Université de Bordeaux **2024-2025**
Semestre 7 **Modules, Algèbre commutative**

Devoir maison n°1

À rendre le 4 novembre

Exercice 1

Soient A un anneau unitaire, M un A-module noethérien et $f\colon M \to M$ une application A-linéaire.
(1) On suppose f surjective. Montrer que c'est un isomorphisme (indication : considérer la suite de sous-modules $K_n = \mathsf{Ker}(f^n)$).
(2) Si f est supposée injective, est-ce automatiquement un isomorphisme ?
On suppose désormais que $M = A^n$ et on note $X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathsf{M}_n(A)$ la matrice de f dans la base canonique.
(3) Montrer que f est surjective si et seulement si $\det(X) \in A^\times$ (indication : penser à la comatrice).
(4) Montrer que si $\det(X)$ n'est pas diviseur de zéro dans A, alors f est injective.
(5) Montrer que réciproquement, si $\det(X)$ est diviseur de zéro dans A, alors f n'est pas injective (indication : soient $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $a\det(X) = 0$ et $r < n$ le plus grand entier tel qu'il existe une matrice $N \in \mathsf{M}_r(A)$ extraite de M telle que $a\det(N) \neq 0$, construire $V \in A^n \setminus \{0\}$ tel que $XV = 0$ à partir d'une telle matrice N).
On suppose désormais que f est injective.
(6) Lorsque $A = \mathbf{Z}$, montrer que $\#\,\mathsf{Coker}(f) = |\det(X)|$.
(7) Montrer qu'on a $\dim_K(\mathsf{Coker}(f)) = \deg(\det(X))$ lorsque $A = K[X]$ (où K est un corps commutatif).

Exercice 2

Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $A := \mathbf{C}[X,Y]/\langle X^2 + Y^2 + \lambda\rangle$.
(1) Montrer que A est intègre si et seulement si $\lambda \neq 0$.
(2) Quand A est-il un corps ?