Enseirb-Matmeca
M1, 2021-2022 — Outils numériques pour la mécanique

Fascicule d'exercices pour travaux dirigés

1 Différences finies et équation de type Poisson

Exercice 1. Différences finies.
1) On considère un maillage uniforme de $\mathbb{R}$ de pas Δx et un point x_i de ce maillage. Construire des approximations d'ordre deux de $u'(x_i)$ et $u''(x_i)$ par des formules de différences finies centrées.

2) On considère un maillage uniforme de $\mathbb{R}^2$ de pas Δx et Δy dans chaque direction et un point (x_i, y_j) de ce maillage. Etablir par différences finies centrées du second ordre les approximations de $\nabla u(x_i, y_j)$ et de $\Delta u(x_i, y_j)$.

3) Combien faudrait-il de points au minimum pour approcher $u'''(x_i)$ par une formule centrée ? À quel ordre faut-il faire les développements limités des différents termes de la formule si on veut que son ordre soit au moins deux ? Construire la formule correspondante en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

4) On souhaite construire une formule différences finies d'ordre maximal pour approcher $u''(x_i)$, qui soit centrée et à 5 points ($i.e.$ qui utilise $x_{i\pm2}$, $x_{i\pm1}$ et x_i). Quel est, *a priori*, l'ordre de cette formule ? À quel ordre faut-il écrire les développements limités des différents termes de la formule ? Construire la formule correspondante en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. Déterminez enfin l'ordre exacte de la formule.

Exercice 2. Différences finies d'ordre élevé pour le problème de Poisson.
On considère le problème de Poisson:

$$\begin{aligned} -u^{''}(x) &= f(x) \text{ pour } x \in [0,1], \\ u(0) = u_g, &\quad u(1) = u_d, \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée.

1) Écrire le schéma numérique utilisant la formule centrée à 5 points de l'exercice 1. Quel problème apparaît aux bords du domaine ?
2) Proposer alors une façon de traiter les conditions aux limites.
3) Écrire alors le schéma sous forme matricielle.
4) Calculer l'erreur locale du schéma en tout point du maillage, et en déduire l'ordre de convergence. Pour cela, on supposera que la matrice du système linéaire associé au schéma est inversible, et que la norme de son inverse peut être majorée par une constante indépendante du pas du maillage.

Exercice 3. Équation de la chaleur stationnaire avec coefficient de diffusion variable.
On se donne deux fonctions $k \in C^1([0,1])$, à valeurs positives ou nulles et $f \in C^0([0,1])$. On considère le problème aux limites:

$$\begin{cases} -(k\,u')'(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On admettra que ce problème admet une solution unique u. Pour un pas de discrétisation h fixé, on note x_i les noeuds du maillage. Pour discrétiser ce système, une première possibilité consiste à développer le terme $(k\,u')'$ et à utiliser les formules centrées vues en cours (voir l'exercice sur le problème elliptique). Ce n'est pourtant pas la meilleure façon de faire. Le but de cet exercice est de construire et d'analyser un schéma plus simple, classiquement utilisé pour ce type de problème.
1) Construction du schéma.

a. Soit une fonction ϕ quelconque. Construire une approximation de $\phi'(x_i)$ à deux points, utilisant uniquement les centres des mailles $x_{i-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}}$ puis donner son ordre.

b. Construire une approximation centrée de $u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ à deux points, utilisant uniquement les points x_i et x_{i+1}, et donner son ordre.

c. Utiliser les deux résultats précédents pour construire une approximation différences finies de $(k\,u')'$ utilisant les valeurs $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$, ainsi que $k(x_{i-\frac{1}{2}})$ et $k(x_{i+\frac{1}{2}})$. Écrire le schéma associé et indiquer l'ordre que vous pensez atteindre avec ce schéma (le calcul précis de l'ordre est fait à la question suivante).

2) Calculer l'erreur locale du schéma et donner son ordre. Pour cela, on supposera k et u aussi régulières que nécessaire.
3) * Montrer que la solution approchée est solution d'un système linéaire symétrique défini positif. En déduire l'existence et l'unicité de la solution numérique.

Exercice 4. Différences finies pour deux problèmes aux limites.
1) On souhaite adapter le schéma vu en cours à l'équation de Poisson avec condition de Neuman à gauche :

$$(P^1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u'(0) = g_1 \quad \text{et} \quad u(1) = g_2 \end{cases}$$

2) Après voir écrit l'approximation de l'équation par le schéma vu en cours, proposer une discrétisation des conditions aux limites. Préciser soigneusement quelles sont les inconnues et les données du problème, et donner une formulation matricielle du schéma.
3) Quel est l'ordre du schéma ? Pour cela, distinguer les points intérieurs et les points du bord.
4) Estimer l'ordre de convergence du schéma. Pour cela, on supposera que la matrice du système linéaire associé au schéma est inversible, et que la norme de son inverse peut être majorée par une constante indépendante du pas du maillage.
5) On modifie légèrement le problème en remplaçant la condition aux limites de Dirichlet à droite par une autre condition de Neuman $u'(1) = g_2$. Étendre le schéma précédent à ce nouveau problème, et montrer que la matrice associée n'est pas inversible. Le problème continu lui-même a-t-il une solution unique ?

Exercice 5. Équation de Poisson en 2D.
Soit $\Omega =]a,b[\times]c,d[$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in C^0(\Omega)$. En s'inspirant de la dimension 1, construire un schéma aux différences finies centrées pour le problème bidimensionnel suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u(a,y) = u(b,y) = 0, & c \leq y \leq d, \\ u(x,c) = u(x,d) = 0, & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Les points du maillage seront notés (x_i, y_j) et les valeurs $u(x_i, y_j)$ seront approchées par les inconnues $u_{i,j}$. Construire la matrice du système linéaire associé (on conseille pour cela une construction par blocs).

Exercice 6. Différences finies pour le problème de Poisson.*
On considère le problème de Poisson:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \text{ pour } x \in [0,1], \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

où f est une fonction donnée positive.

1) Calculer la solution u et montrer qu'elle est elle aussi positive.

2) On considère maintenant le schéma numérique pour ce problème, basé sur la formule centrée d'ordre 2 à 3 points vue en cours. Écrire le système linéaire associé au schéma, et vérifier qu'il est bien tridiagonal.

3) On souhaite montrer que la solution numérique est elle aussi nécessairement positive, autrement dit, que le schéma numérique préserve la positivité de la solution. Tout d'abord, vérifier que, à condition de passer le facteur Δx^2 dans le second membre, la décomposition LU de la matrice de ce système est telle que $L_{i,i} = 1$, $L_{i,i-1} = -\frac{i-1}{i}$, $U_{i,i} = \frac{i+1}{i}$ et $U_{i,i+1} = -1$, tous les autres termes étant nuls. Il n'est pas demandé de *calculer* la factorisation LU. Écrire alors l'algorithme de résolution et en déduire que u_i est positif pour tout i.

Exercice 7. Différences finies pour un problème elliptique.*

Construire un schéma différences finies à l'aide des formules vues en cours pour le problème suivant :

$$\begin{aligned}&a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ pour } x \in [0,1],\\ &u(0) = u(1) = 0,\end{aligned}$$

où a, b, c, et f sont des fonctions données. Calculer l'erreur locale, l'ordre du schéma, et écrire le schéma sous forme matricielle. Quelle méthode de résolution vous semble la plus adaptée ?

2 Équation de la chaleur

Exercice 8. On considère l'équation de la chaleur avec condition aux limites périodiques dans $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t T = D\partial_{xx} T,\\
&T(t=0,x) = T_0(x),\\
&T(t,0) = T(t,1) \quad \text{et} \quad \partial_x T(t,0) = \partial_x T(t,1)
\end{aligned}$$

1) Dans la méthode de séparation des variables vue en cours, on élimine la solution dont la composante temporelle croît. On peut justifier ce choix en montrant que la solution de l'équation est de norme L^2 (par rapport à x) bornée en temps. Plus précisemment, montrez que $\displaystyle\int_0^1 (T(t,x))^2\,dx \le \int_0^1 (T_0(x))^2\,dx$. Aide : multipliez l'équation par $T(t,x)$, puis intégrez en espace.
2) Déduire de ce résultat que la solution de l'équation est nécessairement unique.

Exercice 9. Résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned}
&\partial_t T = \partial_{xx} T, \quad x \in [0,1]\\
&T(t,0) = 0, \quad T(t,1) = 0,
\end{aligned}$$

avec la donnée initiale $T_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{10}\sin(10\pi x)$. Tracer grossièrement l'allure de la solution à différents temps et commenter le résultat.

Exercice 10. Résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned}
&\partial_t T = \partial_{xx} T, \quad x \in [0,1]\\
&T(t=0,x) = T_0(x),\\
&\partial_x T(t,0) = 0, \quad T(t,1) = 0,
\end{aligned}$$

par la méthode de séparation des variables, en précisant a posteriori la forme que doit prendre la donnée initiale pour que cette résolution soit possible. Comment calculer la solution si la donnée initiale est quelconque ?

Exercice 11. Différences finies pour l'équation de la chaleur 2D.
On considère l'équation de la chaleur en 2D posée dans $[0,1]\times[0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\partial_t T(t,x,y) = D\Delta T(t,x,y),\\
&CI : T(0,x,y) = T_0(x,y),\\
&CL : T(t,0,y) = T_O(t,y), \quad T(t,1,y) = T_E(t,y)\\
&\qquad\ T(t,x,0) = T_S(t,x), \quad T(t,x,1) = T_N(t,x),
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que $\Delta T(t,x,y) = \partial_{xx} T(t,x,y) + \partial_{yy} T(t,x,y)$. On suppose que la donnée initiale et les données au bord sont des fonctions bornées.
1) Définir votre maillage et la numérotation associée.
2) En utilisant les formules différences finies vues en cours (formule centrée à trois points pour la dérivée seconde et formule décentrée à droite pour la dérivée première), construire rapidement un schéma numérique pour cette équation.
3) Quel devrait être l'ordre de ce schéma ? (On ne demande pas de calculer cet ordre)
4) Déterminer la condition CFL sous laquelle ce schéma est L^∞-stable (on supposera pour cela que les données au bord sont uniformément bornées).

Exercice 12. Analyse de stabilité L^2 par la méthode des lignes.
Pour l'équation de la chaleur 1D avec conditions aux limites de Dirichlet dans $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
&\partial_t T(t,x) = D\partial_{xx} T(t,x),\\
&T(0,x) = T_0(x),\\
&T(t,0) = T(t,1) = 0,
\end{aligned}$$

on considère le schéma explicite à 3 points suivant :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = D\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

pour $i = 1$ à i_{max}, et $T_0^n = T_{i_{max}+1}^n = 0$.
1) Mettre ce schéma sous forme matricielle.
2) Le schéma peut alors être interprété comme le schéma d'Euler explicite pour un système différentiel. Donnez ce système différentiel.
3) Montrez que la matrice associée a pour vecteurs propres les i_{max} vecteurs $X^{(k)}$ de composantes $X_i^{(k)} = \sin \frac{2\pi k i}{i_{max}+1}$, et calculez les valeurs propres associées.
4) Rappelez sous quelle condition le schéma d'Euler explicite donne une solution numérique bornée pour l'edo $y' = \lambda y$ quand $Re(\lambda) < 0$ (condition de A-stabilité).
5) Déduisez-en la condition CFL sous laquelle le schéma pour l'équation de la chaleur assure que la solution numérique reste bornée au cours du temps.

Exercice 13. Schéma de Crank-Nicolson. On considère l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Le schéma de Crank-Nicolson pour cette équation est obtenu par la méthode des lignes, en combinant le schéma implicite dit "du trapèze" pour une edo, et la discrétisation centrée à trois points habituelle en espace.
1) Construisez ce schéma.
2) Montrez qu'il est d'ordre deux en espace et en temps. On pourra réutiliser le résultat déjà démontré sur l'ordre de la formule différence finie centrée à 3 points.
3) Montrer ensuite que le schéma est inconditionnellement L^2 stable.
4) Retrouvez ce résultat de stabilité en utilisant la méthode de von Neumann (mais notez que la propriété est valable seulement pour le schéma défini avec des conditions aux limites périodiques).

Exercice 14. Schéma de Gear* On rappelle que le schéma BDF2 (schéma de Gear) s'écrit pour une EDO $y' = f(y)$:

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = \Delta t f(y_{n+1}).$$

a. Construire un nouveau schéma pour l'équation de la chaleur grâce à la méthode des lignes en se basant sur le schéma BDF2 en temps et l'approximation centrée à 3 points en espace.

b. Montrer que le schéma est d'ordre 2.

c. Etudier la stabilité L^2 de ce schéma.

d. Quel est l'ordre maximal des schémas inconditionnellement stables? (on pourra invoquer les lois de Dahlqvist).

e. Sans faire les calculs, expliquer comment faire l'étude de stabilité L^2 si on utilise un schéma de Runge-Kutta en temps?

3 Équation d'advection

Exercice 15. Solution de l'équation d'advection.
1) Calculer la solution exacte de l'équation d'advection posée dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\partial_t u + a\partial_x u = 0,\\&u(0,x) = u_0(x).\end{aligned}$$

2) Que peut-on dire de la fonction obtenue si la donnée initiale n'est pas dérivable (par exemple $u_0(x) = 1$ si $|x| < 1$ et 0 sinon) ?
3) Montrer que si u_0 est une fonction positive, bornée, et dans $L^2(\mathbb{R})$, alors il en est de même pour la solution exacte en tout temps. Calculer aussi $\|u(t,.)\|_\infty$ et $\|u(t,.)\|_2$.
4) On considère à présent l'équation posée dans le domaine borné $[0,1]$ avec condition aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned}&\partial_t u + a\partial_x u = 0,\\&u(0,x) = \cos \pi x,\\&u(t,0) = 1\end{aligned}$$

et l'on suppose $a > 0$. Calculer la solution et la représenter grossièrement à différents instants (en temps petit et en temps grand).

Exercice 16. Le schéma décentré.
1) Écrire le schéma décentré pour l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ et rappeler la condition CFL qui assure la positivité et la stabilité L^∞ du schéma.
2) Comparer la solution numérique obtenue à la solution exacte, dans le cas où la cfl vaut 1.
3) Modifier à présent le schéma pour utiliser un maillage à pas variable. On notera $\Delta x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. Sous quelle condition le schéma assure-t-il la positivité et la stabilité L^∞ ? En déduire une formule pour calculer le pas de temps. Peut-on obtenir la même précision qu'à la question précédente ?

Exercice 17. Un schéma pour une vitesse d'advection négative
Le but de cet exercice est de construire un schéma décentré pour l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ sur $[0,1]$ où $a < 0$.
1) Résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques en prenant soin de déterminer en quel point doit être définie la condition aux limites.
2) Construire un schéma décentré qui soit positif, L^∞ stable, et donner la condition CFL associée.

Exercice 18. Un schéma instable.
On considère l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ avec $a > 0$, et on étudie le schéma décentré *aval* :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0.$$

1) En donnant un exemple, montrer que ce schéma peut ne pas préserver la positivité de la solution, et ce quel que soit le pas de temps.
2) Par une analyse de Von Neumann, montrer que ce schéma est inconditionnellement L^2-instable.

Exercice 19. Diffusion numérique.
On considère l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ avec $a > 0$.
1) Calculer l'équation équivalente des schémas d'Euler explicite et Euler implicite.
2) Comparer la diffusion numérique associée à chaque schéma.
3) En déduire lequel des deux schémas est le plus précis.

Exercice 20. Schéma de Lax-Wendroff.
On rappelle que le schéma de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ s'écrit

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + a^2\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n\right).$$

1) Montrer par l'analyse de Von Neumann que ce schéma est L^2-stable sous une condition CFL à déterminer.
2) Trouver un exemple qui montre que ce schéma ne préserve pas la positivité de la solution en général.
3) On se place sur le domaine borné $[0,1]$, avec une vitesse a positive, et la condition aux limites d'entrée $u(t,0) = \phi(t)$. En quels points du maillage doit-on définir des conditions aux limites numériques, et quelles valeurs imposer ?
4) Montrer que le schéma de Lax-Wendroff est le seul schéma linéaire à trois points (c'est-à-dire s'écrivant $u_i^{n+1} = \alpha u_{i-1}^n + \beta u_i^n + \gamma u_{i+1}^n$ avec α, β, et γ indépendants des u_i^n) qui soit d'ordre deux en temps et en espace.

Exercice 21. Diffusion numérique.
1) Par changement de variables, montrer que l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u + a\partial_x u = \mu\partial_{xx} u$$

se ramène à une équation de diffusion pure.
2) En déduire la solution exacte de cette équation posée dans $\mathbb{R}$ avec la donnée initiale $u_0(x) = \sin\frac{x}{10} + \frac{1}{10}\sin 10x$ et tracer grossièrement l'allure de la solution à différents instants.
3) Montrer que l'équation équivalente du schéma décentré pour l'équation d'advection

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

est une équation d'advection diffusion, et donner le coefficient de diffusion correspondant, qui sera noté μ (et que l'on appelle coefficient de diffusion numérique).
4) Montrer que le schéma décentré précédent peut se mettre sous la forme centrée suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \Delta t\mu_d\phi_i, \tag{1}$$

où ϕ est une approximation par différences finies de $\partial_{xx} u$ à déterminer et μ_d un coefficient lui aussi à déterminer. En d'autres termes, déterminer μ_d et ϕ_i pour que les valeurs u_i^{n+1} définies par la relation (1) et par le schéma décentré coïncident. Comparer alors les coefficients μ et μ_d.
5) Pour améliorer la précision en temps du schéma, un utilisateur du schéma a l'idée de diminuer Δt, tout en gardant Δx constant. En étudiant le comportement de μ par rapport à Δt, montrer à l'utilisateur qu'il a eu une très mauvaise idée ...
6) On peut observer que le schéma de Lax-Wendroff s'écrit lui aussi sous la forme (1) avec un coefficient $\mu_{LW} = a^2\frac{\Delta t}{2}$. Comparer μ_{LW} et μ_d en supposant que Δt et Δx sont les mêmes pour les deux schémas (noter que Δt et Δx sont liés par la condition CFL). En déduire une différence de comportement des solutions numériques correspondantes.

Exercice 22. Dispersion et schéma de Lax-Wendroff.
1) Par changement de variables, montrer que l'équation d'advection-dispersion

$$\partial_t u + a\partial_x u = \varepsilon\partial_{xxx} u$$

se ramène à une équation de dispersion pure $\partial_t v = \varepsilon\partial_{xxx} v$.
2) En déduire que la solution exacte de cette équation posée dans $\mathbb{R}$ avec la donnée initiale $u_0(x) = \exp(i\omega x)$ n'est autre que u_0 advectée à la vitesse $a + \omega^2\varepsilon$. Comparer ce résultat à celui obtenue avec l'équation d'advection pure et avec l'équation d'advection-diffusion. Quel comportement peut-on attendre de la solution associée à une donnée initiale composée de plusieurs modes de fréquences différentes ?
3) Montrer que l'équation équivalente au schéma de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

est une équation d'advection-dispersion, et donner le coefficient de dispersion correspondant.

4 Autres problèmes

Exercice 23. Onde progressive monochromatique.
Soit $u(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$: on appelle cette fonction une onde progressive monochromatique. Le paramètre k est appelé nombre d'onde, et le paramètre ω est appelé la pulsation.
1) Montrer que cette fonction est périodique en temps et en espace. Calculer la période spatiale en fonction de k et la période temporelle en fonction de ω.
2) Montrer que u est solution d'une équation d'advection, et calculer la vitesse de propagation en fonction de k et de ω.
3) Inversement, si u est solution de l'équation d'advection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$, exprimer la pulsation ω en fonction de a et de k. Cette relation s'appelle la relation de dispersion.

Exercice 24. Advection en 2D et schéma décentré.
On étudie ici le schéma décentré pour l'équation d'advection 2D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho = 0,$$
$$\rho(t=0,x,y) = \rho_0(x,y)$$

où ρ représente une densité de masse, $V(x,y)$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et ρ_0 est une fonction donnée. On notera Δx et Δy les pas d'espace dans les directions x et y.
1) Problème dans $\mathbb{R}^2$.

a. Calculer la solution de cette équation si $V(x,y)$ est un vecteur constant $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

b. Calculer la solution de cette équation dans le cas où $V(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right)$. Il est conseillé de tracer le champ de vitesses pour comprendre ce qui se passe.

c. Construire un schéma décentré pour cette équation en vous inspirant du schéma vu en cours, en supposant le champ de vitesse quelconque. Pour écrire ce schéma de façon compacte, on pourra utiliser la notation $a^+ = \max(a,0)$ et $a^- = \min(a,0)$.

d. Calculer la condition CFL donnant la positivité de la solution numérique et la stabilité L^∞. Comparer cette condition à celle obtenue en 1D dans le cas particulier où $V = \left(\begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a > 0$ et $\Delta x = \Delta y$.

2) On suppose maintenant que le champ de vitesse est à divergence nulle.

a. Montrer que si la masse totale initiale $\int_{\mathbb{R}^2} \rho_0(x,y)\,dxdy$ est finie, alors la masse totale $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(t,x,y)\,dxdy$ est constante au cours du temps.

b. Cette propriété est-elle satisfaite par votre schéma ?

3) On considère à présent cette équation dans le domaine borné $[0,1] \times [0,1]$ avec $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Sur quels bords doit-on imposer des conditions aux limites pour que la solution soit bien définie ?

b. En déduire les conditions aux limites numériques à définir pour le schéma.

Exercice 25. Approximation de l'équation d'advection diffusion par différences finies.
On considère l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u + a\partial_x u = \mu \partial_{xx} u, \tag{2}$$

avec une vitesse a positive. On étudie l'application des méthodes de discrétisation vues précédemment à cette équation.
1) Schéma décentré-centré.

a. Écrire le schéma obtenu en approchant $\partial_x u$ de façon décentrée et $\partial_{xx} u$ par la formule centrée usuelle.

b. Trouver la condition CFL donnant la positivité de la solution numérique et la stabilité L^∞.

c. * Idem pour la stabilité L^2.

d. Donner l'ordre de ce schéma et trouver son équation équivalente. En déduire une contrainte sur Δt et Δx pour que l'on puisse approcher l'équation (2) de façon suffisamment précise.

2) Schéma centré.

a. Écrire maintenant le schéma obtenu en approchant $\partial_x u$ par différences finies centrées et en gardant l'approximation de $\partial_{xx} u$ inchangée.

b. Donner l'ordre de ce schéma et trouver son équation équivalente.

c. Montrer que ce schéma peut préserver la positivité de la solution numérique sous deux conditions : l'une est la condition CFL du schéma explicite centré pour l'équation de diffusion, l'autre est une condition sur Δx seulement. On pourra faire apparaître le nombre de Peclet de maille $\mathrm{Pe} = a\Delta x/\mu$.

d. Déterminer la condition CFL assurant la stabilité L^2 du schéma.

3) En considérant successivement les deux cas μ grand et μ petit, pouvez-vous dire lequel des deux schémas étudiés ci-dessus est à privilégier dans chaque cas ?

Exercice 26. Equation de convection-diffusion en coordonnées sphériques.
On cherche ici à étudier un problème de convection-diffusion simplifié, modélisé par l'EDP suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} T + (u.\nabla)T - \kappa \Delta T = 0, \tag{3}$$

T est la température, ω est un taux de production. $u \in \mathbb{R}^3$ et $\kappa \geq 0$ sont des données du problème (vitesse, et coefficient de diffusion thermique).
1) On suppose pour commencer que le problème admet une symétrie sphérique. On rappelle l'expression des opérateurs du problème en coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi,\\
\Delta f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big).
\end{aligned}$$

Exprimer l'équation 3 en coordonnées sphériques dans le cas d'une symétrie sphérique (les grandeurs ne dépendent ni de θ ni de ϕ).
2) On construit alors un schéma numérique en approchant chacun des opérateurs. L'opérateur de diffusion est approché de manière classique par un schéma centré:

$$\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\Big)\Big]_{r=r_i} \simeq \frac{1}{r_i^2}\Big[r_{i+1/2}^2\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta r^2} - r_{i-1/2}^2\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r^2}\Big], \tag{4}$$

avec $r_{i+1/2} := (r_i + r_{i+1})/2$.
Pour l'opérateur de convection, on utilisera deux approximations:

a. un schéma décentré amont ie
$$\Big[u_r\partial_r T\Big]_{r=r_i} \simeq u_r\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r}, \text{ si } u_r > 0.$$

b. un schéma que l'on appellera "3ubs" (pour *upwind-biased scheme*) ie
$$\Big[u_r\partial_r T\Big]_{r=r_i} \simeq u_r\frac{T_{i-2} - 6T_{i-1} + 3T_i + 2T_{i+1}}{6\Delta r}, \text{ si } u_r > 0.$$

Enfin, on approchera la dérivée en temps par un schéma d'Euler explicite:

$$\partial_t T \simeq (T_i^{n+1} - T_i^n)/\Delta t.$$

Écrire les deux schémas numériques obtenus et étudier leur consistance.
3) Montrer que si $u_r > 0$ et que la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta r}{u_r + \kappa(2 + \frac{\Delta r^2}{2r_m^2})}, \tag{5}$$

est vérifiée, alors le schéma numérique décentré amont est L^∞-stable.
4) On se place maintenant dans un cadre axisymétrique ie le problème est symétrique par rapport à l'axe $\mathbf{e}_z$. Pour tirer profit de cette symétrie, on passe en coordonnées cylindriques. On rappelle également la forme des opérateurs gradient et laplacien dans ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial_r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial_\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial_z}\mathbf{e}_z, \\ \Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial_z^2}. \end{aligned}$$

Écrire l'équation 3 dans ce système de coordonnées en supposant que T ne dépend pas de θ.
5) Montrer que si $u_z > 0$ et que le pas de temps vérifie la condition CFL:

$$\Delta t \leq \Big[\frac{u_z}{\Delta z} + 2\kappa\Big(\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta r^2}\Big)\Big]^{-1}, \tag{6}$$

alors le schéma numérique défini par:

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} = {} & T_{i,j-1}^n\Big(u_z\frac{\Delta t}{\Delta z} + \kappa\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\Big) + T_{i-1,j}^n\Big(\kappa\frac{r_{i-1/2}}{r_i}\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\Big) \\ & + T_{i,j}^n\Big(1 - u_z\frac{\Delta t}{\Delta z} - 2\kappa\Big(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} + \frac{\Delta t}{\Delta r^2}\Big)\Big) + T_{i+1,j}^n\Big(\kappa\frac{r_{i+1/2}}{r_i}\frac{\Delta t}{\Delta z^2}\Big) + T_{i,j+1}^n\kappa\frac{\Delta t}{\Delta z^2}, \end{aligned}$$

converge vers la solution du problème axisymétrique au sens de la norme L^∞.

Exercice 27. Stabilisation du schéma centré pour l'équation d'advection.

Nous avons vu que le schéma centré peut être stabilisé en rajoutant de la diffusion numérique (voir les interprétations des schémas décentré et de Lax-Wendroff vues à l'exercice 3). Nous voyons ici une autre approche par stabilisation en temps.
1) Stabilisation par discrétisation implicite en temps.

a. Montrer que le schéma implicite centré

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \tag{7}$$

est consistant avec l'équation de convection $\partial_t u + a\partial_x u = 0$, et précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

b. Par l'analyse de Von Neumann, montrer qu'il est inconditionnellement stable en norme L^2.

2) Méthode des lignes. Pour simplifier, on considère le problème précédent en domaine borné, avec vitesse a positive, et conditions aux limites périodiques ($u(t,0) = u(t,1)$). Le schéma précédent peut s'interpréter comme le résultat de deux discrétisations successives. Cette approche est appelée méthode des lignes et est un moyen efficace d'obtenir de l'ordre élevé en temps.

a. Discrétiser l'équation d'advection *en espace seulement* , avec une différence finie centrée, et constater qu'on obtient un système différentiel avec une matrice à déterminer.

b. Calculer les valeurs propres de ce système.

c. Discrétiser ce système différentiel par le schéma d'Euler implicite et constater qu'on retrouve le schéma (7). Rappeler la propriété de A-stabilité du schéma d'Euler implicite appliqué à un système différentiel.

d. En déduire la stabilité du schéma (7).

e. Déterminer le domaine de A-stabilité des méthodes de Runge-Kutta explicites d'ordre trois (il suffit de déterminer l'intersection de ce domaine de stabilité avec l'axe imaginaire pur), et en déduire que toutes ces méthodes appliquées au système différentiel précédent donnent un schéma pour l'équation d'advection qui est L^2-stable, sous une condition à déterminer.

Exercice 28. Système hyperbolique.
Sous certaines conditions, on peut modéliser la propagation d'une onde de compression dans une poutre fine par le système 1D

$$\begin{aligned} \sigma_t - E u_x &= 0 \\ \rho u_t - \sigma_x &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

où σ est la contrainte normale dans la direction x, u est la vitesse de déformation, ρ est la masse volumique (constante) du solide, et E est son module d'Young (constant lui aussi).

1) Solution exacte.

a. Mettre le système sous la forme $\partial_t U + A\partial_x U = 0$, avec U un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et A une matrice 2×2.

b. En diagonalisant A, transformer ce système en 2 équations d'advection découplées.

c. En déduire la solution générale de (8) et les vitesses de propagation correspondantes.

2) Approximation numérique.

a. Proposer un schéma décentré pour (8), basé sur l'analyse de la question précédente. (aide : pour simplifier les calculs, on conseille d'écrire le schéma décentré sous sa forme centrée avec diffusion numérique).

b. Interpréter le schéma obtenu : quels artefacts numériques cela va-t-il générer ?

c. Trouver une condition CFL pour garantir la stabilité L^2 de ce schéma.

3) Équation des ondes.

a. Montrer que σ vérifie l'équation des ondes

$$\partial_{tt}\sigma = c^2 \partial_{xx}\sigma, \tag{9}$$

avec $c = \sqrt{E/\rho}$.

b. En utilisant des discrétisations centrée des dérivées secondes, proposer un schéma numérique pour approcher l'équation (9).

c. Ce schéma peut-il préserver la positivité de la solution ?

d. Montrer que ce schéma est L^2-stable sous une condition CFL à déterminer, et comparer cette condition à celle trouver pour le schéma décentré appliqué au système (8).[1]

nouvel exo

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

[1] on utilisera le résultat suivant sur les suites de récurrence à trois termes : une suite définie par $\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0$ est bornée si toute racine de son polynôme caractéristique $\rho(\zeta) = \alpha\zeta^2 + \beta\zeta + \gamma$ est soit une racine simple de module inférieur ou égal à 1, soit une racine double de module strictement inférieur à 1.