Correction chapitre 10

Exercice 1. Il s'agit de la fonction de répartition empirique de l'échantillon. On a déjà vu dans la démonstration du théorème de Glivenko Cantelli que
$E[\hat{F_n}(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[I_{X_i\leq x}] = P(X_1 \leq x) = F(x)$ ($\hat{F_n}(x)$ est donc un estimateur sans biais de $F(x)$) et que la loi forte des grands nombres appliquées aux variables de Bernoulli indépendantes $1_{X_i\leq x}$ montre que $\hat{F_n}(x)$ converge p.s. vers $F(x)$ ($\hat{F_n}(x)$ est donc un estimateur fortement convergent de $F(x)$).

Exercice 2.

(1) $E[(T_n-\theta)^2] = (n-\theta)^2/n$ donc T_n ne converge pas en moyenne quadratique vers θ (la question suivante montre qu'il ne peut pas non plus converger en moyenne quadratique vers autre chose que θ).

(2) Pour tout $\epsilon > 0$, $P(|T_n-\theta| > \epsilon) \leq \frac{1}{n}$, donc T_n converge en probabilité vers θ.

Exercice 3.

(1) Pour tout $|s| < \frac{1+\theta}{\theta}$, $G(s) = E[s^X] = \sum_{k\geq 1}\frac{s^k\theta^{k-1}}{(1+\theta)^k} = \frac{s}{1+(1-s)\theta}$.

(2) On en déduit $G'(s) = \frac{1+\theta}{(1+(1-s)\theta)^2}$ donc $E[X] = G'(1) = 1+\theta$.
On calcule également $G''(1) = 2\theta(1+\theta)$ donc $Var(X) = \theta$.

(3) $\log(\prod)i = 1^n P_\theta(X_i = k_i)) = \sum_{i=1}^n (k_i-1)\log(\theta) - \sum_{i=1}^n k_i\log(1+\theta)$. La vraisemblance est donc maximale pour $\hat{\theta}$ vérifiant
$\frac{\sum_{i=1}^n k_i - n}{\hat{\theta}} - \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{1+\hat{\theta}}$. On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ
$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1$. La question précédente montre qu'il est sans biais et fortement convergent (loi forte des grands nombres).

Exercice 4.

(1) $\prod)i = 1^n P_\theta(X_i = k_i) = \frac{1}{N^n}1_{\max k_i\leq N}$ est maximale pour $N = \max(k_i)$. l'estimateur du maximum de vraisemblance de N est donc $\hat{N} = \max(X_i)$.

(2) $\prod)i = 1^n f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^n}1_{\max x_i\leq\theta}$ est maximale pour $\theta = \max(x_i)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donc $\hat{\theta} = \max(X_i)$.
Sa fonction de répartition est $x \mapsto (\frac{x}{\theta})^n 1_{0\leq x\leq\theta}$.

(3) $\prod)i = 1^n f_\theta(x_i) = \frac{1}{2^n\theta^n}1_{\max|x_i|\leq\theta}$ est maximale pour $\theta = \max(|x_i|)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donc $\hat{\theta} = \max(|X_i|)$.
Sa fonction de répartition est là encore $x \mapsto (\frac{x}{\theta})^n 1_{0\leq x\leq\theta}$.

Exercice 5. $\prod_{i=1}^n f_{a,b}(x_i) = \frac{1}{(b-a)^n}1_{\min x_i\geq a}1_{\max x_i\leq b}$ est maximale pour $(a,b) = (\min(x_i), \max(x_i))$.
L'estimateur du maximum de vraisemblance de (a,b) est donc $(\hat{a},\hat{b}) = (\min(X_i), \max(X_i))$.
$\hat{a}_n$ est décroissant et minoré, donc converge p.s., $\hat{b}_n$ est croissant majoré, donc converge p.s.. On calcule aisément les fonctions de répartition qui montrent les convergence en proba vers respectivement a et b. On en déduit que les deux estimateurs sont fortement convergents. (Ils sont cependant biaisés).

Exercice 6.

(1) $\prod_{i=1}^n f_{\theta,\gamma}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\exp(-\sum_{i=1}^n (x-\gamma)/theta)1_{\min x_i\geq\gamma}$ est croissante en fonction de γ sur $\gamma \leq \min(x_i)$. Elle est donc maximale pour $\gamma = \min(x_i)$, et pour θ vérifiant
$-n/theta + (\sum_{i=1}^n (x_i)-\gamma)/\theta^2 = 0$
On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance :
$ga\hat{m}ma = \min(X_i), \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \min(X_i)$.

(2) $X+\gamma$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$. On en déduit aisément $E[X]=\theta-\gamma$ et $Var(X)=\theta^2$. D'où les estimateurs
$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2}$ et $\hat{\gamma}=\hat{\theta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

Exercice 7.

(1) $\log\prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)=\frac{n}{2}\log(\theta)-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2-\frac{n}{2}\log(2\pi)$ est maximal pour
$\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.
On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance :
$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) X suit une loi normale centrée de variance $\frac{1}{\theta}$, donc $n\theta/\hat{\theta}$ suit une loi du chi deux à n degrés de liberté. On en déduit $E[\hat{\theta}]=\frac{n\theta}{n-2}$. Un estimateur non biaisé de θ est donc $(n-2)/n\hat{\theta}$. La loi forte des grands nombres implique la convergence p.s. de $1/\hat{\theta}$ vers $\frac{1}{\theta}$, on en déduit que $(n-2)/n\hat{\theta}$ est un estimateur fortement convergent de θ.

Exercice 8.

(1) Pour $x\in[0,a]$, $P(X\le x)=p\frac{x}{a}+(1-p)\frac{x}{b}$
Pour $x\in[a,b]$, $P(X\le x)=p+(1-p)\frac{x}{b}$.
La densité de X vaut donc $x\mapsto(p/a1_{[0,a]}(x)+(1-p)/b1_{[0,b]}(x))$.

(2) N_a est une loi binomiale de paramètres $(n,p+(1-p)a/b)$.

(3) Quels que soient les x_i de $[0,b]$, $\prod_{i=1}^n f_p(x_i)=(p/a+(1-p)/b)^{n_a}((1-p)/b)^{n-n_a}$ où on a noté n_a le nombre des x_i inférieurs à a. L'estimateur de maximum de vraisemblance de p vérifie donc
$n_a\frac{b-a}{p(b-a)+a}-(n-n_a)/b=0$.
On en déduit $\hat{p}=\frac{abN_a}{N-N_a}-\frac{a}{b-a}$.

Exercice 9.

(1) (a) S suit une loi Gamma de paramètre n et λ.

(b) Y est à valeurs dans $[0,1]$. Soient $u\in[0,1]$ et $t\in\mathbb{R}^+$. On note $S'=\sum_{i=2}^n X_i$. S' et X_1 sont indépendantes et S' suit une loi Gamma de paramètres $n-1$ et λ.
$P(S\ge t,Y\ge u)=P(X_1\ge t-S',X_1\ge\frac{u}{1-u}S')=\int_0^{t(1-u)}f_S(s)\int_{t-s}^\infty\lambda\exp(-\lambda x)dx+\int_{t(1-u)}^\infty f_S(s)\int_{t(1-u)}^\infty\lambda\exp(-\lambda x)dx$. En explicitant la densité de la loi Gamma, il vient
$P(S\ge t,Y\ge u)=\lambda^{n-1}\frac{t^{n-1}(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-2)!}\int_{\lambda t}^\infty z^{n-2}\exp(-\lambda z)dz$
L'expression est de la forme produit $(1-u)^{n-1}$ par une fonction de t, Y et S sont donc indépendantes.

(2) (a) $E[U]=P(X_1\le x)=q(\lambda)$ donc $U=1_{[0,x]}(X_1)$ est un estimateur sans biais de $q(\lambda)$.

(b) $E[\hat{U}]=E[E(U|S)]=E[U]=q(\lambda)$ donc $\hat{U}$ est un estimateur sans biais de $q(\lambda)$.

Exercice 10.

(1) L'estimateur de maximum de vraisemblance de λ est $\hat{\lambda}_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

(2) La loi forte des grands nombres et la continuité de $x\mapsto 1/x$ entraine la convergence p.s. de $\hat{\lambda}_n$ vers λ. De plus
le théorème central limite appliqué à la suite (X_i) entraine que
$\sqrt{n}(1-\lambda\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})$ converge en loi vers une loi $N(0,1)$. On en déduit en utilisant le théorème de Slutsky que le produit
$\hat{\lambda}_n\sqrt{n}(1-\lambda\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})=\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n-\lambda)$ converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0,\lambda^2)$.

(3) Par conséquent, $\lim_n \to \infty P(\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \in [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]) = 1 - \alpha$. On en déduit que $[\hat{\lambda}_n - q_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}, \hat{\lambda}_n + q_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ de λ.

(4) $P(\gamma Y \leq x) = P(Y \leq x/\gamma)$. La densité de γY est donc $x \mapsto \frac{1}{\gamma} f_Y(x/\gamma) = 1/\gamma(\frac{x}{\gamma})^{n-1}\gamma^n 1/(n-1)! \exp(-x) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$; on retrouve bien la densité d'une loi $G(n, 1)$.

(5) $n\overline{X}_n$ suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$. On en déduit que $\lambda n\overline{X}_n$ suit une loi $G(n, 1)$, et enfin que $2\lambda n\overline{X}_n$ suit une loi $G(n, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi $\chi^2(2n)$. Par conséquent
$P(2\lambda n\overline{X}_n \in [\chi_{\alpha/2}(2n), \chi_{1-\alpha/2}(2n)] = 1 - \alpha$, et on en déduit donc que
$$\left[\frac{\chi_{\alpha/2}(2n)}{2n\overline{X}_n}, \frac{\chi_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\overline{X}_n}\right]$$
est un intervalle de confiance exact pour λ de niveau $1 - \alpha$.

Exercice 11.

(1) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu, 2.5/n)$. Donc Un intervalle de confiance bilatéral pour μ de niveau $1 - \alpha$ est
$[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{n}}, \sum_{i=1}^n X_i + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{n}}]$.

(2) L'estimateur sans biais de S^2 est $T^2 = \frac{n}{n-1}S^2$.
$\frac{nS^2}{\sigma}$ suit une loi $\chi^2(n-1)$. Par conséquent
$[\frac{nS^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{nS^2}{\chi_{\alpha/2}(n-1)}]$ est un intervalle de confiance pour σ^2 de niveau $1 - \alpha$.

(3) $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{T^2}}$ suit une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté. On en déduit un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$:
$$\left[\overline{X}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{T^2}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{\sqrt{T^2}}{\sqrt{n}}\right]$$
où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

(4) Application numérique laissée au lecteur.

Exercice 12.

(1) Estimation 1 à partir des 6 prix collectés : $\hat{\theta}_1 = (390+650+460+410+270+780)/6 \simeq 493$
Estimation 2 : $\hat{\theta}_2 = 550$.
Les deux estimations sont basées sur la moyenne arithmétique $\overline{X}$ qui est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance θ_0 (sous l'hypothèse que les prix puissent être modélisées par des variables aléatoires qui soient tous distribuées selon une même loi, et indépendantes)...

(2) $Var\widehat{\theta_*} = 0.25Var(\widehat{\theta_1}) + 0.25Var(\widehat{\theta_2}) = 0.25\sigma^2(\frac{1}{6} + \frac{1}{300})$ (en supposant que les prix dans les magasins et sur internet suivent une même loi, de variance σ^2).

(3) $Var\widehat{\theta_**} = a^2Var(\widehat{\theta_1}) + (1-a)^2Var(\widehat{\theta_2}) = \sigma^2(a^2\frac{1}{6} + (1-a)^2(\frac{1}{300}))$. Elle est minimale pour $a = \frac{1}{51}$.

(4) Calculer un intervalle asymptotique pour $n = 6$ a peu de sens, sauf si on suppose que le modèle sous jacent est gaussien (il faut alors prendre les quantiles avec la loi de Student à 5 ddl) : on trouve alors $I_1 = [296, 690]$
$I_2 = [516, 584]$
$I_3 = [515, 583]$
Les deux derniers intervalles sont pratiquement identiques (comme on pouvait s'en douter).