CPP-la prépa des INP 2 ème année
lundi 10 décembre 2012

Examen de Probabilités

Exercice 1. (8 points environ) La loi triangulaire est beaucoup utilisée en traitement du son. Sa densité est donnée par,

$$f_X(x) = \frac{1}{a^2}\,(a - |x|)\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et représenter cette densité.
On a bien $f \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a^2}\,(a - |x|)\,dx = 2\int_0^a \frac{1}{a^2}\,(a - x)\,dx = 2\Big[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\Big]_0^a = 1.$$

2) Calculer son espérance et sa variance.
On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x}{a^2}\,(a - |x|)\,dx = 0$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{a^2}\,(a - |x|)\,dx = 2\int_0^a \frac{ax^2 - x^3}{a^2}dx \\ &= 2\Big[\frac{ax^3}{3a^2} - \frac{ax^4}{4a^2}\Big]_0^a = \frac{a^2}{6}.\end{aligned}$$

D'où $Var(x) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{a^2}{6}$.

3) Calculer $\mathbb{P}(2|X| \geq a)$.
Par symétrie, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2|X| \geq a) &= \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{a}{2}\right) \\ &= 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} f_X(x)dx = 2\Big[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\Big]_{\frac{a}{2}}^{a} = 2\left(1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4) On considère ici $a = 1$. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{|X|}$. On pourra commencer par déterminer l'ensemble de ses valeurs, sa fonction de répartition puis sa densité.

X est à valeurs dans $[-1,1]$ donc Y est à valeurs dans $[0,1]$. Soit $t \in [0,1]$, la fonction de répartition de Y est donnée par

$$\begin{aligned}F_Y(t) &= \mathbb{P}(\sqrt{|X|} \le t) = \mathbb{P}(-t^2 \le X \le t^2)\\ &= 2\int_0^{t^2} f_X(x)dx = 2\int_0^{t^2} 1 - xdx = 2\Big[x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{t^2} = 2t^2 - t^4.\end{aligned}$$

Si $t < 0$, on a $F_Y(t) = 0$ et si $t > 1$, $F_Y(t) = 1$.

La densité f_Y de Y s'obtient en dérivant la fonction de répartition:

$$f_Y(t) = (4t - 4t^3)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) = 4t(1-t^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(t) \ \ (\ge 0).$$

Exercice 2. Les deux parties sont indépendantes.

On considère n "menteurs" $I_1, I_2, \dots I_n$. Le menteur I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non" et la transmet à I_2 et ainsi de suite jusqu'à I_n. Chaque menteur transmet ce qu'il a entendu avec probabilté p $(0 < p < 1)$ et transmet l'information contraire avec probabilité $1-p$. On suppose que chaque menteur ment ou transmet fidèlement l'information de manière indépendante des autres menteurs.

Pour $i = 1, \dots n$, on note A_i l'évènement: "le menteur I_i transmet ce qu'il a entendu" et B_i l'évènement: "le menteur i transmet l'information initiale.

On note p_n la probablité que le menteur I_n transmette l'information initiale.

Partie A (6 points environ)
1) Que valent $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i)$ et $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i^c)$?
D'après l'énoncé $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i) = p$ et $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i^c) = 1-p$. Plus précisement, $\mathbb{P}(B_{i+1}|B_i) = \mathbb{P}(A_{i+1}|B_i) = \mathbb{P}(A_{i+1}) = p$ par indépendance.

2) Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.

$$\begin{aligned}p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}\cap B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}\cap B_n^c)\\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n^c)\mathbb{P}(B_n^c)\\ &= p\,p_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + 1 - p\end{aligned}$$

3) On pose $v_n = p_n - \frac{1}{2}$. Montrer que $v_{n+1} = cv_n$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer. En déduire l'expression de v_n et de p_n.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + \frac{1}{2} - p = (2p-1)(p_n - \frac{1}{2}) = (2p-1)v_n.$$

On a donc $v_n = (2p-1)^n v_0 = \frac{1}{2}(2p-1)^n$ car $p_0 = 1$. Donc $p_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n$.

4) Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$?

Quand $n \to +\infty$, $p_n \to \frac{1}{2}$ car $-1 < 2p-1 < 1$.

Partie B (6 points environ)

On note maintenant Y_n le nombre de menteurs parmi les menteurs $I_1, \ldots, I_n$ qui ont transmis l'information fidèlement (c'est-à-dire celle qu'ils ont entendue).

5) Quelle est la loi de Y_n?

On note $X_i = 1$ si le i-ème menteur transmet fidèlement l'information et $X_i = 0$ sinon. Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. De plus, $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Donc Y_n est de loi binomiale $Bin(n,p)$. (Son espérance est donc np et sa variance $np(1-p)$).

6) Que peut-on dire de la quantité $\frac{Y_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?

D'après la loi faible des grands nombres: $\frac{Y_n}{n}$ converge en loi vers $\mathbb{E}[X_1] = p$ quand n tend vers $+\infty$

7) On souhaite déterminer une taille d'échantillon suffisante n_0 telle que à partir de n_0, on ait

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq 0.01\right) \leq 0,05.$$

On utilisera ici le théorème central limite et on rappelera que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et que $\mathbb{P}(|Z| \geq 1,96) \simeq 0,05$ si Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Le théorème central limite dit que la quantité

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(X_1)}}\left(\frac{Y_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left(\frac{Y_n}{n} - p\right)$$

converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq 0.01\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$
$$\simeq \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

Cette quantité est inférieure à 0.05 si

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 1,96$$

c'est-à-dire $n \geq \frac{1.96^2 p(1-p)}{0.01^2}$. On veut que ceci soit vrai pour tout $0 < p < 1$, donc on prend $n \geq \frac{1.96^2 100^2}{4}$ soit $n_0 = 9604$.