Master MIMSE spécialité 2 12 novembre 2013

DS: Chaînes de Markov: Corrigé succint

durée 1h30

Exercice 1. (5 points environ)

Un message pouvant prendre deux formes (“A” ou “B”) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet fidèlement le message qu'il reçoit avec probabilité p, $0 < p < 1$, et qu'il le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$. On suppose de plus que tous les intermédiaires sont indépendants.

On note X_n l'information transmise par le n-ème intermédiaire et X_0 l'information initiale. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = 1$ si le n-ème intermédiaire transmet “A” et $X_n = 2$ si le n-ème intermédiaire transmet “B”. De même on pose $X_0 = 1$ si l'information initiale est “A” et $X_n = 2$ si l'information initiale est “B”. On notera F_n l'évènement: “le n-ème intermédiaire transmet fidèlement l'information qu'il a reçue”.

1. Donner la définition d'une chaîne de Markov. Justifier (en une phrase) que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène. Donner son espace d'états et calculer sa matrice de transition P.

   voir cours pour la définition. Ici l'information transmise au temps $n + 1$ ne dépend que de l'nformation transmise au temps n (et pas de toules informations transmises précédemment), donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. De plus, le mécanisme de transmission de l'information est indépendant de l'instant $n+1$, la chaîne est donc homogène. De plus on a:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 2) = \mathbb{P}(F_{n+1}) = p,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = \mathbb{P}(F^c_{n+1}) = 1 - p.$$

2. Vérifier que

$$(1, 1)P = (1, 1)$$

   et que

$$(1, -1)P = (2p - 1)(1, -1)$$

3. On considère que la loi initiale est la loi uniforme $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Donner la loi de la chaîne au temps n. La question précédente montrer que la loi uniforme est invariante. La loi au temps n est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4. On considère maintenant que la loi initiale est la mesure $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Donner la loi de la chaîne au temps n. (On pourra écrire $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = a(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + b(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$). Quelle est la loi limite quand $n \to +\infty$?

   Un calcul facile donne $a = 1$ et $b = 1/2$. Donc la loi au temps n est donné par:

   $$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})P^n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})P^n + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})P^n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(2p-1)^n(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

   Or $|2p - 1| < 1$, donc quand $n \to +\infty$ la loi au temps n tend vers la mesure invariante $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 2. (7 points environ)
On considère la matrice P suivante sur l'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la valeur de a pour que P soit une matrice de transition. $a = 1/2$.

2. Tracer le graphe associé à P.

3. Donner les classes communiquantes. Préciser leur période et si elles sont récurrentes ou transientes.

   {1,2,4} classe fermée et finie donc récurrente et de période 1. On a en effet un chemin de lonueur 2 ($1 \to 4 \to 1$) et 1 de longueur 3 ($1 \to 4 \to 2 \to 1$)
   {3} classe fermée et finie donc récurrente de période 1.
   {5,6} classe non femée et donc transiente et de période 2.

4. On note $T_4 := \inf\{n \geq 0, X_n = 4\}$. Calculer $\mathbb{P}_5(T_4 < +\infty)$.
   On cherche la probabilité partant de 5 d'atteindre 4. On remarque que $\mathbb{P}_4(T_4 < +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}_3(T_4 < +\infty) = 0$. On a

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}_5(T_4 < +\infty) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}_4(T_4 < +\infty) + \frac{3}{4}\mathbb{P}_6(T_4 < +\infty) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\mathbb{P}_3(T_4 < +\infty) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_5(T_4 < +\infty)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\mathbb{P}_5(T_4 < +\infty), \end{aligned}$$

et finalement on trouve: $\mathbb{P}_5(T_4 < +\infty) = \frac{2}{5}$.

Exercice 3. (8 points environ)
On étudie une file d'attente à un guichet. Le temps de service d'un client est constant et est pris comme unité de temps. On note ξ_n le nombre de clients arrivant pendant la n-ème période de temps. On suppose que les variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi ν. On suppose de plus que $\nu(0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) > 0$, $\nu(1) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1) > 0$ et $\nu(2) = \mathbb{P}(\xi_1 = 2) > 0$.

Un client arrivant dans cette période ne peut être servi avant l'instant $n+1$ (même si personne ne se trouve au guichet). On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n. On suppose que le nombre de clients X_0 est indépendant de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$.

1. Justifier que l'on a la relation $X_{n+1} = X_n - \mathbf{1}_{\{X_n\geq 1\}} + \xi_{n+1}$, $n \geq 0$.
   Le nombre de clients dans la fille d'attente est $X_{n+1} = \xi_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ si $X_n = 0$ (c'est-à-dire si la file est vide) et il est de $X_{n+1} = X_n - 1 + \xi_{n+1}$ si $X_n \geq 1$ (c'est-à-dire si la file n'est pas vide).

2. En déduire que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
   $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$ avec $(\xi_n)_n$ suite de va i.i.d. et indépendante de X_0 donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (homogène).

3. Donner l'espace d'états et sa matrice de transition. $E = \mathbb{N}$. La matrice de transition est donnée par:

$$P(0,k) = \mathbb{P}(\xi_1 = k) = \nu(k), k \geq 0;$$

$$P(n, n+k) = \mathbb{P}(\xi_1 = k+1) = \nu(k+1), n \geq 1, k \geq -1.$$

4. Montrer que la chaîne est irreductible et apériodique.
   Puisque $\nu(2) > 0$, $P(n, n+1) > 0$ pour $n \geq 1$.
   Puisque $\nu(0) > 0$, $P(n, n-1) > 0$ pour $n \geq 1$.
   Puisque $\nu(1) > 0$, $P(0, 1) > 0$.
   On a donc: $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n$ et $n \to n-1 \to \cdots \to 1 \to 0$, pour tout n. On a donc une seule classe communiquante: la chaîne est irréductible.

   On a $P(0,0) = \nu(0) > 0$ donc 0 (et toute la chaîne) est apériodique.

5. Donner la définition d'un état récurrent et d'un état transient. (voir cours.)

6. On suppose dans cette question que $\mathbb{E}[\xi_1] > 1$. Montrer d'abord que

$$X_n \geq X_0 - n + \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

A l'aide de la loi forte des grands nombres, en déduire que presque sûrement $X_n \to +\infty$ et que la chaîne est transiente.

L'inégalité vient du fait qu'on enlève au plus 1 à chaque coup. On écrit alors:

$$X_n \geq X_0 + n\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - 1\right).$$

La loi forte des grands nombres donne que p.s. $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n} \to \mathbb{E}[\xi_1] > 1$, donc $X_n \to +\infty$ p.s.

On en déduit que (partant de 0) le nombre de passage en 0 est fini p.s., donc 0 est transient et la chaîne est transiente.

7. * On suppose que $\mathbb{E}[\xi_1] < 1$. En écrivant

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i - n + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i=0\}};$$

montrer que l'état 0 est récurrent. Conclure pour tous les états de la chaîne.

L'égalité vient du fait qu'à chaque coup, on enlève 1 si et seulement si $X_i \geq 1$. On a donc:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i \geq 1\}};$$

et $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i \geq 1\}} = n - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i=0\}}$. On écrit:

$$X_n = X_0 + n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - 1\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i=0\}}.$$

Comme précédemment par la loi forte des grands nombres: p.s. quand $n \to +\infty$:

$$n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - 1\right) \to -\infty$$

Or X_n est ≥ 0, donc nécéssairement avec probabilité 1, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_i=0\}} \to +\infty$. On en déduit que 0 est récurrent puis que toute la chaîne est récurrente.