TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°5

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2005/2006

Exercice 1. Le théorème d'Ascoli. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Notons $\mathrm{C}^0(X,Y)$ l'espace des applications continues de X dans Y, muni de la distance de la convergence uniforme :

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

(1) Rappeler pourquoi $(\mathrm{C}^0(X,Y), d)$ est complet, et pourquoi ses éléments sont des applications uniformément continues.

Une partie $A \subseteq \mathrm{C}^0(X,Y)$ est dite *équicontinue* si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $(\forall x, y \in X, \forall f \in A)$ $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (c'est une propriété d'uniformité sur l'uniforme continuité).

Théorème d'Ascoli : Soit $A \subseteq \mathrm{C}^0(X,Y)$. Il y a équivalence entre :

(i) A est équicontinue ;
(ii) A est relativement compacte.

Rappelons que A est *relativement compacte* si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

(2) Montrer que (ii)$\Rightarrow$(i).
(3) Supposons (i) et montrons que A est précompact. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ un module d'équicontinuité associé. Recouvrir X et Y par un nombre fini de boules $\{\mathrm{B}(x_i, \delta)\}_{1\le i\le n}$ et $\{\mathrm{B}(y_j, \varepsilon/2)\}_{1\le j\le m}$ respectivement. Conclure en considérant l'ensemble des applications de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans $\{y_1, \ldots, y_m\}$.
(4) En déduire que (i)$\Rightarrow$(ii).

Exercice 2. Munissons l'espace $\mathrm{C}^0([0,1])$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Munissons l'espace $\mathrm{C}^1([0,1])$ des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (en entendant dérivable à droite en 0 et à gauche en 1) de la norme C^1 : $\|f\|_{\mathrm{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que l'homomorphisme d'inclusion $j\colon \mathrm{C}^1([0,1]) \to \mathrm{C}^0([0,1])$ est compact.

Exercice 3. Soient H un espace de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée de H et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. On définit un endomorphisme de H en posant

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Montrer que A est continu et qu'il est compact si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de H (ie. $\overline{\mathrm{Vect}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} = H$) et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Quel est le spectre de A ?

Exercice 4. Soient H un espace de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée de H et K un opérateur compact de H. Montrer que $\lim_{n\to\infty} Kx_n = 0$ (on montrera que 0 est la seule valeur d'adhérence).

Exercice 5. Soient H un espace de Hilbert séparable et $T\colon H \to H$ un opérateur compact. On se donne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base othonormale de H.

(i) Posons $\lambda_n = \sup\{\|Tx\|,\, x \in \mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)^\perp,\, \|x\| \leq 1\}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

(ii) En déduire que T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

(Remarque : le résultat qui précède est valable dans tout espace de Hilbert).

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert complexe et T un opérateur autoadjoint compact.

(a) Montrer que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$. Montrer que $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$. Pour le sens "difficile", on notera que $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\sup\limits_{\|y\|\leq 1} |\langle Tx, y\rangle|$, on se ramènera au cas où $\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, et on calculera

$$\langle T(x+y),(x+y)\rangle - \langle T(x-y),(x-y)\rangle + i\big(\langle T(x+iy),(x+iy)\rangle - \langle T(x-iy),(x-iy)\rangle\big).$$

(b) Montrer que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T (utiliser la question précédente pour construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H avec $\|x_n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = \lambda \in \{\|T\|, -\|T\|\}$).

(c) Montrer que si T n'a pas de valeur propre non nulle, alors $T = 0$.

(d) Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres distinctes, alors $\langle x, y\rangle = 0$.

(e) Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres non nulles de T. Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ la réunion d'une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(T)$ et de bases orthonormales de $\mathrm{Ker}(T - \lambda_i \mathrm{Id}_H)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une base orthonormale de H (on pourra poser $M = \{x \in H,\ (\forall \alpha \in A)\ \langle x, e_\alpha\rangle = 0\}$ et montrer que $M = 0$ en regardant l'action de T sur M et en utilisant le (c)).

(f) Quitte à renuméroter, on a $\lambda_\alpha = \langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle$. Montrer que pour $x \in H$, on a

$$Tx = \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

Exercice 7. Soient H un espace de Hilbert séparable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base ortonormale de H et $T \in \mathcal{L}(H)$ continue. Supposons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge. Montrer que

(i) T est compact ;

(ii) pour toute base orthonormale $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|Ty_n\|^2$ converge et sa somme est $\geq \|T\|^2$, indépendante de la base $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra considérer une base orthogonale de H qui diagonalise T^*T).

Les opérateurs de ce type sont dits de Hilbert-Schmidt.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On pose $H = \mathrm{L}^2([a,b])$, que l'on munit du produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ classique. Soit $f \in \mathrm{L}^2([a,b]^2)$. Pour $u \in H$, on pose :

$$K(u)(x) = \int_a^b f(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

(1) Montrer que $K(u)$ appartient à $\mathrm{L}^2([a,b])$.

(2) Montrer que K est linéaire continu sur H et calculer son adjoint.

(3) On suppose ici que f est continue. Montrer que K est compact.

(4) Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H. Montrer que $\|K\|_{HS} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|K(e_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est fini, indépendant de la base hilbertienne choisie, et que $\|K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{HS}$.

(5) On définit $K_n \in \mathcal{L}(H)$ par

$$K_n(e_i) = \begin{cases} K(e_i) & \text{si } i \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que K_n tend vers K dans $\mathcal{L}(H)$ et en déduire que K est un opérateur compact.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2([0,1]))$ l'opérateur défini par

$$A(u)(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(1) Montrer que A est compact.
(2) Déterminer l'adjoint de A.
(3) Montrer que A^*A est un opérateur autoajoint compact et déterminer son spectre.
(4) En déduire la norme de A^*A puis la norme de A.