

## Annexe D

# Systèmes optimaux basés sur le modèle de Navier-Stokes

### Sommaire

---

<b>D.1 Minimisation de la traînée</b> . . . . .	<b>250</b>
D.1.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	251
D.1.2 Approche du gradient par les sensibilités . . . . .	256
D.1.3 Approche du gradient par l'équation adjointe . . . . .	257
<b>D.2 Écoulement cible</b> . . . . .	<b>258</b>

---

L'objectif de cette annexe est de déterminer, pour une fonctionnelle coût donnée, le système optimal associé au cas où le modèle de Navier-Stokes est utilisé comme équations d'état. Cette approche, à l'opposé de ce qui est réalisé dans ce mémoire, a jusqu'ici rencontré un grand intérêt en contrôle d'écoulement : citons par exemple les travaux de Joslin *et al.* (1995); Gunzburger (1999, 2000); He *et al.* (2000); Bewley *et al.* (2001); Protas et Styczek (2002); Homescu *et al.* (2002) et cela en dépit d'un formalisme assez lourd à mettre en œuvre comme le lecteur pourra le constater par la suite.

Dans ce mémoire, nous cherchons à minimiser la traînée générée par un cylindre circulaire et cela en le faisant tourner autour de son axe principal de manière instationnaire. Cet objectif peut se traduire mathématiquement par différentes fonctionnelles  $\mathcal{J}$  que l'on souhaite optimiser sous les contraintes du modèle de Navier-Stokes. A la section D.1, on prendra comme fonctionnelle objectif directement la traînée (Gunzburger, 1997b). Par la suite, nous poserons le problème différemment (section D.2), et nous chercherons à déterminer le contrôle qu'il faut appliquer à l'écoulement pour que celui-ci tende vers une autre organisation connue pour générer une plus faible traînée. D'après Protas et Wesfreid (2002), l'écoulement générant, pour un nombre de Reynolds donné, le plus faible coefficient de traînée, est l'écoulement instable correspondant, solution qu'il est relativement aisé à calculer.

Pour déterminer le système optimal associé à la minimisation de la fonctionnelle représentative de la traînée (§ D.1), les trois méthodes d'optimisation présentées à la section 2.4, à savoir méthode *des multiplicateurs de Lagrange*, approche du gradient par *les sensibilités* et approche du gradient par *l'équation adjointe* seront successivement utilisées. Dans le cas où l'on souhaite approcher l'écoulement de la solution instable (§ D.2), seule la méthode des multiplicateurs de Lagrange sera mise en œuvre.

Nous considérons encore dans ce chapitre, que la loi de contrôle à déterminer est la vitesse tangentielle du cylindre que l'on cherche sous la forme d'une fonction harmonique  $\gamma(t) = A \sin(2\pi St_f t)$  où  $A$  est l'amplitude et  $St_f$  le nombre de Strouhal du contrôle. La loi de contrôle comportant deux degrés de liberté, la méthode des sensibilités sera moins efficace que les deux autres méthodes car il sera alors nécessaire de résoudre un système d'équations linéaires supplémentaire.

Le système optimal donnera donc les gradients de la fonctionnelle à optimiser par rapport à l'amplitude  $A$  et au nombre de Strouhal  $St_f$  du contrôle. Une fois ces gradients évalués, une des méthodes de gradient

présentées à l'annexe C pourra être utilisée pour minimiser la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$ .

Les équations d'état sont données par le modèle de Navier-Stokes (1.3) auquel on ajoute des conditions initiales et aux limites appropriées au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = A \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_c \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

où,  $\mathbf{b}$  est une fonction donnée, qui peut éventuellement dépendre du temps pour tenir compte des conditions aux limites de type non réfléchissant imposées à la simulation numérique (section 1.3.2) et où  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent au cylindre au point  $\mathbf{x}$ .

Le système (D.1) peut s'écrire formellement  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, p, A, St_f) = \mathbf{0}$ .

Dans un premier temps, nous allons déterminer le système optimal correspondant à la minimisation de la traînée (§ D.1), puis nous déterminerons le système optimal lorsque l'on souhaite approcher l'écoulement d'un écoulement donné (§ D.2).

## D.1 Minimisation de la traînée

Dans cette section, notre objectif est de minimiser une quantité physique représentative de la traînée. Le problème revient donc à minimiser la fonctionnelle objectif donnée par l'expression<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f) = & - \int_0^T \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \frac{1}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u}) \, d\Omega \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\alpha}{2} A^2 + \frac{\beta}{2} St_f^2 \right) \, d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où  $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  est le tenseur des vitesses de déformation.

Les deux<sup>2</sup> premiers termes de la fonctionnelle (D.2) modélisent mathématiquement la traînée (Gunzburger, 1997b). Le troisième terme est un terme dit de régularisation, pour des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  faibles, ou de pénalisation, pour des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  élevés, qui permettent de prendre en compte l'importance du coût lié au contrôle.

Le problème d'optimisation avec contraintes peut alors s'énoncer de la manière suivante :

*Déterminer les variables d'état  $(\mathbf{u}, p)$  et les variables de contrôle  $(A, St_f)$  qui minimisent la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f)$  sous contraintes des équations d'état  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, p, A, St_f) = \mathbf{0}$ .*

Ce problème peut se résoudre de trois manières (voir section 2.4) :

1. par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (§ D.1.1),

---

1. Attention : on a convenu ici de noter  $A : B = A_{ij} B_{ji}$  le produit doublement contracté. D'autres auteurs font le choix inverse.

2. En raison de l'incompressibilité du fluide ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), le premier terme de cette fonctionnelle devrait être omis, mais pour des raisons qui deviendront claires lors des développements ultérieurs, nous conservons ce terme dans la formulation de la fonctionnelle.

2. par l'approche du gradient par les sensibilités (§ D.1.2),
3. par l'approche du gradient par l'équation adjointe (§ D.1.3).

### D.1.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange  $(\mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*)$  pour imposer<sup>3</sup> chacune des contraintes du problème. On introduit alors une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lagrange :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, A, St_f, \mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f) \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\mathbf{u} - A \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t}) \, d\Gamma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right) \, d\Omega \, dt. \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation initial avec contraintes est alors remplacé par un problème d'optimisation sans contrainte que l'on peut énoncer de la manière suivante :

*Déterminer les variables d'état  $(\mathbf{u}, p)$ , les variables de contrôle  $(A, St_f)$  et les variables adjointes  $(\mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*)$  telles que la fonctionnelle de Lagrange  $\mathcal{L}$  présente un extremum.*

La fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}$  admet un extremum lorsque  $\mathcal{L}$  est rendue "stationnaire" par rapport à chacun de ses arguments. En effet, le calcul des variations impose alors  $\delta \mathcal{L} = 0$ , soit :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \delta A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial St_f} \delta St_f + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^*} \delta \mathbf{u}^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^*} \delta p^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}^*} \delta \boldsymbol{\xi}^* = 0.$$

En supposant par la suite, les variables  $(\mathbf{u}, p, A, St_f, \mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*)$  indépendantes<sup>4</sup>, les dérivées de Fréchet<sup>5</sup> de  $\mathcal{L}$  doivent être identiquement nulles<sup>6</sup> dans toutes les directions admissibles  $\mathbf{u}^*, p^*, \mathbf{u}, p, A, St_f$ , *i.e.* quelles que soient les variations  $\delta \mathbf{u}^*, \delta p^*, \delta \mathbf{u}, \delta p, \delta A, \delta St_f$ .

#### ▷ Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant les variables adjointes

On remarque immédiatement que l'annulation des dérivées de Fréchet suivant les variables adjointes  $\mathbf{u}^*$ ,  $p^*$  et  $\boldsymbol{\xi}^*$  redonne les équations d'état (D.1).

#### ▷ Annulation de la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} &= - \int_0^T \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \, dt + \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\xi}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u}) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u}) \right) \, d\Omega \, dt = 0. \end{aligned}$$

3. La variable  $\mathbf{u}^*$  permet d'imposer l'équation de Navier-Stokes du système d'état, la variable  $p^*$  l'équation de continuité et la variable  $\boldsymbol{\xi}^*$  les conditions aux limites sur  $\Gamma_c$ . Les autres conditions aux limites seront imposées *a posteriori* sur chacune des solutions.

4. Ce qui est faux en toute rigueur car les variables d'état  $(\mathbf{u}, p)$  et les variables de contrôle  $A$  et  $St_f$  sont liées par l'équation d'état  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, p, A, St_f) = \mathbf{0}$ .

5. Par définition, la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  au point  $x_0$  dans la direction  $\delta x$  est donnée par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(x_0 + \varepsilon \delta x) - \mathcal{L}(x_0)}{\varepsilon}.$$

6. On rappelle que cette condition n'est qu'une condition nécessaire à l'obtention d'un extremum global. Par cette approche, nous ne sommes donc pas assurés que l'extremum trouvé soit global.

Afin de mettre en évidence l'équation adjointe, il reste à factoriser<sup>7</sup> chaque terme intégral par  $\delta \mathbf{u}$ . Pour faciliter la lecture, nous allons maintenant regrouper les termes qui vont être intégrés de la même manière.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = & - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} (p + p^*) \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \, dt}_I + \underbrace{\frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt}_{II} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\xi}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \, dt}_{III} \\ & - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega \, dt}_{IV} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u}) \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt}_V \\ & + \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left( \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u}) \right) \, d\Omega \, dt}_{VI} = 0. \end{aligned}$$

◇ Contribution du terme  $I$  :

En appliquant la relation (D.3), on obtient :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} (p + p^*) \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \, dt = - \int_0^T \int_{\Gamma} (p + p^*) \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla (p + p^*) \, d\Omega \, dt.$$

◇ Contribution du terme  $II$  :

En utilisant la définition du tenseur des vitesses de déformation, puis en tenant compte de la relation

$$A : B^T = A^T : B \quad (\text{D.4})$$

valable pour tout couple  $(A, B)$  de tenseur d'ordre deux, et, enfin, en remarquant que le tenseur  $D(\mathbf{u})$  est symétrique, on trouve :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} [D(\mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u} + D(\mathbf{u}) : (\nabla \delta \mathbf{u})^T] \\ &= \frac{1}{2} [D(\mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u} + D(\mathbf{u})^T : \nabla \delta \mathbf{u}] \\ &= D(\mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Or, pour tout tenseur du second ordre  $A$  et pour tout vecteur  $\mathbf{U}$ , on a :

$$\nabla \cdot (A\mathbf{U}) = \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot (A^T)) + A : \nabla \mathbf{U}. \quad (\text{D.5})$$

d'où

$$D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) = D(\mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (D(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}) - \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (D(\mathbf{u})^T)).$$

Finalement, on en déduit que<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt &= \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} (D(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \, dt - \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \, d\Omega \, dt \\ &= \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (D(\mathbf{u})^T \mathbf{n}) \, d\Gamma \, dt - \frac{2}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \, d\Omega \, dt. \end{aligned}$$

7. Pour cela, nous allons devoir réaliser plusieurs intégrations par parties en utilisant la relation :

$$\int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \nabla f \, d\Omega = \int_{\Gamma} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (\text{D.3})$$

8. Pour tout tenseur du second ordre  $A$  et tout couple de vecteurs  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ , on a :

$$\mathbf{V} \cdot A\mathbf{U} = A^T \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}. \quad (\text{D.6})$$

◇ Contribution du terme *III* :

Le produit scalaire étant commutatif, on obtient tout simplement :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\xi}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}^* \, d\Gamma \, dt.$$

◇ Contribution du terme *IV* :

Puisque  $\mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u})}{\partial t} - \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t}$ , on a :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} \, d\Omega \, dt = - \int_{\Omega} [\mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u}]_{t=0}^{t=T} \, d\Omega + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} \, d\Omega \, dt.$$

◇ Contribution du terme *V* :

Pour tout couple de vecteurs  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ , on a  $\nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U}) \mathbf{V}$ . Par conséquent, en considérant que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ , on peut en déduire :

$$(\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u}) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}).$$

En utilisant la relation (D.5), on obtient immédiatement :

$$\mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u})) = \underbrace{\nabla \cdot [(\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}) \mathbf{u}^*]}_{T_1} - \underbrace{(\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^*)}_{T_2}.$$

Pour simplifier le terme  $T_1$ , on utilise la relation  $(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) \mathbf{W} = (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{W}) \mathbf{X}$ , valable pour tout triplet de vecteurs  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W})$ . On trouve alors, d'une part, que

$$(\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{u}^* = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \delta \mathbf{u}$$

et, d'autre part, que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}) \mathbf{u}^* &= (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u}) \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^*) \delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Pour simplifier le terme  $T_2$ , on peut montrer, en développant terme à terme les deux membres de l'expression, que :

$$(\delta \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}^* = \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T) \mathbf{u}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} + (\nabla \delta \mathbf{u}) \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt &= - \int_0^T \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{n} + (\mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u}) \mathbf{n}) \, d\Gamma \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T) \mathbf{u} \, d\Omega \, dt. \end{aligned}$$

◇ Contribution du terme *VI* :

En utilisant à nouveau la relation (D.5) (une fois dans un sens, une fois dans l'autre) et l'expression (D.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) &= \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - (\nabla \delta \mathbf{u})^T : (\nabla \mathbf{u}^*) \\ &= \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - (\nabla \mathbf{u}^*)^T : (\nabla \delta \mathbf{u}) \\ &= \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}^*)^T \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)). \end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left( \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u}) \right) d\Omega dt &= \frac{1}{Re} \left[ \int_0^T \int_{\Gamma} ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{n} d\Gamma dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) d\Omega dt \right]. \end{aligned}$$

#### RÉCAPITULATION :

En regroupant tous les termes évalués précédemment, il vient<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + 2D(\mathbf{u}^*)\mathbf{u} + \nabla p^* + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla p - \frac{2}{Re} \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \right) d\Omega dt \\ + \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \delta \mathbf{u} \cdot \left( \left( \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right) + \frac{1}{Re} (\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \right) d\Gamma dt \\ - \int_0^T \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot ((p + p^* + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{n}) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}^* d\Gamma dt - \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*]_0^T d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la valeur de  $\delta \mathbf{u}$ . Il faut donc qu'elle le soit en particulier si on choisit :

1.  $\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ ,  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  et  $(\nabla \delta \mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma$ , et  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  à  $t = T$ . On obtient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + 2D(\mathbf{u}^*)\mathbf{u} + \nabla p^* + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* = -\nabla p + \frac{2}{Re} \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{D.7})$$

2.  $\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_c$ ,  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma \setminus \Gamma_c$ ,  $(\nabla \delta \mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma$ , et  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  à  $t = T$ . On obtient alors :

$$\boldsymbol{\xi}^* = -(p + p^* + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{n} - \left( \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* - \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) \right) \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (\text{D.8})$$

3.  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma$  et  $(\nabla \delta \mathbf{u})\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  sur  $\Gamma$ , alors :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (\text{D.9})$$

4.  $\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  sur  $\Omega$ . Puisque  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  à  $t = 0$ , on obtient :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{à } t = T \quad \text{sur } \Omega. \quad (\text{D.10})$$

---

9. Il est éventuellement encore possible de transformer cette expression en faisant intervenir l'équation d'état (D.1).

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant  $p$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p = - \int_0^T \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \delta p \, d\Omega \, dt = 0.$$

A l'aide de la relation (D.3), le second terme devient :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \delta p \, d\Omega \, dt = - \int_0^T \int_{\Gamma} \delta p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega \, dt$$

ce qui permet de trouver :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \delta p (\nabla \cdot \mathbf{u}^* - \nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \delta p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \, dt = 0.$$

Il est naturellement immédiat de simplifier cette dernière équation en utilisant l'équation de la continuité :  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Par ailleurs, la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  selon  $p$  devant être nulle quel que soit le choix de  $\delta p$ , il faut que ce soit le cas en particulier, si on choisit :

1.  $\delta p = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\delta p \neq 0$  dans  $\Omega$ . On trouve alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{D.11})$$

2.  $\delta p \neq 0$  sur  $\Gamma$ . On obtient :

$$\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le système adjoint est donc constitué des équations (D.7) et (D.11) munies des conditions aux limites (D.9) et de la condition terminale (D.10). Il a pour expression :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + 2D(\mathbf{u}^*)\mathbf{u} + \nabla p^* + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* = -\nabla p + \frac{2}{Re} \nabla \cdot D(\mathbf{u}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}^*(t = T) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

Ce système adjoint étant muni d'une condition terminale, il s'intègre en temps décroissant (de  $t = T$  à  $t = 0$ ) connaissant la solution des équations d'état (D.1).

Il reste encore à évaluer les dérivés de Fréchet de la fonctionnelle de Lagrange  $\mathcal{L}$  suivant les variables de contrôle.

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant l'amplitude  $A$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} \delta A = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \delta A (\alpha A + \sin(2\pi S t_f t)) \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma \, dt = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée quelle que soit la variation  $\delta A$ , on aboutit à :

$$\alpha A + \boldsymbol{\xi}^* \cdot \sin(2\pi S t_f t) \mathbf{t} = 0$$

Compte tenu de la relation (D.8), cette dernière équation s'écrit ( $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) :

$$\alpha A + \left[ \left( \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t} = 0. \quad (\text{D.13})$$

Cette relation n'est vérifiée que pour le minimum de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$ . Si le minimum n'est pas atteint, cette même expression donne le gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport à l'amplitude  $A$ .

▷ **Annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant le nombre de Strouhal  $St_f$  :**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial St_f} \delta St_f = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \delta St_f (\beta St_f + 2\pi A t \cos(2\pi St_f t) \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{t}) d\Gamma dt = 0.$$

En suivant la même démarche que pour l'amplitude  $A$ , on obtient :

$$\beta St_f + 2\pi A t \left[ \left( \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \cos(2\pi St_f t) \mathbf{t} = 0. \quad (\text{D.14})$$

Le système optimal est donc constitué des équations d'état (D.1), des équations adjointes (D.12) et des conditions d'optimalité (D.13) et (D.14).

### D.1.2 Approche du gradient par les sensibilités

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction de ce chapitre, utiliser les sensibilités pour résoudre un problème de contrôle optimal n'est pas le plus judicieux car le coût numérique de la méthode est plus élevé. Pour illustrer cela, nous allons mettre en oeuvre sur le cas résolu précédemment par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Formellement, le gradient de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c}.$$

Or, dans notre exemple, nous avons  $\mathcal{J}(\phi, c) \equiv \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f)$ .

En appliquant la relation précédente, nous trouvons que les deux composantes du gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux paramètres de contrôle  $A$  et  $St_f$  supposés indépendants s'écrivent :

$$\frac{d\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f)}{dA} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dA} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p} \frac{dp}{dA} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial A}$$

et

$$\frac{d\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, A, St_f)}{dSt_f} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dSt_f} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p} \frac{dp}{dSt_f} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial St_f}.$$

Puisque la fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  dépend explicitement de  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $A$  et  $St_f$ , les termes  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial A}$  et  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial St_f}$  seront "faciles" à déterminer.

Il reste donc à déterminer les sensibilités  $\frac{d\mathbf{u}}{dA}$ ,  $\frac{dp}{dA}$ ,  $\frac{d\mathbf{u}}{dSt_f}$  et  $\frac{dp}{dSt_f}$ . Pour alléger les notations, on convient de noter :

$$\mathbf{u}_A \equiv \frac{d\mathbf{u}}{dA}, \quad \mathbf{u}_{St_f} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{dSt_f}, \quad p_A \equiv \frac{dp}{dA} \quad \text{et} \quad p_{St_f} \equiv \frac{dp}{dSt_f}.$$

Or, nous avons montré à la section 2.4.2, que les sensibilités vérifiaient la relation (2.33), soit :

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} = - \frac{\partial F}{\partial c}.$$

Les deux systèmes linéaires à résoudre sont donc les suivants :



$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}_A + \frac{\partial F}{\partial p} p_A = -\frac{\partial F}{\partial A} \quad (\text{D.15})$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u}_{St_f} + \frac{\partial F}{\partial p} p_{St_f} = -\frac{\partial F}{\partial St_f}. \quad (\text{D.16})$$

Les systèmes (D.15) et (D.16) s'écrivent encore respectivement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_A}{\partial t} + (\mathbf{u}_A \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_A + \nabla p_A - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_A = 0 \\ \mathbf{u}_A = \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t} \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_{St_f}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{St_f} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{St_f} + \nabla p_{St_f} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}_{St_f} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{St_f} = 0 \\ \mathbf{u}_{St_f} = 2\pi A St_f t \cos(2\pi St_f t) \mathbf{t} \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

Finalement, la résolution des systèmes linéaires (D.15) et (D.16) donne les sensibilités nécessaires à l'évaluation du gradient de la fonctionnelle objectif.

### D.1.3 Approche du gradient par l'équation adjointe

A la section 2.4.3, nous avons montré que le gradient d'une fonctionnelle objectif  $\mathcal{J}$  par rapport à ses variables de contrôle  $c$  était donné par l'équation (2.35), soit pour mémoire :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = -\lambda^* \frac{\partial F(\phi, c)}{\partial c} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c}$$

où  $\lambda$  est une solution de l'équation adjointe du système optimal.

Connaissant les solutions  $(\mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*)$  du système adjoint (D.12), nous allons déterminer les gradients de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport aux deux variables de contrôle, d'une part l'amplitude  $A$  et, d'autre part, le nombre de Strouhal  $St_f$ .

#### ▷ Composante du gradient suivant l'amplitude

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dA} &= -\int_0^T \int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}^* \ p^* \ \boldsymbol{\xi}^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(2\pi St_f t) \mathbf{t} \end{pmatrix} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_c} \alpha A d\Gamma dt \\ \frac{d\mathcal{J}}{dA} &= \int_0^T \int_{\Gamma_c} (\alpha A + \sin(2\pi St_f t) \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{t}) d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation (D.8), on sait que :

$$\boldsymbol{\xi}^* = -(p + p^* + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{n} - \left( \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* - \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}.$$

d'où, finalement :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dA} = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \alpha A + \left[ \left( \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t} \right) d\Gamma dt. \quad (\text{D.17})$$

#### ▷ Composante du gradient suivant le nombre de Strouhal

$$\frac{d\mathcal{J}}{dSt_f} = - \int_0^T \int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}^* p^* \boldsymbol{\xi}^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi A t \cos(2\pi St_f t) \mathbf{t} \end{pmatrix} d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_c} \beta St_f d\Gamma dt.$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dSt_f} = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \beta St_f + 2\pi A t \left[ \left( \frac{2}{Re} D(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u}^* \right) \mathbf{n} \right] \cdot \cos(2\pi St_f t) \mathbf{t} \right) d\Gamma dt. \quad (\text{D.18})$$

On constate que les équations (D.17) et (D.18) sont identiques aux équations (D.13) et (D.14) déterminées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Le gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux variables de contrôle étant maintenant connu, on va pouvoir mettre en oeuvre des méthodes d'optimisation basées sur les gradients : plus grande descente, Newton, quasi-Newton à la BFGS, ... (voir annexe C).

## D.2 Écoulement cible

Dans cette section, nous allons seulement utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, car, en pratique, c'est encore la méthode la plus utilisée. L'objectif est ici d'approcher l'écoulement d'un écoulement de référence : d'après Protas et Wesfreid (2002), l'écoulement présentant la traînée la plus faible pour un nombre de Reynolds donné est l'écoulement instable (stationnaire ou non selon le régime) qui est associé à la solution stable. Dans ce cas, l'objectif final est encore de diminuer la traînée mais cela passe par la minimisation d'une fonctionnelle bien différente de celle utilisée à la section D.1. La méthode étant identique à celle de la section D.1.1, seuls les résultats seront donnés ici.

La fonctionnelle objectif prend donc la forme suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, A, St_f) = \int_0^T \int_{\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_T\|_2^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\alpha}{2} A^2 + \frac{\beta}{2} St_f^2 \right) d\Gamma dt. \quad (\text{D.19})$$

où  $\mathbf{u}_T$  est le champ de vitesse que l'on souhaite obtenir par application du contrôle.

Le système d'état étant identique au cas précédent, la fonctionnelle de Lagrange à optimiser se déduit facilement de la précédente. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, A, St_f, \mathbf{u}^*, p^*, \boldsymbol{\xi}^*) &= \int_0^T \int_{\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_T\|_2^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\alpha}{2} A^2 + \frac{\beta}{2} St_f^2 \right) d\Gamma \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\mathbf{u} - A \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t}) d\Gamma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right) d\Omega dt. \end{aligned}$$

En suivant la même procédure qu'à la section D.1.1, on détermine par annulation de la dérivée de Fréchet de  $\mathcal{L}$  suivant les variables d'état  $\mathbf{u}, p$ , les équations adjointes du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + 2D(\mathbf{u}^*) \mathbf{u} + \nabla p^* + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_T - \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \\ \mathbf{u}^*(t = T) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

et la condition de compatibilité :

$$\boldsymbol{\xi}^* = -p^* \mathbf{n} - \left( \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^* + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^*)^T \right) \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (\text{D.21})$$

Finalement, à l'aide de cette relation, nous pouvons écrire les conditions d'optimalité par rapport à l'amplitude :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dA} = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \alpha A + \left[ \left( \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^* + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^*)^T \right) \mathbf{n} \right] \cdot \sin(2\pi St_f t) \mathbf{t} \right) d\Gamma dt \quad (\text{D.22})$$

et au nombre de Strouhal :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dSt_f} = \int_0^T \int_{\Gamma_c} \left( \beta St_f + 2\pi A t \left[ \left( \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^* + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}^*)^T \right) \mathbf{n} \right] \cdot \cos(2\pi St_f t) \mathbf{t} \right) d\Gamma dt. \quad (\text{D.23})$$

