Université de Bordeaux — **2024-2025**
Semestre 7 — **Modules, Algèbre commutative**

Examen

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires.

Questions de cours

(1) Rappeler pourquoi $\mathbf{R}[X,Y]$ est factoriel. Montrer qu'il n'est pas principal.
(2) Soient A un anneau principal, $a,b \in A$ non tous nuls et $d = \mathsf{pgcd}(a,b)$. Construire explicitement une matrice $M \in \mathsf{SL}_2(A)$ telle que $M \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 1

(1) Quels sont les facteurs invariants du groupe fini $(\mathbf{Z}/16\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/12\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2024\,\mathbf{Z})$?
(2) Trouver une base adaptée pour le groupe abélien $L = \mathbf{Z}\,v_1 + \mathbf{Z}\,v_2 + \mathbf{Z}\,v_3 \subset \mathbf{Z}^3$ avec $v_1 = (-2,1,1)$, $v_2 = (1,-2,1)$ et $v_3 = (1,1,-2)$.
(3) Donner la structure du groupe abélien de type fini $G = \mathbf{Z}^3/(\mathbf{Z}(4,8,10) + \mathbf{Z}(6,2,0))$.
(4) Construire une matrice $M \in \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6,11,5)$.
(5) Donner les invariants de similitude de la matrice :

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & 2
\end{pmatrix}$$

(les composantes blanches correspondent à des zéros). Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 2

Soient A un anneau principal, M un A-module libre de rang fini, et $(e_1,\ldots,e_r)$ des éléments de M qui sont linéairement indépendants, et tels que le quotient $M/\langle e_1,\ldots,e_r\rangle$ soit sans torsion. Montrer qu'on peut compléter $(e_1,\ldots,e_r)$ en une base de M sur A.

Exercice 3

Posons $A = \mathbf{Z}[\sqrt{5}] \subset K = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$. Si $x,y \in \mathbf{Q}$ et $z = x + y\sqrt{5} \in K$, posons $N(z) = x^2 - 5y^2$.
(1) Montrer que si $z_1, z_2 \in K$, on a $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.
(2) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in A^\times \Leftrightarrow N(z) \in \{\pm 1\}$.
(3) Montrer qu'il n'existe aucun élément $z \in A$ tel que $N(z) \in \{\pm 2\}$.
(4) En déduire que 2 et $1+\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A. Sont-ils premiers [indication : construire soigneusement un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}[X]/\langle X^2 - 5\rangle \xrightarrow{\sim} A$] ?
(5) L'anneau A est-il factoriel ?
(6) L'idéal $I = \langle 2, 1+\sqrt{5}\rangle \subset A$ est-il principal ?

Exercice 4 (bonus)

Soit A un anneau principal.

(1) Soient $x, y \in A \setminus \{0\}$. Posons $d = \mathsf{pgcd}(x, y)$ et écrivons $x = dx'$ et $y = dy'$. Montrer que si $f \in \mathsf{Hom}_A(A/\langle x\rangle, A/\langle y\rangle)$, alors $f(1) \in \langle y'\rangle/\langle y\rangle$.

(2) En déduire que $\mathsf{Hom}_A(A/\langle x\rangle, A/\langle y\rangle) \simeq A/\langle d\rangle$.

Soit M, M_1 et M_2 des A-modules.

(3) Montrer que $\mathsf{Hom}_A(M, M_1 \times M_2) \simeq \mathsf{Hom}_A(M, M_1) \times \mathsf{Hom}_A(M, M_2)$.

(4) Montrer de même que $\mathsf{Hom}_A(M_1 \times M_2, M) \simeq \mathsf{Hom}_A(M_1, M) \times \mathsf{Hom}_A(M_2, M)$.

On suppose désormais M de type fini et de torsion. Notons $x_1 \mid \cdots \mid x_n$ ses facteurs invariants.

(5) En utilisant tout ce qui précède, montrer que $\mathsf{End}_A(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (A/\langle x_i\rangle)^{2(n-i)+1}$.