Optimisation & Analyse convexe
Séance 6 : Algorithmes pour l'optimisation avec contraintes

Exercice 1 (Algorithme d'Uzawa : Cas de contraintes d'égalité et inégalité). Soit A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive, et soit J une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

où b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On considère aussi deux matrices $C_E \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $C_I \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ainsi que deux vecteurs $f_E \in \mathbb{R}^p$, $f_I \in \mathbb{R}^m$. On note $(\mathcal{P})$ le problème d'optimisation sous contrainte :

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Trouver } u \in K := \{v \in \mathbb{R}^n \mid C_E v = f_E, C_I v \leq f_I\} \quad \text{tel que} \quad J(u) = \inf_{v\in K} J(v).$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution optimale u de $(\mathcal{P})$.
2. Ecrire les conditions d'optimalité. Vérifier que ces conditions s'expriment sous la forme suivante : pour $\rho > 0$,

$$\exists \lambda \in \mathbb{F},\; Au + C^{\mathsf{T}}\lambda = b, \tag{1a}$$
$$\lambda = P_{\mathbb{F}}(\lambda + \rho(Cu - f)), \tag{1b}$$

   où $C = \begin{bmatrix} C_E \\ C_I \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} f_E \\ f_I \end{bmatrix}$, et $\mathbb{F}$ est un ensemble à préciser.

3. Pour calculer une approximation de (1), nous considèrons l'algorithme suivant :
   (a) On choisit : $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$, $\rho > 0$, et $\eta > 0$.
   On calcule u_0 solution de $Au_0 = b - C^{\mathsf{T}}\lambda_0$.
   (b) **Tant que** $\|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| > \eta$ ou $\|u_k - u_{k-1}\| > \eta$, on définit (u_{k+1}, λ_{k+1}) par

$$\left\| \begin{array}{l} \lambda_{k+1} = P_{\mathbb{F}}\Big(\lambda_k + \rho(Cu_k - f)\Big)\,; \\ u_{k+1} \text{ est solution de } Au_{k+1} = b - C^{\mathsf{T}}\lambda_{k+1}. \end{array} \right.$$

   Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda\|_2^2 \;\leq\; \|\lambda_k - \lambda\|_2^2 + \Big(\rho^2\|C\|^2 - 2\rho\lambda_{\min}(A)\Big)\|u_k - u\|_2^2.$$

   En déduire que si $0 < \rho < \frac{2\lambda_{\min}(A)}{\|C\|^2}$, alors il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\|u_k - u\|_2^2 \leq \gamma\Big(\|\lambda_k - \lambda\|_2^2 - \|\lambda_{k+1} - \lambda\|_2^2\Big).$$

   Conclure que la suite u_k converge vers l'unique solution u de $(\mathcal{P})$.
   A-t on la convergence de la suite λ_k ?

Exercice 2 (Algorithme d'Uzawa modifié).
Soit A une matrice symétrique définie positive, et soit J une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

où b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On cherche à approcher la solution unique du problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Trouver } u \in K := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Cv = f\} \quad \text{tel que} \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

où C est une matrice $m \times n$ et $f \in \mathbb{R}^m$. On considère le méthode itérative suivante :
  (a) (u^o, λ^o) donnés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
  (b) (u^k, λ^k) étant connus, calcul de (u^{k+1}, λ^{k+1}) par :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= u^k - \rho_1\big(Au^k - b + C^T\lambda^k\big) \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \rho_1\rho_2\big(Cu^{k+1} - f\big) \end{aligned}$$

où $\rho_1,\ \rho_2$ sont des paramètres strictement positifs.

1. Rappeler pourquoi le minimium u existe et est unique, et pourquoi il existe $\lambda \in R^m$ t.q. $Au + C^T\lambda = b$.
2. Montrer que si $\rho_1 > 0$ est suffisamment petit, alors

   $$\beta := \|I - \rho_1 A\|_2 < 1,$$

   où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle induite par la norme euclidienne.
3. On choisit le paramètre ρ_1 pour que l'inégalité $\beta < 1$ ait lieu. Montrer que si le paramètre ρ_2 est suffisamment petit, il existe une constante $\gamma > 0$ indépendante de l'entier k telle que :

   $$\gamma\|u^{k+1} - u\|_n^2 \le \Big(\frac{\|\lambda^k - \lambda\|_m^2}{\rho_2} + \beta\|u^k - u\|_n^2\Big) - \Big(\frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2}{\rho_2} + \beta\|u^{k+1} - u\|_n^2\Big).$$

   ($\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_m$ désignent respectivement les normes euclidiennes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.)
4. En déduire que pour de tels choix de paramètres ρ_1 et ρ_2, on a $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} u^k = u$.
5. Que peut on dire de la suite (λ^k) lorsque $\text{rang}(C) = m$?

Corrigé 2 .

1. Le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique $u \in K$ puisque $K \neq \emptyset$ est convexe fermé et J est une fonction continue, strictement convexe et "infinie à l'infini" (car la matrice A est symétrique définie positive). De plus la convexité de J implique que le minimum u est <u>caractérisé</u> par

   $$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \nabla J(u) + C^T\lambda &=& 0 \\ Cu &=& f \end{array} \right. \qquad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Au + C^T\lambda &=& b \\ Cu &=& f \end{array} \right. .$$

2. Comme la matrice $I - \rho_1 A$ est symétrique, d'après la proposition B.0.2 de l'annexe du poly, on a

$$\beta = \|I - \rho_1 A\|_2 = \sup\{|\mu| : \mu \text{ valeur propore de } I - \rho_1 A\}.$$

Soient $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A. Alors les valeurs propres de $I - \rho_1 A$ sont

$$1 - \rho_1 \lambda_n \leq \ldots \leq 1 - \rho_1 \lambda_1.$$

D'où $\beta = \max\{|1 - \rho_1 \lambda_n|, |1 - \rho_1 \lambda_1|\}$. Donc si

$$0 < \rho_1 < \frac{2}{\lambda_n},$$

on a $\beta < 1$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda^{k+1} - \lambda\right\|_m^2 &= \left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2 + \rho_1^2\rho_2^2\left\|Cu^{k+1} - f\right\|_m^2 + 2\rho_1\rho_2\left(\lambda^k - \lambda, Cu^{k+1} - f\right) \\
&= \left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2 + \rho_1^2\rho_2^2\left\|C(u^{k+1} - u)\right\|_m^2 + 2\rho_2\rho_1\left(C^T(\lambda^k - \lambda), u^{k+1} - u\right) \\
&= \left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2 + \rho_1^2\rho_2^2\left\|C(u^{k+1} - u)\right\|_m^2 - 2\rho_2\left(u^{k+1} - u + (I - \rho_1 A)(u^k - u), u^{k+1} - u\right) \\
&\leq \left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2 + \rho_2(\rho_1^2\rho_2\left\|C\right\|^2 - 2)\left\|u^{k+1} - u\right\|_n^2 + 2\rho_2\beta\left\|u^k - u\right\|_n\left\|u^{k+1} - u\right\|_n \\
&\leq \left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2 + \rho_2(\rho_1^2\rho_2\left\|C\right\|^2 - 2)\left\|u^{k+1} - u\right\|_n^2 + \rho_2\beta\left\|u^{k+1} - u\right\|_n^2 + \rho_2\beta\left\|u^k - u\right\|_n^2.
\end{aligned}$$

Si on pose $\gamma = 2 - 2\beta - \rho_1^2\rho_2\left\|C\right\|^2$, il vient alors

$$\frac{\left\|\lambda^{k+1} - \lambda\right\|_m^2}{\rho_2} + \beta\|u^{k+1} - u\|_n^2 \quad \leq \quad \frac{\left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2}{\rho_2} + \beta\|u_k - u\|_n^2 - \gamma\|u^{k+1} - u\|_n^2.$$

Pour un choix fixé de ρ_1 tel que $\beta < 1$, il est possible de choisir ρ_2 assez petit de maniére à garantir que $\gamma > 0$.

4. La suite $\left(\dfrac{\left\|\lambda^k - \lambda\right\|_m^2}{\rho_2} + \beta\|u_k - u\|_n^2\right)_k$ est décroissante et minorée, donc convergente. Il en résulte que $\|u^k - u\|_n \longrightarrow 0$.

5. Si $\text{rang}(C) = m$, C est surjective, donc $C^\top$ est injective, ce qui implique que la matrice $CC^\top$ est inversible. Or d'après l'algorithme, on a

$$C^\top \lambda^k = \rho_1^{-1}(u^k - u^{k+1}) + b - Au^k,$$

donc en multipliant à gauche par C, puis par $(CC^\top)^{-1}$, on obtient

$$\lambda^k = (CC^\top)^{-1}C(\rho_1^{-1}(u^k - u^{k+1}) + b - Au^k).$$

Puisque $u^k \to u$, le membre de droite converge vers $(CC^\top)^{-1}C(b - Au) = \lambda$, par un calcul analogue, donc la suite (λ^k) converge vers λ.

Exercice 3 . Soit A une matrice $N \times N$ symétrique définie positive, $b \in R^N$ et $f \in \mathbb{R}^N$. On utilise ici la notation $x \geq y$ pour des vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^N$ si $x_i \geq y_i$ pour tout $i = 1, \dots, N$. On notera aussi par $(\cdot, \cdot)$ le produit sacalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

1. u est solution du problème
$$\begin{cases} Au \geq b, \qquad u \geq g \\ \big(Au - b, u - g\big) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

2. u vérifie
$$u \in K, \quad \text{et} \quad \big(Au - b, v - u\big) \geq 0 \ \forall v \in K. \tag{3}$$
avec $K := \{v \in \mathbb{R}^N,\ v \geq g\}$.

3. u est la solution du problème
$$\min_{v \in K} J(v) := \frac{1}{2}(v,\ Av) - (b,\ v). \tag{4}$$

4. u est solution de $\min(Au - b, u - g) = 0$.

Corrigé 3 . Montrons d'abord l'équivalence [(a)$\Longleftrightarrow$(b)]. Supposons que $u \in \mathbb{R}^N$ est solution de (2), donc $u \in K$. De plus pour $v \in K$ quelconque, on a :

$$\begin{aligned} \big(Au - b, u - g\big) = 0 \ &\Longrightarrow \ \big(Au - b, (u - v) + (v - g)\big) = 0 \\ &\Longrightarrow \ \big(Au - b, v - u\big) = \big(Au - b, v - g\big) \end{aligned} \tag{5}$$

Comme $Au - b \geq 0$ et $v - g \geq 0$, alors de (5) on conclut que $(Au - b, v - u) \geq 0$. D'où : u vérifie bien (3).

Inversement, si u est solution de (3), alors $u \geq g$. De plus, si pour $i = 1, \dots, N$, on prend $v^i \in K$ le vecteur défini par :

$$v^i_j = \begin{cases} u_j & \text{si } i \neq j \\ 1 + u_j & \text{si } i = j \end{cases}$$

alors (3) implique que $0 \leq (Au - b, v^i - u) = [Au - b]_i$. On en déduit que $Au - b \geq 0$. D'autre part, $g \in K$ et donc (3) implique : $(Au - b, u - g) \leq 0$. Or $u \geq g$ et $Au \geq b$, donc on a aussi : $(Au - b, u - g) \geq 0$. D'où $(Au - b, u - g) = 0$.

Pour l'equivalence [(b)$\Longleftrightarrow$(c)], il suffit de remarquer que (3) est la condition d'optimalité du problème (4). Cette condition est nécessaire et suffisante puisque la fonction J est convexe.

Commentaires : Les problèmes (2) et (4) sont équivalents donc ils modélisent le même problème physique. Nous avons déja vu (pc4, exo4) que la valeur $J(v)$ est une approximation de l'energie potentielle

$$\mathcal{J}(V) := \frac{1}{2}\int_0^1 |\nabla V(x)|^2\, dx - \int_0^1 f(x)V(x), dx$$

où f est la fonction définie par $f(x) = 1$, et V est un champs vérifiant : $V(x_i) = v_i$. Le problème (4) est donc une approximation de la minimisation de l'energie potentielle de champs V sous la contrainte $V \geq G$.

Exercice 4 . Soit J une fonction continue, strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et "infinie à l'infini" :

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty. \tag{2}$$

On se donne aussi une matrice C de taille $m \times n$ et un vecteur $f \in \mathbb{R}^m$ $(m \leq n)$. On appelle $\mathcal{U}$ l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \{v \in \mathbb{R}^n,\ Cv \leq f\}, \tag{3}$$

où on a utilisé la notation $x \leq y$ pour des vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^m$, si pour tout $i = 1, \ldots, m$, $x_i \leq y_i$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ est convexe et fermé, et que le problème de minimisation :

$$\min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \tag{4}$$

   admet une solution unique que l'on notera u.

2. On introduit la fonction $J_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2\varepsilon} \Big\| \max\big(Cv - f\ ;\ 0\big) \Big\|_m^2, \tag{5}$$

   où l'on désigne par $\max\big(Cv - f\ ;\ 0\big)$ le vecteur de composantes

$$\left(\max\Big(\sum_j C_{ij} v_j - f_i\ ;\ 0 \Big) \right)_{i=1,\cdots,m}.$$

   (a) Montrer que la fonction $G : v \longmapsto \big\|\max\big(Cv - f\ ;\ 0\big)\big\|_m^2$ est convexe, continue.
   (b) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, le gradient de G en v est : $\nabla G(v) = 2C^T \max\big(Cv - f\ ;\ 0\big)$.
   (c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème :

$$\min_{v \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(v) \tag{6}$$

   admet une solution unique que l'on notera u_ε.

3. On veut montrer maintenant que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u. \tag{7}$$

   (a) Montrer que $J(u_\varepsilon) \leq J(u)$ et que u_ε est bornée indépendamment de ε.
   (b) Montrer qu'on peut extraire de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous-suite $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ qui converge vers u.
   (c) En déduire la convergence (7).

4. On suppose maintenant que la fonction J est continûement différentiable. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la condition nécessaire d'optimalité de u_ε s'écrit :
$$\nabla J(u_\varepsilon) + C^T \lambda_\varepsilon = 0, \tag{8}$$
où λ_ε est un vecteur à préciser. Cette condition est - elle suffisante ?
Expliquer pourquoi $C^T\lambda_\varepsilon$ est bornée indépendamment de ε.
5. On supposera dans toute la suite, que la matrice C est de rang m. *(Rappel : Si C est de rang m alors C^T est injective et CC^T est inversible dans $\mathbb{R}^m$.)*
   (a) Montrer que la suite (λ_ε) est bornée.
   (b) En déduire qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que :
$$\nabla J(u) + C^T\lambda = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad Cu \leq f. \tag{9}$$

Corrigé 4 .

1. L'ensemble $\mathcal{U}$ est clairement convexe (car $v \mapsto Cv$ est linéaire donc convexe), et fermé (car $v \mapsto Cv$ est continue).
   Existence du minimum : La fonction J est continue et infinie à l'infini (par hypothèse) et l'ensemble $\mathcal{U}$ est fermé : en vertu du théorème 2.2.2, il existe une solution au problème (4).
   Unicité du minimum : La fonction J est strictement convexe (par hypothèse), et l'ensemble $\mathcal{U}$ est convexe, donc par le théorème 2.3.1, la solution du problème (4) est unique.
   Il existe donc une unique solution au problème (4), notée u.
2. On notera que $G = F \circ A$, avec
$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad v \mapsto Cv - f \quad \text{ et } \quad F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{m} \max(x_i; 0)^2.$$
   (a) La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(x; 0)$ est convexe (faire un dessin), à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La fonction $x \to x^2$ est convexe et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc la composée $x \mapsto \max(x; 0)^2$ est convexe, et donc F aussi.
   Comme A est une application affine et F une application convexe, alors la composée $F \circ A$ est convexe : en effet, il suffit de remarquer que
$$F(A(\theta u + (1-\theta)v)) = F(\theta A(u) + (1-\theta)A(v)) \leq \theta F(A(u)) + (1-\theta)F(A(v)).$$
   Ainsi $G = F \circ A$ est convexe.
   Enfin, G est continue comme composée d'applications continues (car on notera que $x \mapsto \max(x; 0)$ est continue).

   (b) L'application $x \mapsto \max(x; 0)^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $2x$, et sur $]-\infty, 0[$, de dérivée nulle. Comme on a continuité de la dérivée en zéro, on en déduit que $x \mapsto (x, 0)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$2\max(x; 0).$$

(On notera que $x \mapsto \max(x;0)$ n'est pas dérivable en zéro, d'où l'intérêt de prendre le carré !) On obtient alors

$$\nabla F(x) = \big(\ 2\max(x_i;0)\ \big)_{1\le i\le m} = 2\max(x;0).$$

Donc G est différentiable comme composée d'applications différentiables, et la formule de composition des différentielles donne, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} DG(v)h &= DF(A(v))DA(v)h \\ &= \langle \nabla F(A(v)), Ch\rangle \\ &= \left\langle C^\top 2\max(Cv-f;0), h\right\rangle, \end{aligned}$$

et donc

$$\nabla G(v) \;=\; 2C^\top \max(Cv-f;0).$$

(c) On a, pour $\varepsilon > 0$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2\varepsilon}G(v).$$

Existence du minimum : la fonction J_ε est continue, car J et G le sont, et on a $J_\varepsilon \ge J$. Comme J est infinie à l'infini, J_ε aussi, donc J_ε admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$ (Th. 2.2.2).

Unicité : J est strictment convexe, comme somme d'une fonction strictement convexe (J) et d'une fonction convexe ($\frac{1}{2\varepsilon}G$). Le minimum de J_ε sur $\mathbb{R}^n$ est donc unique (Th. 2.3.1).

Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème $\min_{v\in\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(v)$ admet donc une solution unique, notée u_ε.

3. **(a)** On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$J(u_\varepsilon) \;\le\; J_\varepsilon(u_\varepsilon) \;\le\; J_\varepsilon(u) \;=\; J(u), \tag{10}$$

où la première inégalité est triviale, la seconde provient du fait que u_ε est le minimum de J_ε sur $\mathbb{R}^n$, et la dernière égalité provient du fait que $u \in \mathcal{U}$, et donc $G(u) = 0$.

Ainsi $J(u_\varepsilon) \le J(u)$ est bornée, indépendamment de ε, et comme J est infinie à l'infini, cela implique que u_ε est borné, indépendamment de ε.

(b) La suite (u_ε) est bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(u_{\varepsilon'})$ qui converge vers un certain $u' \in \mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon' \to 0$. Par passage à la limite dans la relation $J(u_{\varepsilon'}) \le J(u)$, comme J est continue, on obtient

$$J(u') \;\le\; J(u),$$

et donc, puisque u est le minimum de J sur $\mathcal{U}$,

$$J(u') \;\le\; J(v), \qquad \forall v \in \mathcal{U}. \tag{11}$$

De plus,

$$0 \;\leq\; G(u_{\varepsilon'}) \;=\; 2\varepsilon'(J_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}) - J(u_{\varepsilon'})) \;\leq\; 2\varepsilon'(J(u) - J(u_{\varepsilon'})),$$

où la dernière inégalité provient de (10). Le terme $J(u) - J(u_{\varepsilon'})$ étant borné, faisant tendre ε' vers zero on obtient (comme G est continue)

$$G(u') = 0, \qquad \text{i.e. } u' \in \mathcal{U}. \tag{12}$$

Avec (11) et (12), on en déduit que u' est solution de $\min_{v \in \mathcal{U}} J(v)$. Mais on a vu à la question 1 que ce problème a une unique solution, u, donc nécessairement, $u' = u$.

(c) Le point précédent montre que *toute* sous-suite convergente de (u_ε) converge nécessairement vers le point u. Donc (u_ε) a un unique point d'adhérence u. Comme (u_ε) est bornée, cela implique que toute la suite (u_ε) converge vers u (sinon, il existerait une sous-suite $(u_{\varepsilon''})$ de (u_ε) telle que $\|u_{\varepsilon''} - u\| \geq \eta > 0$, mais alors cette sous-suite étant bornée admettrait elle-même une sous-suite convergente, qui serait encore une sous-suite de (u_ε), mais qui ne convergerait pas vers u, d'où la contradiction).

4. Comme J et G sont différentiables, J_ε aussi. La condition d'optimalité satisfaite par u_ε, la solution du problème $\min_{v \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(v)$, est donnée par l'inéquation d'Euler (Th. 3.2.3). Ici, on n'a pas de contraintes (on minimise sur $\mathbb{R}^n$ tout entier), donc cette inéquation devient (Th. 3.2.5)

$$\nabla J_\varepsilon(u_\varepsilon) \;=\; 0.$$

D'où

$$\nabla J(u_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\nabla G(u_\varepsilon) \;=\; \nabla J(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} C^\top \max(Cu_\varepsilon - f; 0) \;=\; 0$$

et donc

$$\nabla J(u_\varepsilon) + C^\top \lambda_\varepsilon = 0 \quad \text{ avec } \quad \lambda_\varepsilon = \frac{\max(Cu_\varepsilon - f; 0)}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Cette condition est suffisante, car J_ε est convexe (Th. 3.2.4).

Par (13), on a $C^\top \lambda_\varepsilon = -\nabla J(u_\varepsilon)$. Comme u_ε est borné, et ∇J est continu (J est continûment différentiable), on en déduit que $\nabla J(u_\varepsilon)$ est borné, et donc $C^\top \lambda_\varepsilon$ est borné, indépendamment de ε.

5. On suppose C de rang m, i.e. C surjective. Cela implique que $C^\top$ est injective, et donc que la matrice $CC^\top$ est inversible.

(a) Par (13), multipliant à gauche la première relation par C, puis par $(CC^\top)^{-1}$, on obtient

$$\lambda_\varepsilon \;=\; -(CC^\top)^{-1} C \nabla J(u_\varepsilon).$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus tend vers $-(CC^\top)^{-1} C \nabla J(u)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donc λ_ε converge vers $\lambda := -(CC^\top)^{-1} C \nabla J(u)$.

(b) En passant à la limite dans (13), on obtient

$$\nabla J(u) + C^\top \lambda \;=\; 0.$$

De plus, $\lambda_\varepsilon \geq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc à la limite $\lambda \geq 0$. Enfin, l'inéquation $Cu \leq f$ provient tout simplement du fait que $u \in \mathcal{U}$. Nous venons de montrer l'existence de λ qui vérifie (9). Enfin, un tel λ est unique puisque donné par $\lambda = -(CC^\top)C\nabla J(u)$.