.2 – Les 4 approximations d’intégrales les plus importantes (de gauche à droite) : Approximation de Riemann à gauche, Approximation de Riemann à droite, Méthode des trapèzes (ou interpolation linéaire), Méthode du point-milieu.

On constate que le terme d’erreur d’ordre 2 est le même au signe près. Il est naturel de vouloir faire disparaître ce terme d’ordre 2 en faisant la moyenne de deux schémas :

DÉFINITION 3.8 Schéma de Crank-Nicolson (‡)

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d’itérations N . On appelle méthode (ou schéma) de **Crank-Nicolson** l’algorithme itératif suivant :

$$X_{n+1} := X_n + \Delta t \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}(t_n, X_n) + \mathcal{F}(t_{n+1}, X_{n+1}) \right).$$

PROPOSITION 3.2 Ordre de convergence pour le schéma de Crank-Nicolson (‡)

Le schéma de Crank-Nicolson est stable sans condition et son ordre vaut 2.

Méthode du point-milieu implicite

Pour appréhender la seconde méthode présentée dans ce paragraphe, il nous faut faire le lien entre la discrétisation des EDO et l’approximation numérique des intégrales (voir Figure 3.2). En effet, on réécrit l’EDO à l’aide de la formule de Duhamel sous la forme d’un calcul intégral :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{F}(t, X(t)) dt.$$

On peut donc obtenir des méthode pour la résolution numérique d’une l’EDO simplement en utilisant une méthode d’approximation numérique de l’intégrale de Duhamel :

- L’intégration de *Riemann à gauche* donne le schéma de *Euler-Explicite*.
- L’intégration de *Riemann à droite* donne le schéma de *Euler-Implicite*.
- L’intégration par *Méthode des trapèzes* donne le schéma de *Crank-Nicolson*.
- L’intégration par *Méthode du point-milieu* va donner le schéma du *point-milieu implicite* :

$$X_{n+1} := X_n + \Delta t \mathcal{F} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, X_{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.4)$$

Malheureusement en l’état actuel cette équation n’est pas utilisable car le terme $X_{n+\frac{1}{2}}$ n’est pas bien défini. Comme la valeur de X au temps $t = t_n + \Delta t/2$ n’est par connue, il faut remplacer $X_{n+\frac{1}{2}}$ par une approximation qui fasse intervenir X_n et X_{n+1} . Le plus naturel est de prendre la moyenne entre les deux :

DÉFINITION 3.9 Schéma du point-milieu implicite

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthode (ou schéma) du *point-milieu implicite* l'algorithme itératif suivant :

$$X_{n+1} := X_n + \Delta t \mathcal{F} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \right).$$

PROPOSITION 3.3 Ordre de convergence pour le schéma du point milieu implicite

Le schéma du point-milieu implicite est stable sans condition et son ordre vaut 2.

Dans la pratique : Ce schéma n'est pas utilisé car il est compliqué à mettre en place, L'inversion de la partie implicite est plus délicat et cette méthode aussi long en temps de calcul que la méthode de Crank-Nicolson quoique souvent un peu moins précise... Ce qui est intéressant en revanche réside dans la formule (3.4) : si on a une meilleure approximation de $X_{n+\frac{1}{2}}$ alors on obtient un schéma avec de bonnes propriétés.

3.2.3 Point-Milieu explicite et Méthode de Heun**Point-Milieu explicite**

Une solution pour estimer $X_{n+\frac{1}{2}}$ consiste à faire une prédiction $\tilde{X}_{n+\frac{1}{2}}$ de sa valeur possible à l'aide d'un schéma numérique simple et de préférence explicite. C'est le principe des schémas par *prédiction-correction* (on parle aussi d'une *explicitation approchée*). Dans notre cas, on va expliciter $X_{n+\frac{1}{2}}$ en remplaçant ce terme par l'approximation de *Euler explicite* :

DÉFINITION 3.10 Schéma du point-milieu explicite

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthode (ou schéma) du *point-milieu explicite* l'algorithme itératif suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n+\frac{1}{2}} &:= X_n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}(t_n, X_n), \\ X_{n+1} &:= X_n + \Delta t \mathcal{F} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{X}_{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Comme il s'agit d'un schéma explicite, on retrouve sans surprise des effets d'instabilité lorsque Δt est petit :

PROPOSITION 3.4 Ordre de convergence pour le schéma du point milieu explicite

Le schéma du point-milieu explicite est stable sous condition CFL et son ordre vaut 2.

Ce schéma est plus rapide que Crank-Nicolson tout en ayant une précision comparable, mais il est moins stable.

Méthode de Heun

La méthode de Heun réside dans la même démarche de *prédiction-correction* mais appliquée à la méthode Crank-Nicolson pour faire une *explicitation approchée*. On va approcher le X_{n+1}

apparaissant dans Crank-Nicolson en faisant un pas de Euler Explicite :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n+1} &:= X_n + \Delta t \mathcal{F}(t_n, X_n), \\ X_{n+1} &:= X_n + \Delta t \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}(t_n, X_n) + \mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{X}_{n+1}) \right).\end{aligned}$$

Afin de diminuer le nombre d'appel à la fonction \mathcal{F} (ce qui peut être coûteux en temps de calcul) on peut reformuler cet algorithme de la manière suivante :

DÉFINITION 3.11 Méthode de Heun (‡)

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthode de **Heun** l'algorithme itératif suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n+1} &:= X_n + \Delta t \mathcal{F}(t_n, X_n), \\ \hat{X}_{n+1} &:= X_n + \Delta t \mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{X}_{n+1}), \\ X_{n+1} &:= \frac{1}{2} (\tilde{X}_{n+1} + \hat{X}_{n+1}).\end{aligned}$$

La première étape s'appelle l'*étape de prédiction* et la seconde l'*étape de correction*. La deuxième étape vient corriger la première qui a fait une erreur à cause du terme de courbure. Comme la plupart des schémas explicites, la méthode de Heun a un domaine d'instabilité lorsque Δt est trop grand. En pratique le domaine de stabilité s'avère être assez grand, le temps de calcul plus faible que Crank-Nicolson (surtout si la fonction \mathcal{F} est coûteuse à calculer) et la précision est assez comparable.

PROPOSITION 3.5 Ordre de convergence pour la méthode de Heun (‡)

La méthode de Heun est stable sous condition CFL et son ordre vaut 2.

3.2.4 Méthodes de Runge-Kutta

Principe général

Le principe des méthodes de Runge-Kutta consiste à formuler dans un cadre général le principe de *prédiction-corrrection* présenté précédemment. Nous allons donc introduire des points intermédiaires de calculs en temps $t_{n,i}$ ainsi que des valeurs intermédiaires de prédictions $X_{n,i}$ avec $i = 1, \dots, q$. Ces temps $t_{n,i}$ sont caractérisés par un nombre $c_i \in [0, 1]$ qui est une donnée de la méthode et on écrit

$$t_{n,i} := t_n + c_i \Delta t.$$

Pour chaque point intermédiaire $(t_{n,i}, X_{n,i})$ on évalue le champ de vitesse en utilisant l'équation

$$p_{n,i} = \mathcal{F}(t_{n,i}, X_{n,i}).$$

Si on considère une solution exacte $t \mapsto X(t)$, on a

$$X(t_{n,i}) = X(t_n) + \Delta t \int_0^{c_i} \mathcal{F}(t_n + u\Delta t, X(t_n + u\Delta t)) du,$$

On fait ici une approximation de cette intégrale à l'aide de méthodes d'approximation : la valeur de la fonction intégrée est connue seulement aux points c_i . On fait cette quadrature pour

$g(u) := \mathcal{F}(t_n + u\Delta t, X(t_n + u\Delta t)) :$

$$\int_0^{c_i} g(u) du \approx \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} g(c_k), = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p_{n,k}$$

La valeurs des coefficients a_{ik} va dépendre du choix de la quadrature retenue. Pour avoir des méthodes de discrétisation des EDO d'ordre élevé, il faut choisir des quadratures d'intégrales d'ordre élevé. On effectue également une quadrature pour le calcul de toute l'intégrale :

$$\int_0^1 g(u) du \approx \sum_{k=1}^q b_k g(c_k) = \sum_{k=1}^q b_k p_{n,k}.$$

DÉFINITION 3.12 Méthode de Runge-Kutta générale (†)

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthodes de **Runge-Kutta** à q étapes la famille d'algorithmes itératifs suivant :

Pour i allant de 1 à q :

$$t_{n,i} := t_n + c_i \Delta t, \quad X_{n,i} := X_n + \Delta t \sum_{k=1}^q a_{ik} p_{n,k}, \quad p_{n,i} := \mathcal{F}(t_{n,i}, X_{n,i}).$$

Ensuite on calcule : $X_{n+1} = X_n + \Delta t \sum_{k=1}^q b_k p_{n,k}$.

Afin d'y voir plus clair, les différents coefficients c_i , a_{ik} et b_k sont rangés dans une matrice appelé **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c}
 C & A \\
 \hline
 & B
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c|cccccc}
 c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & & & \\
 c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \\
 c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & \ddots & & \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\
 c_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q-1} & a_{q,q} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{q-1} & b_q
 \end{array}
 \quad (3.5)$$

PROPOSITION 3.6 Méthode de Runge-Kutta explicite

Une méthode de Runge-Kutta est explicite ssi la matrice A du tableau de Butcher associé est triangulaire inférieure stricte.

Par convention les cases vides d'un tableau de Butcher correspondent à la valeur 0. En règle générale on travaille avec des méthodes de Runge-Kutta explicite puisque le but de ces méthodes de prédicteur-correcteur est de modifier des méthodes implicites pour les rendre explicites avec une précision comparable.

THÉORÈME 3.3 Convergence pour Runge-Kutta (†)

Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables sous CFL et sont convergentes ssi

$$\sum_{k=1}^q b_k = 1.$$

Remarque 1 : Les méthodes de Euler Explicite et Implicite rentrent dans la (petite) famille des méthodes de Runge-Kutta à 1 étape. Leur tableau de Butcher respectif est

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Remarque 2 : Le plus grand ordre de convergence possible pour une méthode de Runge-Kutta explicite à q étapes est q lorsque les coefficients sont bien ajustés (à l'aide d'une bonne méthode de quadrature d'intégrale). Dans le cas des méthodes de Runge-Kutta implicites à q étapes, il existe des méthode d'ordre plus élevé que q .

Runge-Kutta 2

Les méthodes de Runge-Kutta 2 explicites d'ordre 2 sont entièrement paramétrées par un unique paramètre $\alpha \in [0, 1]$ et le tableau de Butcher correspondant s'écrit

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \frac{2\alpha-1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

PROPOSITION 3.7 Méthode de Runge-Kutta 2 explicite (†)

Les méthodes de Runge-Kutta 2 associées à ce tableau de Butcher sont les seules méthodes de Runge-Kutta explicites à 2 étapes dont l'ordre de consistance vaut 2.

La démonstration de cette proposition se fait à l'aide d'un développement limité sur le terme d'erreur de troncature locale.

- Lorsque $\alpha = 1/2$, on retrouve la *méthode du point-milieu explicite*.
- Lorsque $\alpha = 1$ on retrouve la *méthode de Heun* (pour cette raison, la méthode de Heun est souvent simplement appelée *Runge-Kutta 2* sans plus de précision).
- Lorsque $\alpha = 2/3$ la méthode obtenue s'appelle la *méthode de Ralston*. C'est une méthode intermédiaire entre les deux précédentes et se révèle souvent légèrement plus précise car elle minimise (pour le paramètre α) l'erreur de troncature locale moyenne.

Si on regarde les méthodes de Runge-Kutta 2 implicite, on retrouve la méthode de *Crank-Nicolson* avec le tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Dans le cas implicite, on peut construire des méthodes de Runge-Kutta à 2 étapes mais d'ordre plus élevé que 2. C'est le cas par exemple de la méthode de Crouziex 2 (qui est d'ordre 3) :

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Runge-Kutta 3

Dans le cas des méthodes de Runge-Kutta explicites à 3 étapes, celles-ci s'écrivent à l'aide d'un tableau de Butcher qui prend la forme générale suivante ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \alpha & \alpha & & \\ \beta + \gamma & \beta & \gamma & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Comme précédemment, on estime l'erreur de troncature locale avec des développements limités :

PROPOSITION 3.8 Méthode de Runge-Kutta 3 explicite

Les méthodes de Runge-Kutta 3 explicites, associées à ce tableau de Butcher, sont consistantes d'ordre 3 ssi

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad b_2\alpha + b_3(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}, \quad b_2\alpha^2 + b_3(\beta + \gamma)^2 = \frac{1}{3}, \quad b_3\alpha\gamma = \frac{1}{6}.$$

Le fait qu'il s'agisse d'un système de 4 équations polynomiales de degré 2 avec 6 inconnues rend l'exploration de l'ensemble des possibilités assez complexe. On présente ici quelques tableaux de Butcher classiques pour l'explicite d'ordre 3.

<p>Heun d'ordre 3 :</p> $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$	<p>Ralston d'ordre 3 :</p> $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{array}$	<p>RK3 fortement stable :</p> $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array}$
<p>Kutta d'ordre 3 :</p> $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$	<p>Van der Houwen-Wray d'ordre 3 :</p> $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ 8/15 & 8/15 & & \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$	

Runge-Kutta 4

Il existe de nombreuses méthodes pour Runge-Kutta à 4 étapes. Cependant, lorsqu'on parle de **Runge-Kutta 4**, on fait le plus souvent référence à une méthode très classique qui est celle associée au tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Voici une autre méthode de Runge-Kutta à 4 étapes appelée la *régle des 3 huitièmes* :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

3.2.5 Méthodes de Adams-Bashforth

Les méthodes de Runge-Kutta présentées précédemment appartiennent à la catégories des méthodes à 1 (et ce malgré la présence de pas de prédiction-correction) car ces méthodes n'exploitent que la position X_n (avec l'équation) pour déduire la position X_{n+1} . L'idée des **méthodes à pas multiples** consistent à exploiter l'information donnée par X_n, X_{n-1}, X_{n-2} , etc... En règle générale, les méthodes à pas multiples sont moins précises que les méthodes de Runge-Kutta (si on compare au même ordre) mais elles sont en revanche plus rapides en temps de calcul. Dans cette section, on va présenter le principe des pas multiples sur les méthodes les plus classiques à savoir Adams-Bashforth. Ces méthodes ne sont pas toujours très stables et nécessitent parfois des pas de temps Δt assez petits.

Pour construire les méthodes à pas multiples d'ordre k , on commence par écrire la formule de Duhamel :

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{F}(t, X(t)) dt.$$

On va alors approcher la fonction sous l'intégrale à l'aide des valeurs de cette fonction aux instants $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k+1}$. Ces valeurs sont connues de manière approchée respectivement par les valeurs $\mathcal{F}(t_n, X_n), \mathcal{F}(t_{n-1}, X_{n-1}), \dots, \mathcal{F}(t_{n-k}, X_{n-k+1})$. La **méthode d'Adams-Bashforth** d'ordre k consiste à approcher l'intégrale étudiée en faisant une interpolation de Lagrange sur ces temps $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k+1}$. On obtient formellement

$$\mathcal{F}(t, X(t)) \approx \sum_{j=0}^{k-1} F_{n-j} L_{n,j,k}(t),$$

où $F_j = \mathcal{F}(t_j, X_j)$ et où le polynôme de Lagrange unitaire est donné par la célèbre formule

$$L_{n,j,k}(t) := \prod_{\substack{\ell=0 \\ j \neq \ell}}^{k-1} \frac{t - t_{n-\ell}}{t_{n-j} - t_{n-\ell}}.$$

Si on injecte cette approximation dans la formule de Duhamel on obtient :

DÉFINITION 3.13 Méthodes d'Adams-Bashforth (†)

On considère un problème de Cauchy (3.1), un pas de temps $\Delta t > 0$ et un nombre d'itérations N . On appelle méthodes d'**Adams-Bashforth** à k étapes l'algorithme itératif explicite suivant :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} F_{n-j} b_{j,k},$$

$$F_{n+1} = \mathcal{F}(t_{n+1}, X_{n+1}),$$

avec : $b_{j,k} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,j,k}(t) dt$ les coefficients d'Adams-Bashforth.

On peut en effet démontrer aisément que les coefficients d'Adams-Bashforth ainsi définis ne dépendent pas de n ni de Δt . Chacune de leur valeur est un nombre universel fixé. Les valeurs de ces nombres sont résumés dans le *tableau d'Adams-Bashforth* (ne pas confondre avec Butcher). Les coefficients s'écrivent tous sous la forme $b_{j,k} = \beta_{j,k}/a_k$ où les a_k et les $\beta_{j,k}$ sont les entiers :

k	$\beta_{0,k}$	$\beta_{1,k}$	$\beta_{2,k}$	$\beta_{3,k}$	$\beta_{4,k}$	a_k
1	1					1
2	3	-1				2
3	23	-16	5			12
4	55	-59	37	-9		24
5	1901	-2774	2616	-1274	251	720

On peut vérifier aisément que l'Algorithme d'Admas-Bashforth n'évalue la fonction \mathcal{F} qu'une seule fois par pas de temps. C'est donc une bonne méthode, malgré sa faible stabilité, si le calcul de \mathcal{F} est lent (par exemple parce qu'il provient d'un maillage de discrétisation spatiale très fine pour un problème d'EDP).

THÉORÈME 3.4 Méthodes d'Adams-Bashforth

Le schéma d'Adams-Bashforth à k pas est stable sous conditions et consistant d'ordre k .

Remarque : concernant l'étude de la stabilité, la démonstration ne s'appuie pas sur le théorème de Courant–Friedrichs–Lewy (théorème 3.2) puisqu'il n'est valable que pour les schémas à 1 pas. Ce théorème se démontre avec des arguments analogues avec l'aide d'une autre notion de stabilité appelée la *zéro*-stabilité.

3.2.6 Liste d'autres méthodes numériques

Voici une liste non-exhaustive d'autres méthodes numériques. Chacune d'entre-elle a différents avantages ou inconvénients, certaines étant spécifiques à des structures d'équations particulières (notamment au cas hamiltonien) :

- Méthode de Euler semi-implicite
- Euler exponentiel et intégrateurs exponentiels
- Méthode de Newmark- β
- Algorithme de Beeman
- Méthodes saute-moutons
- Méthodes à pas de temps adaptatif
- Méthodes de Runge-Kutta adaptatives
- Méthodes de Verlet et Störmer-Verlet
- Méthode de Adams-Moulton
- Méthode de Gauss-Legendre
- Backward differentiation formula
- Algorithmes de Yoshida
- etc...

3.3 Implémentation informatique

Dans cette section on présente les bases de l'implémentation informatique des méthodes d'analyse numérique afin de pouvoir s'en servir dans le cadre des séances de travaux pratiques d'informatique consacrées à l'analyse numérique des EDO mais aussi pour la réalisation des différents projets.

3.3.1 Implémentation des méthodes explicites

Concernant l'implémentation informatique d'une méthode explicite, il n'y a pas de grandes difficultés : il suffit de faire une grande boucle `for`, d'exécuter l'algorithme présenté précédem-

ment et de stocker le résultat dans un tableau. Concernant le nombre d'itération, il est en général préférable de faire varier le pas de temps Δt et le temps final T et d'en déduire le nombre d'itérations N . On va illustrer ces différents codes avec l'exemple particulier de l'équation linéaire $\dot{x} = -3x + 2 \sin(9t)$ intégrée sur $[0, 1]$.

Méthode de Euler explicite

Sur un code en langage Python, l'implémentation de la méthode de Euler-Explicite présentée à la définition 3.2 s'écrit de la façon suivante :

```
from pylab import *          # Importation de la bibliotheque maths

dt=0.001                    # Le pas de temps
T=1.                        # Le temps final
N=int(ceil(T/dt))           # Le nombre d'iteration (entier)
dt=T/N                      # Petite correction pour avoir T=N*dt
x_0=1.                      # Donnee initiale

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# Initialisation de l'algorithme :
t=[0.]                      # La liste des temps
x=[x_0]                     # La liste des positions au cours du temps

# La methode de Euler-Explicite proprement dite :
for k in range(N):
    x_new=x[k]+dt*F(t[k],x[k]) # Nouvelle position par Euler explicite
    x.append(x_new)            # stockage des resultats
    t.append(t[k]+dt)

# trace le graphe de la solution obtenue :
plot(t,x,'.k')
```

La façon de programmer ci-dessus est dite *impérative*. C'est la manière de programmer la plus naturelle mais ce n'est pas la plus pratique. Voici une simple réécriture de l'implémentation de la méthode de Euler-Explicite avec une programmation *fonctionnelle* :

```
from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# La methode de Euler-Explicite dans une fonction :
def EulerExplicite(F,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
    for k in range(N):
        x.append(x[k]+dt*F(t[k],x[k]))
        t.append(t[k]+dt)
    return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue :
t,x=EulerExplicite(F,0.001,1.,1.)
plot(t,x,'.k')
```

La bibliothèque `PyLab` est très facile d'utilisation pour tracer des courbes simples. Si on souhaite faire des tracés plus complexes, la bibliothèque `Matplotlib` dispose de davantage d'options.

Remarque : Il est également possible de coder Euler-Explicite à l'aide d'une algorithmme utilisant une fonction auxiliaire récursive (une fonction qui s'appelle elle-même) au lieu d'une boucle `for`. Le temps de calcul est en général similaire mais la programmation de l'algorithme est plus hardue et source d'erreurs.

Méthode de Heun

Concernant la méthode Heun (définition 3.11), il n'y a pas de grands changements par rapport à Euler-Explicite. Il faut simplement rajouter le calcul du prédicteur `p` et du correcteur `c` à chaque itération :

```
from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# La methode de Heun dans une fonction :
def Heun(F,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
    for k in range(N):
        p=x[k]+dt*F(t[k],x[k])      #Calcul du predicteur
        c=x[k]+dt*F(t[k]+dt,p)     #Calcul du correcteur
        x.append(0.5*(p+c))        #Le pas avec correction
        t.append(t[k]+dt)
    return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue :
t,x=Heun(F,0.001,1.,1.)
plot(t,x,'.k')
```

Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre plus élevé s'implémentent de la même façon que la méthode de Heun. La seule différence est le nombre de correcteurs qui augmente avec l'ordre de la méthode. Par exemple, la méthode de Runge-Kutta 4 classique peut s'écrire de la manière suivante :

```
from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# La methode de Runge-Kutta 4:
def RK4(F,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
```

```

for k in range(N):
    k1 = F(t[k], x[k])
    k2 = F(t[k]+dt/2, x[k]+dt*k1/2)
    k3 = F(t[k]+dt/2, x[k]+dt*k2/2)
    k4 = F(t[k]+dt, x[k]+dt*k3)
    x.append(x[k] + dt*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6)
    t.append(t[k]+dt)
return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue :
t,x=RK4(F,0.001,1.,1.)
plot(t,x,'.k')

```

Méthode de Adams-Bashforth 2

Pour les méthodes à pas multiples comme Adams-Bashforth (Définition 3.13), il y a une subtilité supplémentaire concernant l'initialisation. En effet, comme on utilise les valeurs de $X_n, X_{n-1}, X_{n-1}, \dots$ pour calculer X_{n+1} , celles-ci ne sont pas bien définies pour les petites valeurs de n . Il faut donc faire les premiers pas avec une méthode explicite à un pas qui a le même *ordre de troncature locale* ou meilleur. Pour coder Adams-Bashforth 2, nous avons fait le premier pas avec la méthode de Heun :

```

from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# La methode de Heun :
def Heun(F,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
    for k in range(N):
        p=x[k]+dt*F(t[k],x[k]) #Calcul du predicteur
        c=x[k]+dt*F(t[k]+dt,p) #Calcul du correcteur
        x.append(0.5*(p+c)) #Le pas avec correction
        t.append(t[k]+dt)
    return t,x

# La methode de Adams-Bashforth 2 dans une autre fonction.
def AdamsBashforth2(F,dt=0.01,T=1., x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t,x=Heun(F,dt,dt,x_0) # le premier pas de l'algorithme se fait avec Heun
    for k in range(1,N):
        x.append(x[k]+dt*(3.*F(t[k],x[k])/2.-F(t[k-1],x[k-1])/2.))
        t.append(t[k]+dt)
    return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue avec Adams-Bashforth
t,x=AdamsBashforth2(F,0.001,1.,Heun(F,0.001,0.001,1.)[1])
plot(t,x,'.k')

```

3.3.2 Implémentation des méthodes implicites

Cas explicitement inversible

Pour les méthodes implicites il y a une difficulté liée au fait que pour obtenir X_{n+1} à partir de X_n , il y a une fonction à inverser. Dans le cas où cette inverse peut s'exprimer explicitement et de manière exacte à l'aide de calculs algébriques, il faut privilégier l'expression exacte. Cette situation se présente notamment dans le cas linéaire $\dot{X} = A(t)X$ avec A une matrice qui peut dépendre du temps. Euler implicite dans ce cas va s'écrire :

$$(I_d - \Delta t A(t_{n+1}))X_{n+1} = X_n.$$

Si on note $\lambda_{n+1} \geq 0$ le plus grand module de l'ensemble des valeurs propres de $A(t_{n+1})$, on sait que cette matrice est inversible dès que $\Delta t < \lambda_{n+1}$ et dans ce cas un simple pivot de Gauss permet d'avoir une expression explicite de l'inverse. Si la matrice est constante, il suffit de faire le pivot de Gauss une seule fois avant la simulation et ainsi gagner beaucoup de temps de calcul.

Si on fait les mêmes manipulations sur la méthode de Crank-Nicolson, on arrive à l'équation (inversible dès que $\Delta t < \lambda_{n+1}/2$) :

$$\left(I_d - \frac{\Delta t}{2}A(t_{n+1})\right)X_{n+1} = \left(I_d + \frac{\Delta t}{2}A(t_n)\right)X_n.$$

Méthode de Euler Implicite

Dans le cas où on ne peut pas inverser la partie implicite de manière algébrique simple et peu coûteuse, on résout le problème de façon approchée à l'aide d'un algorithme de recherche de racine, par exemple la méthode de Newton. Pour initialiser l'algorithme de recherche de racine, on fait un pas de Euler Explicite. Dans le cas de la méthode de Euler Implicite on obtient le code suivant (en utilisant les fonctions anonymes lambda) :

```
from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# Le calcul de sa dérivée (pour Newton) :
def dF(t,x):
    return -3

# l'algorithme de Newton prend en argument une fonction f, sa dérivée df,
# une donnée initiale a et une erreur maximale e
def Newton(f,df,a,e):
    delta = 1
    while delta > e:
        x = -f(a)/df(a) + a
        delta = abs(x - a)
        a = x
    return x

# Euler Implicite avec la méthode de Newton
def EulerImplicite(F,dF,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
    for k in range(N):
```

```

    f = lambda y : y-dt*F(t[k]+dt,y)-x[k]      # la fonction a inverser
    df = lambda z : 1-dt*dF(t[k]+dt,z)        # sa derivee
    x_init = x[k]+dt*F(t[k],x[k])             # initialise Newton
    x.append(Newton(f,df,x_init,1.e-12))      # un pas de Euler implicite
    t.append(t[k]+dt)
return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue :
t,x=EulerImplicite(F,dF,0.001,1.,1.)
plot(t,x,'.k')
```

Méthode de Crank-Nicolson

L'implémentation de la méthode de Crank-Nicolson est similaire à celle de Euler-Implicite. Seule la fonction à inverser est différente

```

from pylab import *

# Le choix du champ de vitesse F :
def F(t,x):
    return -3*x+2*sin(9*t)

# Le calcul de sa derivee (pour Newton) :
def dF(t,x):
    return -3

# l'algorithme de Newton prend en argument une fonction f, sa derivee df,
# une donnee initiale a et une erreur maximale e
def Newton(f,df,a,e):
    delta = 1
    while delta > e:
        x = -f(a)/df(a) + a
        delta = abs(x - a)
        a = x
    return x

# Crank-Nicolson avec la methode de Newton
def CrankNicolson(F,dF,dt=0.01,T=1.,x_0=0.):
    N=int(ceil(T/dt))
    dt=T/N
    t=[0.]
    x=[x_0]
    for k in range(N):
        f = lambda y : y-dt*F(t[k]+dt,y)/2-x[k]-dt*F(t[k],x[k])/2
        df = lambda z : 1-dt*dF(t[k]+dt,z)/2
        x_init = x[k]+dt*dt*F(t[k],x[k])
        x.append(Newton(f,df,x_init,1.e-12))
        t.append(t[k]+dt)
    return t,x

# trace le graphe de la solution obtenue :
t,x=CrankNicolson(F,dF,0.001,1.,1.)
plot(t,x,'.k')
```

3.3.3 Calculer l'ordre empirique d'un schéma

Une fois résolu numériquement une équation différentielle sur un intervalle de temps $[0, T]$ (où T est supposé être un multiple entier N de Δt) on peut étudier l'erreur empirique réalisée

par le schéma. On pourra alors calculer l'ordre de convergence empirique (pour le comparer à l'ordre théorique). Pour un schéma numérique donné, on notera $\mathfrak{S}^n[\Delta t]X_0$ le flot numérique associé. C'est-à-dire la solution numérique au temps $t = n\Delta t$ associée à la donnée initiale $X_0 \in \Omega$ pour le pas de temps Δt . On va le comparer au flot exact $\mathcal{S}^{n\Delta t}X_0$. L'erreur absolue du schéma pour le pas de temps Δt s'écrit :

$$\text{Err}[\Delta t, X_0] := \max_{n=1, \dots, N} \left| \mathfrak{S}^n[\Delta t]X_0 - \mathcal{S}^{n\Delta t}X_0 \right|. \quad (3.6)$$

Si on divise le pas de temps par 2, on s'attend à ce que l'erreur (sur le même intervalle de temps) soit divisée par 2^k ssi le schéma est d'ordre k . Autrement dit, formellement :

$$\text{Err}[\Delta t, X_0] \approx 2^k \text{Err}\left[\frac{\Delta t}{2}, X_0\right].$$

Il est donc naturel de définir l'ordre empirique de schéma pour la donnée initiale X_0 et pour le pas Δt avec le logarithme à base 2 de la façon suivante :

$$\text{Ord}[\Delta t, X_0] := \log_2 \left(\frac{\text{Err}[\Delta t, X_0]}{\text{Err}[\Delta t/2, X_0]} \right).$$

Important ! Pour la pratique : on calcule le logarithme en base 2 de l'ordre empirique pour $\Delta t, \Delta t/2, \Delta t/2^2, \Delta t/2^3, \dots$ et on trace le graphe ainsi obtenu (avec des axes de coordonnées munies d'échelles logarithmiques). On peut alors faire une régression linéaire et la pente de la droite obtenue est alors l'ordre empirique moyen du schéma pour la donnée initiale X_0 (on peut aussi faire des moyennes pour différentes conditions initiales). En python avec la bibliothèque `pylab`, on utilise la commande `loglog` pour avoir des graphiques avec des échelles logarithmiques sur les axes.

Remarque 1 : Si la solution exacte n'est pas connue mais seulement *presque connue*, c'est-à-dire calculée à l'aide d'une méthode d'ordre élevé (Runge-Kutta 4 par exemple) et des tout petits pas, on peut prendre cette fonction en guise de solution exacte dans (3.6).

Remarque 2 : Dans le cas où fabriquer une solution très proche de la solution exacte (avec un RK4 à petits pas) n'est pas possible pour des raisons de temps de calcul, une solution qui fonctionne *étonnamment bien* consiste à choisir $\mathfrak{S}^n[\Delta t/2]X_0$ comme solution *presque exacte* lors du calcul de $\text{Err}[\Delta t, X_0]$. Pour améliorer la précision de cette technique, il arrive qu'on décide de diviser le pas de temps par 10 à chaque étape au lieu de 2 (il faut alors travailler avec des *log* à base 10). L'avantage est qu'on peut voir directement la variation de l'erreur sur les décimales des quantités en sortie de l'algorithme. Les temps de calcul vont en revanche augmenter plus vite.

3.3.4 Choisir le bon schéma et le bon pas de temps

Choisir le bon schéma

Il n'existe pas de méthodologie générale pour bien choisir son schéma et il fait partie du métier d'ingénieur de bien connaître et s'appropriier un bon nombre de schémas numérique afin d'utiliser judicieusement celui qui est le plus adapté au problème étudié. Afin d'éclairer les choix de schémas à faire, voici un tableau récapitulant les idées principales qui guident ce choix

Problème :	Solutions classiques :
Je souhaite une solution très précise	Runge-Kutta 3 ou 4 et petits Δt
Je souhaite une solution rapidement	Méthode de Heun avec Δt moyens
J'ai des problèmes de stabilité	Impliciter le schéma
Je souhaite connaître le comportement en temps long	Schéma implicite et grand Δt
Les trajectoires ont une forte courbure	Méthode de Ralston d'ordre 2 ou 3
\mathcal{F} est longue à calculer	Adams-Bashforth d'ordre 2 ou 3
Je souhaite préserver le Hamiltonien	Störmer-Verlet ou Beeman
Mon champ de vitesse est "presque linéaire"	Intégrateur exponentiel
Variations brusques du champs de vitesse	Méthodes à pas de temps adaptatif
Variations brusques avec instabilités	Backward Differentiation Formula

etc...

Important : il s'agit d'un guide et non d'une vérité absolue ; il peut y avoir de nombreuses surprises quant au comportement d'un schéma particulier sur un problème particulier (et il n'y a pas de miracles non plus...). Le mieux reste quand même d'essayer de nombreuses méthodes différentes afin de les comparer. Voire dans certains cas, fabriquer sa propre méthode numérique adaptée au problème étudié : il faut savoir rester ouvert et inventif ;-)

Choisir le bon pas de temps

Choisir le bon pas de temps en revanche est beaucoup plus simple. L'objectif est de minimiser le temps de calcul de la machine étant donnée une précision voulue. La précision se calcule et s'estime à l'aide des outils de la section 3.3.3. Le temps écoulé se mesure en Python à l'aide de la bibliothèque `datetime`. Ajuster le pas de temps se fait de la manière suivante :

- On commence par faire une intégration très grossière (par exemple 2 pas de temps).
- On fait tourner l'algorithme avec le pas de temps $\Delta t/2$
 - Si le temps d'exécution du programme dépasse le temps maximal autorisé : on arrête l'algorithme en on renvoie Δt comme temps optimal.
 - Sinon on calcule l'erreur à l'aide de (3.6) en prenant la solution à $\Delta t/2$ comme solution "quasi-exacte".
- Si l'erreur est inférieur au seuil fixé, on a trouvé que Δt était le pas de temps optimal.
- Sinon on remplace Δt par $\Delta t/2$ en on recommence.

Il est bien-sûr possible d'être plus précis quand à la façon dont on ajuste le pas de temps.

Remarque importante ! Lorsque l'on évalue les mérites comparés des différents schémas numériques pour un problème donné, on les classe en général en fonction du temps que met chacun pour résoudre le problème. Pour classer les différents schémas en fonction de leur temps de calcul **il ne FAUT PAS prendre le même pas de temps Δt !**

- Il faut tout d'abord se **fixer une précision** $\varepsilon_0 > 0$,
- à partir de laquelle on déduit le pas de temps optimal **pour chaque schéma...**
- et ensuite on peut mesure le temps de calcul de la machine pour chaque schéma avec **son propre pas de temps optimal !**

Choisir la bonne précision

La question centrale réside donc davantage dans le choix de la bonne précision. C'est un problème d'ingénierie délicat pour lequel il n'y a pas vraiment de réponse générale. Il faut choisir au cas-par-cas en fonction de deux contraintes antagoniques :

- La fiabilité du résultat obtenu.
- Le temps de calcul nécessaire à la résolution.

Les ingénieurs débutant ont parfois tendance à faire des calculs trop longs pour une précision inutile et qui n'a pas toujours de sens physique. En effet, le cadre de la mécanique classique prévoit l'étude d'objets sur des échelles d'espace, de temps, de masses, de températures, de courant électrique (etc...) compris entre 10^{-6} et 10^6 en unité du système international. Voici un tableau utile pour savoir si notre précision reste pertinente dans le cadre de la mécanique classique :

Grandeur physique considérée	Valeur en unité SI	
Diamètre moyen de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental	$1.2 \times 10^{-10} \text{ m}$	
Distance de la terre au soleil au périhélie	$1.5 \times 10^{11} \text{ m}$	
Vitesse de la lumière dans le vide intersidéral	$3.0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	
Fréquence de transition atomique du Césium	$9.2 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$	etc...
Température de fusion nucléaire au centre du soleil	$1.5 \times 10^{10} \text{ K}$	
Énergie d'une liaison covalente entre 2 atomes d'hydrogène	$7.3 \times 10^{-19} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$	
Nombre d'Avogadro (lien entre l'échelle moléculaire et macro.)	6.0×10^{23}	
Moment magnétique d'un atome d'hydrogène	$9.3 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$	

Ce type de tableau est très utile pour détecter des algorithmes qui sont trop précis étant donné l'objet physique et les modèles considérés. Par exemple, si on étudie la déformation du pneu d'une voiture franchissant un trottoir, c'est inutile d'avoir un algorithme précis à $10^{-15} \text{ m}...$

3.4 Bilan du Chapitre et exercices

3.4.1 Ce qu'il faut retenir et savoir-faire

Ce dernier chapitre est consacré à présenter les principales idées fondamentales qui président à l'analyse numérique des EDO et à l'approximation des solutions à l'aide de programmes informatiques. Les principaux concepts à retenir et savoir-faire de ce chapitre sont les suivants :

- (‡) Les méthodes de Euler, Crank-Nicolson et Heun (formules, ordres, stabilité).
- (‡) Erreur de consistance, erreur totale et théorème de convergence numérique.
- (†) Stabilité numérique, A -stabilité et Condition CFL.
- (†) Ordre de consistance d'un schéma (définition).
 - Schéma du point-milieu explicite (formule, ordre, stabilité).
 - Les méthodes de Runge-Kutta (formules, ordres, stabilité).
 - Les méthodes de Adams-Bashforth (formules, ordres, stabilité).
 - Savoir implémenter les méthodes numériques sur ordinateur.
 - Savoir tracer les courbes d'ordre empirique d'une méthode.
 - Savoir choisir le bon schéma et le bon pas de temps.
 - Savoir classer les méthodes en fonction de leur temps de calcul empirique.

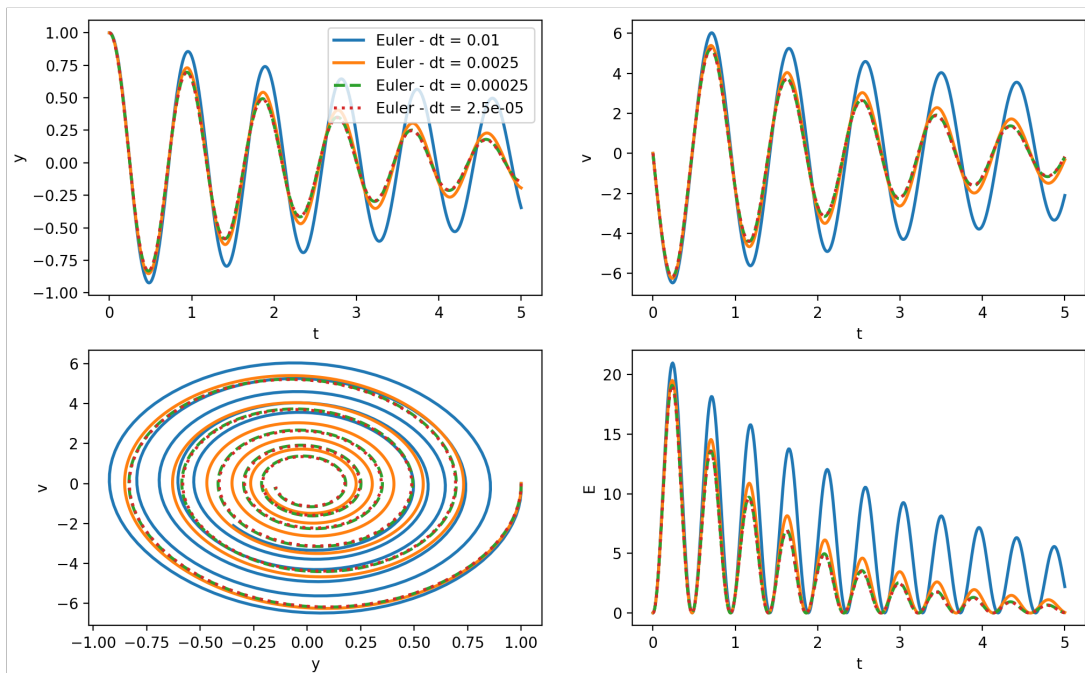


FIGURE 3.3 – Résolution numérique du problème du pendule simple avec Euler explicite pour différents pas de temps.

3.4.2 Exercices

Les exercices ci-dessous proposent d'étudier les quantités conservées et la stabilité des états stationnaires pour quelques équations différentielles, à l'aide des outils présentés dans ce chapitre. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre. Les exercices les plus importants sont identifiés avec le symbole (\star).

Exercice 3.1 (Comment choisir le bon pas de temps?). (★) Les oscillations d'un pendule amorti de longueur l muni d'une masse ponctuelle m avec le coefficient de frottements k se modélisent par :

$$m\theta'' = -\frac{k}{l^2}\theta' - mg \sin(\theta)$$

couplée à une condition initiale sur la position $\theta(0) = \theta_0$ et à la vitesse initiale $\theta'(0) = v_0$. Les simulations de ce modèle proposées ont été tracées avec le schéma d'Euler Explicite (voir Figure 3.3).

1) Le temps de calcul pour le pas de temps 0.01 est d'environ 3 ms. Estimer le pour les 3 autres pas de temps.

2) Quel pas de temps choisiriez-vous pour simuler correctement ce système avec ce schéma ?

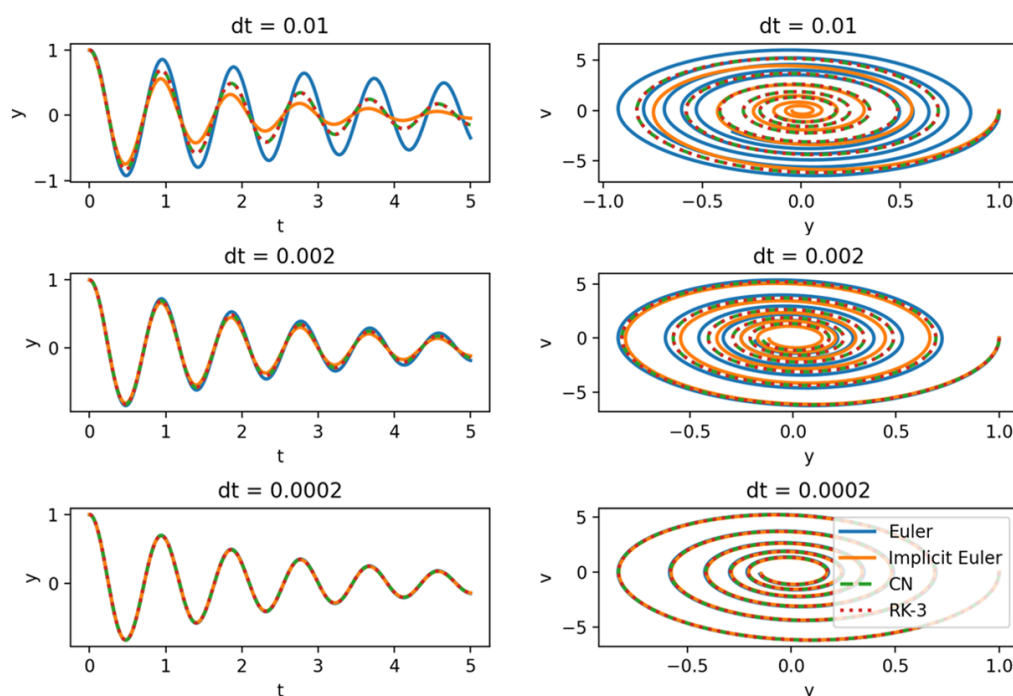


FIGURE 3.4 – Résolution numérique du problème du pendule simple avec 3 pas de temps et 4 méthodes différentes

Exercice 3.2 (Comment choisir un schéma numérique?). (★) On travaille toujours avec un pendule simple formé d'un fil de longueur l , d'une masse ponctuelle m et d'un coefficient de frottement k . L'équation de la dynamique s'écrit :

$$m\theta'' = -\frac{k}{l^2}\theta' - mg \sin(\theta)$$

On fournit également une condition initiale sur la position $\theta(0) = \theta_0$ et la vitesse $\theta'(0) = v_0$. Les simulations de ce modèle proposées ont été obtenus avec différents schémas (voir figure 3.4).

Voici les temps de calcul (en secondes) correspondants :

Schéma	$dt = 0.01$	$dt = 0.002$	$dt = 0.0002$
Euler Explicite	0.0031	0.013	0.13
Euler Implicite	0.046	0.21	1.39
Crank-Nicolson	0.05	0.22	1.74
Adams-Bashforth 2	0.0042	0.019	0.18
Runge Kutta 3	0.0090	0.046	0.47

1) Quel schéma numérique conseillerez-vous pour résoudre ce système ? Pour chaque schéma, quel pas de temps semble optimal ?

2) Dans un second temps et pour chacun de ces 5 schémas, on a tracé en échelle log-log l'erreur en fonction du pas de temps pour un grand nombre de pas de temps. Le graphique obtenu est donnée par la Figure 3.5. Pour chacune des 5 courbes, associer le schéma numérique correspondant.

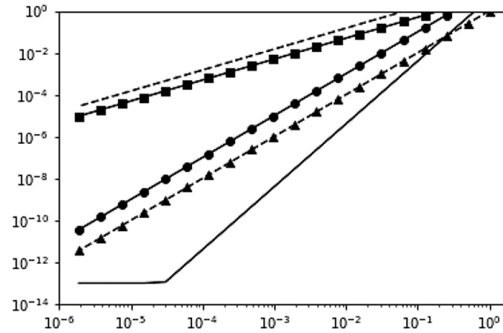


FIGURE 3.5 – Tracé en échelle log-log de l'erreur en fonction du pas de temps pour les 5 schémas étudiés à l'exercice 3.2.

Exercice 3.3 (Etude de la A -stabilité). (\star) On considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t), \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

où $\lambda < 0$ et où $x(t) \in \mathbb{R}$.

- 1) Calculer la solution exacte x . Montrer que x ne change pas de signe et que $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.
- 2) Écrire la formule pour la méthode d'Euler explicite pour cette équation particulière.
- 3) Si on utilise la méthode d'Euler explicite, sous quelle condition sur Δt a-t-on $x_n > 0 \implies x_{n+1} > 0$?
- 4) Sous quelle condition sur Δt a-t-on $x_n \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$?
- 5) On considère maintenant que $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $z = \Delta t \lambda$. A quelle région du plan complexe doit appartenir z pour que la solution x_n calculée avec la méthode d'Euler explicite reste bornée quand n tend vers $+\infty$? Représenter cette région dans le plan complexe. Quel est le lien avec le *domaine de stabilité*. En déduire la condition CFL pour ce schéma.
- 6) Même questions avec Euler implicite.
- 7) Même questions pour la méthode de Crank-Nicolson.

Exercice 3.4 (Méthode du point milieu explicite). (\star) Soit f une application \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}^d . On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$.

- 1) Calculer $x''(t)$.
- 2) En déduire le développement de Taylor en Δt de $x(t + \Delta t)$ à l'ordre 2.

- 3) On pose $k_1 = f(x(t))$ et $k_2 = f(x(t) + \Delta tk_1/2)$. Calculer le développement asymptotique en Δt à l'ordre 2 de $x(t) + \Delta tk_2$.
- 4) En déduire une méthode explicite d'ordre 2 appelée méthode du point milieu explicite.
- 5) Donner le domaine de A -stabilité de cette méthode.

Exercice 3.5 (Méthode des trapèzes explicite (ou Méthode de Heun)). Soit f une application \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}^d . On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$.

- 1) On pose $k_1 = f(x(t))$ et $k_2 = f(x(t) + \Delta tk_1)$. Calculer le développement asymptotique en Δt de k_2 à l'ordre 1.
- 2) En déduire le développement asymptotique en Δt à l'ordre 2 de $x(t) + \Delta t(k_1 + k_2)/2$.
- 3) En déduire une méthode explicite d'ordre 2 appelée méthode des trapèzes explicites.
- 4) Donner le domaine de A -stabilité de cette méthode.

Exercice 3.6 (Quantités conservées par le flot numérique). Soit une EDO autonome

$$x'(t) = f(x(t)),$$

où $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe une fonction $\mathcal{E}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ conservative. C'est à dire, telle que pour toute solution x de l'EDO ci-avant, l'application $t \mapsto \mathcal{E}(x(t))$ est constante.

1) Soit x_n la n^e itérée obtenue en appliquant la méthode d'Euler Explicite à l'EDO ci-avant. Montrer que

$$\mathcal{E}(x_{n+1}) = \mathcal{E}(x_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

2) Plus généralement, montrer que si x_n est la n^e itérée obtenue en appliquant une méthode d'ordre p à l'EDO ci-avant, on a

$$\mathcal{E}(x_{n+1}) = \mathcal{E}(x_n) + \mathcal{O}(\Delta t^{p+1}).$$

Exercice 3.7 (Quantités conservées par le flot numérique (2)). 1) Calculer la solution exacte du système suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \end{aligned}$$

avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. Quelle est alors la trajectoire du point $(x(t), y(t))$? En déduire le comportement de $x^2(t) + y^2(t)$.

- 2) Appliquer le schéma d'Euler explicite à ce système et calculer $x_n^2 + y_n^2$. Que conclure?
- 3) Faire de même avec Euler Implicite et la méthode de trapèzes implicites (Crank-Nicolson).
- 4) Écrire une formule de Runge-Kutta explicite à 2 étages pour ce problème. Peut-on trouver des coefficients qui permettent d'obtenir le comportement souhaité de $x_n^2 + y_n^2$?

Exercice 3.8 (Application à la discrétisation d'une EDP). On souhaite utiliser les techniques de résolution numérique des EDO pour résoudre des EDP discrétisées en espace. On va travailler avec l'équation de la chaleur 1D sans second membre définie pour $x \in [0, 1]$:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0, \quad \text{et} \quad \theta(t, 0) = \theta(t, 1) = 0.$$

où $\bar{\theta}(t, x)$ représente la température au temps t et à la position x et $\lambda > 0$ la diffusivité thermique du matériau. Nous allons à présent discrétiser la dérivation spatiale avec $d+2$ points de discrétisation (en comptant les extrémités). Nous allons pour cela approcher la fonction $x \mapsto \bar{\theta}(t, x)$ pour tout t par un vecteur $\theta(t) \in \mathbb{R}^d$. Pour cela on approxime le Laplacien à l'aide d'une différence finie ($k = 1, \dots, d$) :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \left(t, x = \frac{k}{d} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left(\theta_{k-1}(t) - 2\theta_k(t) + \theta_{k+1}(t) \right).$$

Dans l'expression ci-dessus on met la convention de remplacer θ_0 et θ_{d+2} par la donnée au bord nulle.

1) Montrer que l'évolution en temps du vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est donnée par une EDO linéaire à coefficients constants $\dot{\theta} = A\theta$ où A est une matrice à préciser.

2) Montrer que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples et calculer ses racines.

3) Trouver la condition CFL sur Δt pour le schéma de Euler-Explicite appliqué à cette EDO. Même question avec Euler Implicite.

4) On souhaite améliorer la stabilité pour Euler explicite en procédant à une implicitation sur la diagonale de la discrétisation spatiale. Autrement-dit :

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \left(t_n, x = \frac{k}{d} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left(\theta_{k-1}(t_n) - 2\theta_k(t_{n+1}) + \theta_{k+1}(t_n) \right).$$

Trouver la condition CFL pour ce nouveau schéma. Quel est l'intérêt de ce schéma ?

Exercice 3.9 (Méthodes d'Euler Symplectiques et de Störmer-Verlet). Les méthodes d'Euler Symplectiques et de Störmer-Verlet sont des méthodes multi-pas qui permettent de préserver le hamiltonien numériquement avec un ordre assez élevé. On considère $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et le système d'EDO mécanique :

$$\begin{aligned} v' &= -\phi'(x), \\ x' &= v. \end{aligned}$$

1) La méthode d'Euler symplectique- a est donnée par la formule de récurrence

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \Delta t \phi'(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_{n+1}. \end{aligned}$$

Estimer l'erreur de troncature, l'ordre de consistance et l'ordre de convergence pour cette méthode (Pour l'ordre de convergence, on se restreindra au cas linéaire).

2) Faire pareil pour la méthode d'Euler symplectique- b donnée par :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n, \\ v_{n+1} &= v_n - \Delta t \phi'(x_{n+1}). \end{aligned}$$

3) Faire pareil pour la méthode de Störmer–Verlet donnée par :

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} - \Delta t^2 \phi'(x_n)$$

4) Même question pour Velocity-Verlet (Verlet en vitesse) donnée par :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n - \frac{\Delta t^2}{2} \phi'(x_n), \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{\Delta t}{2} (\phi'(x_{n+1}) + \phi'(x_n)). \end{aligned}$$

Remarque : La différence entre l'ordre de consistance et l'ordre de convergence s'explique parce que la méthode est multi-pas. Le théorème de convergence numérique énoncé dans le cours ne s'applique pas ici.

5) On définit \mathcal{H} le Hamiltonien de ce système par

$$\mathcal{H} := \frac{v^2}{2} + \phi(x).$$

Pour chacune de ces 4 méthodes, calculer l'ordre de consistance et de convergence pour le Hamiltonien \mathcal{H} et les comparer avec les résultats de l'exercice 3.6.

Exercice 3.10 (Méthodes d'Adams-Bashforth et conditions initiales).

1) Calculer les expressions des méthodes d'Adams-Bashforth à 1, 2 et 3 pas. Quel est le domaine de A stabilité pour Adams-Bashforth 2 ?

2) On souhaite appliquer la méthode d'Adams-Bashforth à 3 pas. Afin d'obtenir les premières valeurs de $(x_n)_n$, on choisit d'utiliser la méthode d'Adams Bashforth à 1 pas pour x_1 et celle à 2 pas pour x_2 . On considère $x'(t) = -\lambda x(t)$, $\lambda > 0$.

3) Donner une estimation de l'erreur commise pour obtenir x_1 en fonction du pas Δt .

4) Donner une estimation de l'erreur commise pour faire $N - 2$ itérations de la méthode d'Adams à 3 pas en fonction de Δt où $N = T/\Delta t$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.11 (Une méthode de Runge-Kutta 3). On commence par rappeler que si g est \mathcal{C}^∞ , la formule de quadrature

$$\int_0^1 g(s) ds \approx \frac{1}{4}g(0) + \frac{3}{4}g(2/3)$$

a pour degré d'exactitude 3. On veut s'inspirer de cette méthode de quadrature pour obtenir une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3. Soit x une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$.

1) Ecrire la formule de Duhamel pour x entre t et $t + \Delta t$.

2) Utiliser la formule du point milieu pour approcher $x(t_n + 2\Delta t/3)$ à l'ordre 2 .

3) En déduire avec la formule de quadrature une méthode de Runge-Kutta à $s = 3$ étages.

4) En utilisant les développements de Taylor, vérifier que la méthode est d'ordre 3.

5) Calculer le domaine de A -stabilité de cette méthode.

Exercice 3.12 (Une propriété des méthodes de Runge-Kutta). Dans cet exercice, nous souhaitons démontrer qu'il est judicieux d'avoir $c_i = \sum_{j < i} a_{i,j}$. Soit une méthode de Runge-Kutta donné par le tableau de Butcher générique de l'équation (3.5).

- 1) Montrer que dans le cas d'une EDO autonome, x_{n+1} est indépendant du choix des c_i .
- 2) On considère le problème de Cauchy non autonome

$$\dot{x}(t) = \mathcal{F}(t, x(t)), \quad \text{et} \quad x(0) = x_0,$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Montrer que le problème de Cauchy précédent est équivalent au problème de Cauchy autonome suivant (dont les inconnues sont y et σ) :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{F}(\sigma(t), y(t)), \\ \dot{\sigma}(t) = 1. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ \sigma(0) = 0. \end{cases}$$

- 3) Écrire la méthode de Runge-Kutta générale pour ce système autonome.
- 4) En déduire que, lorsque $c_i = \sum_{j < i} a_{i,j}$, appliquer une méthode de Runge-Kutta au premier ou au second système est équivalent.
- 5) En déduire qu'il suffit de chercher l'ordre d'une méthode de Runge-Kutta seulement pour les systèmes autonomes.

Exercice 3.13 (Formule de Milne). La formule de Milne est la suivante :

$$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{\Delta t}{3} \left(\mathcal{F}(t_{n+1}, X_{n+1}) + 4\mathcal{F}(t_n, X_n) + \mathcal{F}(t_{n-1}, X_{n-1}) \right).$$

- 1) Montrer que c'est une méthode multipas d'ordre 4.
- 2) Calculer le domaine de A -stabilité de cette méthode.

Exercice 3.14 (Backward Differentiation Formula). La *Backward Differentiation Formula* est une méthode multi-pas très similaire à la méthode de Adams-Bashforth. La principale différence étant ici que la méthode est implicite. Il s'agit d'une méthode plutôt efficace pour gérer des problèmes de stabilité liées à une variation brusque du champ de vitesse. Cette méthode à l'ordre k , notée BDF- k , s'écrit

$$\sum_{j=0}^k \beta_{j,k} X_{n+j} = \Delta t a_k \mathcal{F}(t_{n+k}, X_{n+k})$$

Les coefficients $\beta_{j,k}$ et a_k sont calculés à l'aide des polynômes de Lagrange comme pour Adams-Bashforth. Cependant, le calcul des coefficients d'Adams-Bashforth va donner un résultat différents (puisque l'approximation de la dérivée est différente). On les range dans le tableau suivant :

k	$\beta_{0,k}$	$\beta_{1,k}$	$\beta_{2,k}$	$\beta_{3,k}$	$\beta_{4,k}$	$\beta_{5,k}$	a_k
1	-1	1					1
2	1	-4	3				2
3	-2	9	-18	11			6
4	3	-16	36	-48	25		12
5	-12	75	-200	300	-300	147	60

- 1) Montrer que BDF-1 est équivalente à Euler-Implicite.
- 2) Calculer l'erreur de troncature locale pour les méthodes BDF- k .
- 3) On dit qu'un schéma numérique est *zéro-stable* s'il intègre de manière stable l'équation $\dot{X} = 0$. Montrer que ces schémas BDF sont zéro-stables. (*Remarque : Le schéma BDF-6 est également zéro-stable mais pas les schémas BDF d'ordre plus élevé!*)
- 4) On admet que ces schémas sont stable. Montrer alors que l'ordre de consistance est égal à l'ordre de convergence (faire le cas linéaire).

Exercice 3.15 (Runge-Kutta 4). Montrer que la méthode de Runge-Kutta 4 classique est bien une méthode d'ordre 4. Même question pour la règle des $3/8^{\text{ièmes}}$.