Introduction à l'analyse numérique
Année : 2022-2023
Formation : L2 Mathématiques

TP3 : Recherche des zéros de fonctions - Suite

Exercice 1 (Le modèle S.I.R.). *Un modèle simple de biologie, le modèle SIR, permet de simuler l'évolution d'une population affectée par une épidémie. Afin de calibrer un dispositif de santé publique, on souhaite connaître au début de l'épidémie combien de personnes seront touchées et combien resteront saines. Les équations du modèle conduisent à l'égalité :*

$$S_\infty = S_0 \exp\left(-\frac{N - S_\infty}{\rho}\right)$$

où N est le nombre d'individus total, S_0 est le nombre d'individus initialement sains, ρ est un taux de guérison relatif (inférieur à S_0) et S_∞ est notre inconnue : le nombre d'individu restés sains en fin d'épidémie.

1. *Résolvez l'équation pour $N = 51$, $S_0 = 50$ et différentes valeurs admissibles de ρ.*
2. *Tracez le graphique de S_∞ en fonction du rapport $\frac{S_0}{\rho}$.*

Exercice 2 (Newton en 2D). *On cherche à approcher numériquement une solution du système suivant :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 4 \\ x^2 - y^2 & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Que l'on réécrit sous la forme $f(x, y) = 0$ où f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le vecteur $Y = F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, résoudre $F(X) = 0$ par la méthode de Newton revient à considérer le schéma suivant :

$$X_{k+1} = X_k - DF(X_k)^{-1} F(X_k)$$

où DF est la matrice Jacobienne de F.

1. *Calculer les zéros exacts de F.*
2. *Définir deux fonctions qui prennent en argument le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et qui renvoie respectivement $F(X)$ et $DF(X)$.*
3. *Implémenter la méthode de Newton en 2D*
4. *Appliquer la méthode au système (1)*
5. *Comparer le résultat avec la fonction **root** du module optimize de la bibliothèque scipy.*

Exercice 3 (Fractale de Newton)**.** *La méthodes de Newton s'applique aussi aux fonctions vectorielles, et donc en particulier, aux fonctions à variables complexes. On considère la fonction* $f : x \mapsto x^3 - 1$*. Cette équation admet trois racines dans le plan complexe :* 1*,* j *et* j^2 *avec* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$*. On souhaite étudier vers quelle racine converge la méthode de Newton appliquée à cette équation, en fonction de la valeur choisie pour initialiser la suite des itérations de Newton. Plus précisément, on souhaite colorier le domaine du plan complexe* $D = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{C}$ *en fonction de la racine de* f *vers laquelle la méthode de Newton converge. Vous pouvez consulter la page web* `https://fr.wikipedia.org/wiki/FractaledeNewton` *pour avoir une idée du phénomène que l'on souhaite observer.*

Pour cela, on définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $F(x, y) = (Re((x + iy)^3 - 1), Im((x + iy)^3 - 1)) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$*, qui s'annule en chaque* (x, y) *tel que* $(x + iy)^3 = 1$*.*

1. *Calculer à la main* $F(x, y)$ *et la matrice*

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

.

2. *On divise* D *en petits carrés de longueur* p *(paramètre à choisir). Avec la commande* `meshgrid`*, construisez une matrice* Z *dont les coefficients représentent les affixes de ces carrés. Par exemple pour* $p = 2$

$$Z = \begin{pmatrix} -2 + 2i & 2i & 2 + 2i \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 - 2i & -2i & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

3. *Ecrire la fonction* `Newt` *qui effectue une étape dans la méthode de Newton. Cette fonction devra accepter des matrices en entrée.*

4. *Résoudre* $F(x, y) = 0$ *par la méthode de Newton initialisée sucessivement en chaque point de* Z*. On mémorisera dans un tableau* T *le numéro* k *entre 1 et 3 de la racine* $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ *vers lequel l'algorithme aura convergé, et dans un second tableau* TN *le nombre d'itérations nécessaires.*

5. *Tracer une représentation graphique des deux tableaux.*