Université de Bordeaux — **2024-2025**
Semestre 7 — **Modules, Algèbre commutative**

Devoir surveillé

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Questions de cours

(1) Soient A un anneau, I un ensemble et M un A-module. Montrer que

$$\mathsf{Hom}_{A\text{-lin}}(A^{(I)}, M) \simeq M^I.$$

À quoi revient se donner une application A-linéaire d'un module libre vers M ?
(2) Montrer que dans un anneau intègre, tout élément premier est irréductible.

Exercice 1

Écrire $P = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2$ comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 2

(1) Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ n'est pas de type fini.
(2) Posons $A = \{P \in \mathbf{Q}[X]\,;\, P(0) \in \mathbf{Z}\}$ et $I = \{P \in \mathbf{Q}[X]\,;\, P(0) = 0\}$.
  (a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$, et que I est un idéal de A.
  (b) Montrer que I n'est pas de type fini comme idéal de A (utiliser la question (1)). En particulier A n'est pas noethérien.

Exercice 3

Soit A un anneau. Un A-module P est dit *projectif* si pour toute application A-linéaire surjective $\pi\colon M \to N$ et toute application A-linéaire $f\colon P \to N$, il existe une application A-linéaire $\widehat{f}\colon P \to M$ tel que $f = \pi \circ \widehat{f}$, *i.e.* telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\widehat{f}"'] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

commute.
(1) Montrer qu'un A-module libre de rang fini est projectif.

Rappelons que si M est un A-module, un *facteur direct* de M est un sous-module N tel qu'il existe un sous-module N' tel que $M = N \oplus N'$ (*i.e.* N et N' sont supplémentaires dans M).

(2) Soit $f\colon M \to M'$ une application A-linéaire surjective. Montrer que si f admet une section, c'est-à-dire s'il existe $s\colon M' \to M$ tel que $f \circ s = \mathsf{Id}_{M'}$, alors M' est isomorphe à un facteur direct de M (indication : penser au noyau de f).
(3) Montrer que si $P \simeq M/M'$ est projectif, alors P est isomorphe à un facteur direct de M. En déduire qu'un A-module de type fini est projectif si et seulement s'il est isomorphe à un facteur direct d'un A-module libre de rang fini.

(4) Soit $e \in A$ un élément idempotent (*i.e.* tel que $e^2 = e$). Montrer que $A = Ae \oplus A(1-e)$, et en déduire que Ae et A/Ae sont projectifs.
(5) Donner un exemple de $\mathbf{Z}/6\,\mathbf{Z}$-module projectif non libre.
(6) Facultatif : montrer qu'un A-module P monogène (*i.e.* engendré par un seul élément) est projectif si et seulement si $P \simeq Ae$ avec $e \in A$ idempotent.