M 13

Ph. CHARPENTIER

1992-93

Sommaire

Chapitre 1

CALCUL DIFFERENTIEL

1.1 Fonctions différentiables

Rappel. Une fonction $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in]a,b[$ de dérivée L, si pour $|h| \leq \eta$, on a $f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + |h|\epsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. On note que $h \longmapsto Lh$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, et $x_0 \in \Omega$. f est dite* **différentiable** *(ou* **dérivable***)* **en** *x_0 s'il existe une application linéaire $L = L_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ telle que si on définit $\epsilon : (\Omega - x_0)\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ par la formule*

$$f(x) = f(x_0) + L_{x_0}(x - x_0) + \|x - x_0\|\epsilon(x - x_0),\ x \in \Omega\backslash\{x_0\},$$

on a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\Omega,\ x\neq x_0}} \epsilon(x - x_0) = 0.$

Remarque. Il revient au même de dire qu'il existe $\epsilon : B(0,\eta) \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ telle que $B(0,\eta) \subset \Omega$ et $f(x_0+h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + \|h\|\epsilon(h)$.

Proposition 1.1.2 *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \Omega$. Si L_{x_0} existe elle est unique. Cette application est appelée la dérivée ou différentielle de f au point x_0 et se note df_{x_0} ou f'_{x_0}.*

Définition 1.1.3 *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Si $\Omega_1 \subset \Omega$ est un ouvert, on dit que f est* **différentiable sur** *Ω_1 si elle est différentiiable en tout point de Ω_1, et, l'application $x \longmapsto df_x$ de Ω_1 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ est appelée la* **dérivée** *de f.*

Exemples. 1) $p = q = 1$:...
2) Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^p$ et $df_x = f\ \forall x$.

Proposition 1.1.4 *$f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $f=(f_1,\dots,f_q)$, $x_0\in\Omega$. f est différentiable en x_0 si et seulement si, $\forall i$, f_i est différentiable en x_0. De plus, $\forall i$, $p_i\circ df_{x_0}=(df_i)_{x_0}$, où p_i désigne la i–eme projection de $\mathbb{R}^q$ sur $\mathbb{R}$.*

Exemples. 1) $p=1$. On identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^q)$ à $\mathbb{R}^q$ par $L\longmapsto L(1)$ Si $f=(f_1,\dots f_q)\longrightarrow \Omega\subset \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^q$ est différentiable en x_0, alors $df_{x_0}(1)=(f_i'(x_0))_{1\leq i\leq q}$ (pour $q=2$: tangente à une courbe paramétrée). En particulier

$$df_{x_0}(1)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

2) Si $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^q$ est constante, elle est différentiable en tout point et $df_x=0$, $\forall x$.

Proposition 1.1.5 *$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^q$, $x_0\in\Omega$. Si f est différentiable en x_0, alors elle est continue en x_0.*

Lemme 1.1.6 *$L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$. Alors L est continue sur $\mathbb{R}^p$ et $\exists M>0$ telle que $\|L(x)\|\leq M\|x\|$, $\forall x\in\mathbb{R}^p$ ($M=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|L(x)\|=\|L\|_{B(0,1)}$).*

Proposition 1.1.7 *$\Omega\subset\mathbb{R}^p$, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in\Omega$, f différentiable en x_0. Il existe un unique vecteur $V\in\mathbb{R}^p$ tel que $df_{x_0}(h)=<h,V>=\sum\limits_i h_iV_i$. Ce vecteur est appelé le* **gradient de f au point** *x_0 et se note $\nabla f(x_0)$ ou $\mathrm{Grad}f(x_0)$.*

Proposition 1.1.8 *$f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^q$ différentiables en $x_0\in\Omega$.*
1) $\lambda f+\mu g$ est différentiable en x_0 et $d(\lambda f+\mu g)_{x_0}=\lambda df_{x_0}+\mu dg_{x_0}$.
2) $q=1$. fg est différentiable en x_0 et $d(fg)_{x_0}=g(x_0)df_{x_0}+f(x_0)dg_{x_0}$.
3) $q=1$. Si $g(x_0)\neq 0$, f/g est différentiable en x_0 et $d(f/g)_{x_0}=\frac{g(x_0)df_{x_0}-f(x_0)dg_{x_0}}{(g(x_0))^2}$.

Proposition 1.1.9 *$\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$, $f:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{R}^q$, $x_0\in\Omega_1$, $y_0=f(x_0)$, $\Omega_2\subset\mathbb{R}^q$, $y_0\in\Omega_2$, $g:\Omega_2\longrightarrow\mathbb{R}^s$. Si f (resp. g) est différentiable en x_0 (resp. en y_0), alors $g\circ f$ est différentiable en x_0 et $d(g\circ f)_{x_0}=dg_{y_0}\circ df_{x_0}=dg_{f(x_0)}\circ df_{x_0}$.*

1.2 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition 1.2.1 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$ et $X \in \mathbb{R}^p$. On dit que f* **est différentiable dans la direction** *X (ou* **selon** *X) en x_0 si l'application $t \longmapsto f(x_0 + tX)$ de $]-\epsilon, +\epsilon[$ dans $\mathbb{R}^q$ est différentiable en $t = 0$. Si $q = 1$ on dit que f est dérivable dans la direction X. La différentielle de $t \longmapsto f(x_0 + tX)$ en $t = 0$ est notée $d_X f_{x_0}$; si $q = 1$, la dérivée de cette fonction se note $\dfrac{\partial f}{\partial X}(x_0)$.*

Proposition 1.2.2 *Si f est différentiable en x_0 alors, $\forall X \in \mathbb{R}^p$, f est différentiable dans la direction X en x_0. De plus, pour $h \in \mathbb{R}$, $d_X f_{x_0}(h) = h df_{x_0}(X)$. En particulier, si $q = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial X}(x_0) = df_{x_0}(X)$.*

Remarque. La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Par exemple, si $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$, $\forall X = (\alpha, \beta)$, $f(tX) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, si $X \neq 0$, et, $f(tX) = 0$ si $X = 0$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial X}(0)$ existe et vaut 0. Mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$ puisqu'elle n'est pas continue en ce point.

Définition 1.2.3 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \Omega$. Soit $1 \leq i \leq p$. Si f est différentiable dans la direction $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ on dit que f a une* **i-ème différentielle partielle** *et on note $d_{e_i} f_{x_0} = d_i f_{x_0}$. Si $q = 1$, on dit que f a une* **i-eme dérivée partielle** *et on note $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.*

Remarques. 1) L'existence des dérivées partielles n'entraine pas la différentiabilité dans une direction quelconque.

2) Les différentielles dans une direction et les dérivées partielles ont les même propriétés algébriques que les différentielles (propositions 5 et 6): $d_X(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda d_X f_{x_0} + \mu d_X g_{x_0}$, $d_X(fg)_{x_0} = g(x_0) d_X f_{x_0} + f(x_0) d_X g_{x_0} \dots$

Proposition 1.2.4 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots f_q) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \Omega$, f différentiable en x_0. $\forall X \in \mathbb{R}^p$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $d_X f_{x_0}(h) = h\Big(\dfrac{\partial f_1}{\partial X}(x_0), \dots, \dfrac{\partial f_q}{\partial X}(x_0)\Big)$. En particulier, $d_i f_{x_0}(h) = h\Big(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \dfrac{\partial f_q}{\partial x_i}(x_0)\Big)$.*

Proposition 1.2.5 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_q) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en x_0. $\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, on a:*

a) $df_{x_0}(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} d_i f_{x_0}(h_i)$;

b) Pour $1 \leq j \leq q$, $(p_j \circ df_{x_0})(h) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$.

Autrement dit, la matrice de df_{x_0} par rapport aux bases canoniques est

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'appelle la **matrice Jacobienne de f au point x_0.** *Lorsque $p = q$, le déterminant* $\det(Jf(x_0))$ *s'appelle le* **Jacobien de f au point** x_0. *Si $q = 1$, $\nabla f(x_0) = Jf(x_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\Big)$.*

Remarque. Si f est différentiable au point x_0, $Jf(x_0)$ existe, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.2.6 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$. f est dite de* **classe $\mathcal{C}^1$ dans** Ω *(et on écrit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$) ou* **continuement différentiable** *si $x \longrightarrow df_x$ est définie et continue de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q) = \mathbb{R}^{pq}$.*

Proposition 1.2.7 *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \Omega$. Si $\forall i, j$, f a des dérivées partielles $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ au voisinage de x_0 et* **continues** *en x_0, alors f est différentiable en x_0. En particulier, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \Leftrightarrow \forall j,\ f_j \in \mathcal{C}^1(\Omega) \Leftrightarrow \forall i, j,\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(\Omega)$.*

Exemple. $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors: $Jf(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, , $\det Jf(r, \theta) = r$.

Proposition 1.2.8 *1) $J(\lambda f + \mu g) = \lambda J(f) + \mu J(g)$.*
2) $q = 1$. $J(fg)(x_0) = g(x_0)Jf(x_0) + f(x_0)Jg(x_0)$.
3) $q = 1$, $g(x_0) \neq 0$. $J\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \frac{1}{g(x_0)^2}\Big(g(x_0)Jf(x_0) - f(x_0)Jg(x_0)\Big)$.
4) $J(g \circ f)(x_0) = Jg(f(x_0)).Jf(x_0)$; en particulier, pour $1 \leq j \leq s$, $1 \leq i \leq p$, $\frac{\partial(g \circ f)_j}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial g_j}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x_0)$.

1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 1.3.1 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \Omega$. On suppose que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe au voisinage de x_0. Si la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ a une dérivée partielle en x_0 dans la direction x_k, $\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)(x_0)$, on dit que f_i* **admet une dérivée partielle seconde** *(* **d'ordre 2** *) $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_i}(x_0)$* **en** *$x_0$. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre p $\frac{\partial^p f_i}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}$.*

Remarque. En général, l'ordre des dérivations compte. Par exemple, si

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2},\ f(0, 0) = 0,$$

on a successivement:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Théorème 1.3.2 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ définies au voisinage de x_0 et continues en x_0. Alors ces deux dérivées partielles sont égales. En particulier, si f a des dérivées partielles dans toutes les directions jusqu'a l'ordre n au voisinage de x_0, continues en x_0, on peut échanger l'ordre des dérivations dans le calcul de ces dérivées partielles en x_0.*

Terminologie, notations. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est dite **de classe $\mathcal{C}^k$** (et on note $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$) **dans** Ω si les composantes de f ont des dérivées partielles dans toutes les directions jusqu'a l'ordre k continues dans Ω. Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, on note $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}$.

Proposition 1.3.3 *1) Si f et g ont des dérivées partielles lusqu'a l'ordre $n \geq 2$, alors $lf + \mu g$, fg et f/g en ont aussi (quand elles sont définies).*
2) $f \in \mathcal{C}^n(\Omega_1)$, $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$, $g \in \mathcal{C}^n(\Omega_2) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^n(\Omega_1)$.

Exercices. 1) $f, g \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq n$. Alors

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(fg)}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} \frac{\partial^{|\alpha - \beta|} g}{\partial x^{\alpha - \beta}},$$

où $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i$, $\forall i$, et $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{p} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

2) $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.q.\ x > 0\}$, $\Omega_2 =]0, +\infty[\times] - \pi/2,\ \pi/2[$, $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $h : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$, $h(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$, et $g = f \circ h$. Alors

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \circ h^{-1}(x,y),$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

1.4 Accroissements finis, formule de Taylor

Proposition 1.4.1 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable dans Ω. Soient $x$et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. Alors, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$f(y) = f(x) + \sum_{j=I}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \theta(y - x))(y_j - x_j).$$

En d'autres termes, $\exists c \in]x, y[$ tel que $f(y) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(y_j - x_j)$.

Remarque. La proposition ci-dessus ne se généralise pas à $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ avec $q \geq 2$. Par exemple, $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est telle que $f(2\pi) = f(0) = (0, 0)$, et $f'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta) \neq (0, 0)$, $\forall \theta$.

Théorème 1.4.2 *(accroissements finis) $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $x, y \in \Omega$ tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en tout point de $[x, y]$. Alors*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{\xi \in [,y]} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Corollaire 1.4.3 *$\Omega \subset \mathbb{R}^p$ connexe, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable dans Ω. Alors f est constante si et seulement si $df_x = 0$ $\forall x \in \Omega$.*

Exercice. Même hypothèses que le théorème 2. Montrer que, pour $x_0 \in \Omega$, on a

$$\|f(y) - f(x) - df_{x_0}(y - x)\| \leq \|y - x\| \sup_{\xi \in [x,y]} \left(\sum_{i,j} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 1.4.4 *(formule de Taylor) $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$, f admettant des dérivées partielles continues jusqu'a l'ordre $n + 1$. En posant $h = y - x$, on a*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x + \theta h) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + (n+1) \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 D^\alpha f(x + th)(1 - t)^n dt, \end{aligned}$$

où $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_p!$, $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}$, $0 < \theta < 1$.

Remarque. La formule de taylor avec reste intégral est aussi valable pour les fonctions à valeurs complexes.

Application. Extréma d'une fonction de deux variables $f(x,y)$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^3$. S'il y a un extremum en (x_0, y_0) on a $df_{(x_0,y_0)} = 0$. On suppose donc cette condition remplie. La formule de Taylor donne

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = h^2 r_0 + 2hks_0 + k^2 t_0 + \|(h,j)\|^2 \epsilon(h,k),$$

où $r_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $t_0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$. Si $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$, on a un extrémum ($r_0 < 0$: maximum, $r_0 > 0$:minimum), si $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$, on a typiquement un col et si $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$ on ne peut conclure.

1.5 Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

Définition 1.5.1 *Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est un* **difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$** *($k \geq 1$)* **sur** *Ω si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

Remarque. Si f est un difféomerphisme alors $\forall x \in \Omega$, $df_x \in GL(\mathbb{R}^p)$.

Théorème 1.5.2 *(théorème d'invertion locale) Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, $x_0 \in \Omega$. Si $df_{x_0} \in GL(\mathbb{R}^p)$ (i.e.* $\det Jf(x_0) \neq 0$*) il existe un voisinage ouvert V de x_0 et un voisinage ouvert W de $f(x_0)$ tels que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^k$ difffémorphisme de V sur W.*

Remarque. Le fait que $\det Jf(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$ n'entraîne pas que f soit un difféomorphisme sur Ω. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2_+ = \{(r,\theta)/r > 0\}$, $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ n'est pas injective bien que $\det Jf(r,\theta) = r \neq 0$.

Théorème 1.5.3 *(théorème des fonctions implicites) Ω ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Si la différentielle en y_0 de la fonction $y \longmapsto f(x_0, y)$ est inversible (i.e. dans $GL(\mathbb{R}^q)$, il exsiste un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans Ω, un voisinage ouvert W de x_0 dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que:*

$$((x,y) \in V \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in W \text{ et } y = g(x)).$$

De plus, si $J_y f$ est la matrice jacobienne de f par rapport à y, pour $x \in W$, $J_y f(x, g(x))$ est inversible et on a

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial g_q}{\partial x_i}\right) = -J_y f(x, g(x))^{-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x, g(x)), \ldots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x, g(x))\right), \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

Exemples. Courbes et surfaces définies par une équation implcite: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$, dans $V(a)$, $f(x_1, \ldots x_p) = 0 \Leftrightarrow x_p = g(x_1, \ldots, x_{p-1})$. De plus on a

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{p-1}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{p-1}, g(x_1, \ldots, x_{p-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \ldots x_{p-1}, g(x_1, \ldots, x_{p-1}))}.$$

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 0$ avec $\nabla f \neq 0$.
Courbes dans $\mathbb{R}^3$: $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$, avec ∇f_1 et ∇f_2 linéairement indépendants.

Chapitre 2

INTEGRALE DE RIEMANN DANS $\mathbb{R}$

2.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est en* **escalier** *s'il existe une subdivision a_i, $0 \leq i \leq n$, $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$ de $[a,b]$ telle que sur $]a_i, a_{i+1}[$ f soit constante, $0 \leq i \leq n-1$. Une telle subdivision est dite* **associée** *à f.*

Remarques. 1) On ne demande rien aux $f(a_i)$: f peut être éventuellement non définie sur un sous-ensemble fini de $[a,b]$.

2) Une sous-subdivision (i.e. plus fine) d'une subdivision associée à f est associée à f. En d'autre termes, une réunion de subdivisions dont une est associée à f est associée à f.

Proposition 2.1.2 *Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier et (a_i) une subdivision associée à f. Si $f_{]a_i,a_{i+1}[} = A_i$, alors $\sum_0^{n-1} A_i(a_{i+1} - a_i)$ ne dépends pas de la subdivision associée à f choisie.*

Définition 2.1.3 *f étant comme ci-dessus, le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} A_i(a_{i+1} - a_i)$ s'appelle* **l'intégrale de** *f et se note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.*

Proposition 2.1.4 *f et g étant en escalier sur $[a,b]$, et λ et μ deux réels, $\lambda f + \mu g$ est en escalier et $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.*

Proposition 2.1.5 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$. Si, pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$, sauf éventuellement sur un ensemble fini, on a $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$. En particulier, si $f = g$ sauf sur un ensemble fini, $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.*

Corollaire 2.1.6 *soit f une fonction en escalier sur $I = [a, b]$.*
a) $m \leq f(x) \leq M$, $x \in I \backslash \{ens.fini\} \Rightarrow m(b-a) \leq \int_I f \leq M(b-a)$.
b) $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \leq (b-a) \sup_{I \backslash \{ens.fini\}} |f(x)|$.

2.2 Sommes de Darboux d'une fonction bornée

Définition 2.2.1 *Soient $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et (a_i) une subdivision de I. Pour tout i, soient $m_i = \inf_{[a_i, a_{i+1}[} f(x)$, $M_i = \sup_{[a_i, a_{i+1}[} f(x)$. On appelle* **somme de darboux supérieur** *(resp.* **inférieure)de f relativement à la subdivision** *(a_i) le nombre $S(f, a_i) = \sum_0^{n-1} M_i(a_{i+1} - a_i)$ (resp. $T(f, a_i) = \sum_0^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i)$).*

Proposition 2.2.2 *Soit $f : I = [a; , b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, et posons $U(f) = \inf_{(a_i)} S(f, a_i)$ et $V(f) = \sup_{(a_i)} T(f, a_i)$. Alors $U(f) = \inf_{\substack{u \geq f \\ u \text{ en escalier}}} \int_I u$ et $V(f) = \sup_{\substack{v \leq f \\ v \text{ en escalier}}} \int_I v$.*

Proposition 2.2.3 *f étant comme ci-dessus:*
(i) $\lambda \geq 0 \Rightarrow U(\lambda f) = \lambda U(f)$, $V(\lambda f) = \lambda V(f)$.
(ii) $\lambda \leq 0 \Rightarrow U(\lambda f) = \lambda V(f)$, $V(\lambda f) = \lambda U(f)$.
(iii) $U(f_1 + f_2) \leq U(f_1) + U(f_2)$, $V(f_1) + V(f_2) \leq V(f_1 + f_2)$.
(iv) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow U(f_1) \leq U(f_2)$, $V(f_1) \leq V(f_2)$.

Terminologie. $U(f)$ (resp. $V(f)$) s'appelle **l'integrale supérieure** resp. **inférieure**) de f.

2.3 Fonctions bornées intégrables au sens de Riemann

Définition 2.3.1 *Une fonction bornée $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* **intégrable au sens de Riemann sur** *I si son intégrale supérieure est égale à son integrale inférieure. Le nombre $U(f) = V(f)$ s'appelle alors* **l'intégrale de f sur** *I et se note $\int_I f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.*

Proposition 2.3.2 *Soit $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) f est intégrable sur I;
(ii) $\forall \epsilon > 0$, il existe u et v en escalier sur I telles que $v \leq f \leq u$, sauf sur un ensemble fini, et $\int_I u - v \leq \epsilon$;
(iii) $\forall \epsilon > 0$, il existe u et v bornées intégrables sur I telles que $v \leq f \leq u$ et $\int_I u - v \leq \epsilon$.

Remarque. Dans les conditions (ii) et (iii) de la proposition ci-dessus, on a $\int_I v \leq \int_I f \leq \int_I u$.

Exemple. Sur $[0, 1]$ la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$, n'est pas Riemann-intégrable.

Proposition 2.3.3 *$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $f = g$ sauf sur un ensemble fini. Alors g est intégrable et $\int_I f = \int_I g$.*

Proposition 2.3.4 *$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables, λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.*

Proposition 2.3.5 *$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, (a_i) une subdivisiion de I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si, pour tout i, elle est intégrable sur $[a_i, a_{i+1}]$ et de plus $\int_I f = \sum_0^{n-1} \int_{[a_i,a_{i+1}]} f$.*

Proposition 2.3.6 *$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables sur I. Alors fg est intégrable sur I.*

Proposition 2.3.7 *f et g bornées intégrables sur I.*
(i) Si $f \leq g$ hors d'un ensemble fini, on a $\int_I f \leq \int_I g$.
(ii) $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont intégrables sur I et $\max\left(\int_I f, \int_I g\right) \leq \int_I \sup(f, g)$, $\int_I \inf(f, g) \leq \min\left(\int_I f, \int_I g\right)$.
(iii) $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = -\inf(f, 0)$ et $|f|$ sont intégrables sur I et $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$, $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$ et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Corollaire 2.3.8 *(inégalité de Cauchy-Schwarz) f et g bornées intégrables sur I. Alors f^2 et g^2 sont intégrables sur I et on a*

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leq \left(\int_I f^2\right)\left(\int_I g^2\right),$$

et

$$\left(\int_I (f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_I f^2\right)^{1/2} + \left(\int_I g^2\right)^{1/2}.$$

Remarque. f_1 et f_2 bornées intégrables sur I. Une fonction g telle que $f_1 \leq g \leq f_2$ n'est pas nécéssairement intégrable sur I. Par exemple, f étant bornée, $|f|$ peut être intégrable sur I sans que f le soit.

Théorème 2.3.9 *Toute fonction monotone bornée sur un segment $I = [a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.*

Théorème 2.3.10 *Toute fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.*

Proposition 2.3.11 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe deux fonctions continues f_1 et f_2 de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_I f_2 - f_1 \leq \epsilon$.*

Exercice. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est **réglée** si elle est limite uniforme sur I de fonctions en escalier.

1) Montrer que f est réglée si et seulement si, $\forall x \in I$, f a une limite à gauche et à droite en x.
2) Montrer que toute fonction réglée est bornée et intégrable sur I.

Notation. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable. Pour $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$, on note

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{[\alpha,\beta]} f = -\int_\beta^\alpha f(t)dt.$$

Si $\alpha, \beta, \gamma \in I$ sont des points quelconques de I, on a donc

$$\int_\alpha^\gamma f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^\gamma f(t)dt.$$

Théorème 2.3.12 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable, $x_0, x \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$.*

a) F est continue sur I;

b) si f est continue en $x_1 \in I$ alors F est dérivable en x_1 et $F'(x_1) = f(x_1)$. En particulier, si f est continue, F est une primitive de f.

Remarque 2.3.13 *On généralise habituellement la notion de fonction intégrable au sens de Riemann aux fonctions à valeurs complexes de la manière suivante: si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann si $\Re e f$ et $\Im m f$ le sont. On pose alors $\int_I f = \int_I \Re e f + i \int_I \Im m f$.*

2.4 Formule de changement de variables

Théorème 2.4.1 *Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable et soit $\varphi : J = [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi'(u) \neq 0$, $\forall u \in J$. Alors $(f \circ \varphi)|\varphi'|$ est intégrable sur J et $\displaystyle\int_I f = \int_J (f \circ \varphi)|\varphi'|$.*

Remarque. Le théorème 4 reste vrai si on ne suppose pas $\varphi'(u) \neq 0$, mais **faux** si on ne suppose pas φ bijective. Par exemple, si $\varphi(x) = x^2$, $\varphi : [-1,+1] \longrightarrow [0,1]$, on a $\displaystyle\int_{[0,1]} 1 = 1$ et $\displaystyle\int_{[-1,+1]} |\varphi'| = 2$.

Théorème 2.4.2 *Soient $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$ (on ne suppose pas φ bijective). Alors, pour tout $u \in [\alpha, \beta]$, on a*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(x)dx = \int_\alpha^u (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

2.5 Intégration par parties

Proposition 2.5.1 *Soient $f, g : I =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, x_0 et x des points de I. Alors*

$$\int_{x_0}^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)g(t)dt.$$

2.6 Formules de la moyenne

Proposition 2.6.1 *Soient f et g bornées intégrables sur $I = [a,b]$, $g \geq 0$, $m \leq f \leq M$. Alors, $\displaystyle m\int_I g \leq \int_I fg \leq M\int_I g$.*

Proposition 2.6.2 *(2^{eme} formule de la moyenne) Soient $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$* **monotone** *bornée, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable. Alors il existe $c \in I$ tel que*

$$\int_I fg = f(a)\int_{[a,c]} g + f(b)\int_{[c,b]} g.$$

De plus, si f est décroissante positive, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_I fg = f(a)\int_{[a,c]} g.$$

Chapitre 3

INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE INTEGRALES GENERALISEES

3.1 Intégrales dépendant d'un paramètre

Rappel. X espace métrique, $A \subset X$, $\lambda_0 \in \overline{A}$. $\forall \lambda \in A$, f_λ, $f : I = [a, b] \longrightarrow F$, F normé. Alors f_λ tend vers f uniformément sur I quand λ tend vers λ_0 si $\|f_\lambda - f\|_I$ tend vers zéro quand $\lambda \longrightarrow \lambda_0$. Si $X = \mathbb{R}$, et si $\lambda_0 = \pm\infty$ on a la même définition.

Proposition 3.1.1 *X espace métrique, $A \subset X$, $\lambda_0 \in \overline{A}$ (ou $A \subset \mathbb{R}$ et $\lambda_0 = \pm\infty$), $\forall \lambda \in A$, f_λ, $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, intégrables. On suppose que f_λ tend vers f uniformément sur I quand $\lambda \longrightarrow \lambda_0$. Alors $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b |f_\lambda(x) - f(x)|dx = 0$. En particulier, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b f_l(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

Exemples. 1) $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \alpha$. Alors on a $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \int_a^b f(\lambda x)dx = \alpha(b - a)$.

2) g intégrable bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. Alors, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{-\lambda x} g(x)dx = 0$.

Proposition 3.1.2 *Ω ouvert de X espace métrique, $f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable bornée. Alors $F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)g(x)dx$ est définie et continue dans Ω.*

Proposition 3.1.3 *Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : [a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue ayant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i}$: $[a, b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée integrable. Alors, $F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)g(x)dx$ est dérivable dans Ω par rapport à λ_i et $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i}(x, \lambda)g(x)dx$.*

Exemple. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée intégrable. Alors $F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} f(t)dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F^{(n)}(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} t^n f(t)dt$.

Exercice. $f(x, \lambda) : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée intégrable, $u, v : [c, d] \longrightarrow [a, b]$.

1) Si f, u, v sont continues, $F(\lambda = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda)g(x)dx$ est continue sur $[c, d]$.

2) Si f est continue, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ existe et est continue, u et v sont dérivables et g est continue, alors F est dérivable sur $[c, d]$ et

$$F'(\lambda) = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)g(x)dx + v'(\lambda)f(v(\lambda), \lambda)g(v(\lambda)) - u'(\lambda)f(u(\lambda), \lambda)g(u(\lambda)).$$

Indication: écrire

$$\begin{aligned} F(\lambda + h) - F(\lambda) = & \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} (f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda))g(x)dx + \\ & + \int_{v(\lambda)}^{v(\lambda+h)} f(x, \lambda + h)g(x)dx + \\ & + \int_{u(\lambda+h)}^{u(\lambda)} f(x, \lambda + h)g(x)dx. \end{aligned}$$

3.2 Intégrales généralisées ou impropres

Définition 3.2.1 *Soit $f : I =]a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $f : I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$) telle que $\forall [\alpha, \beta] \subset I$, f est bornée intégrable sur $[\alpha, \beta]$. On dit que* **l'intégrale généralisée** *$\int_a^b f(t)dt$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$) converge si, pour $c \in]a, b[$, $\lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t)dt$ et $\lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t)dt$ (resp. $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$) exsistent. La somme de ces limites est alors $\int_a^b f(t)dt$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$). (on a bien sûr la même définition pour une intégrale sur $] - \infty, b]$)*

Proposition 3.2.2 *(critère de Cauchy) $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $|a - x_i| < \eta$, $|b - y_i| < \eta$, $i = 1, 2$ implique $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leq \epsilon$ et $\left| \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt \right| \leq \epsilon$.*

Remarque. On a bien sûr un critère semblable pour $\int_a^{+\infty} f(t)dt$: $b \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leq \epsilon$.

Définition 3.2.3 *$f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$). On dit que $\int_a^b f(t)dt$ (resp. $\int_a^{+\infty} f(t)dt$)* **converge absolument** *si $\int_a^b |f(t)|dt$ (resp. $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$) converge.*

Proposition 3.2.4 *$f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$, $b \leq +\infty$. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors elle converge.*

Proposition 3.2.5 *a) $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $b \leq +\infty$. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $\sup\limits_{\substack{x_i \in]a,b[\\ x_1 < x_2}} \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt < +\infty$. En particulier, $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^b g(t)dt$ converge impliquent $\int_a^b f(t)dt$ converge.*

b) Si il existe α et β tels que $0 < \alpha < \frac{|f(t)|}{|g(t)|} < \beta < +\infty$ dans un voisinage de a et un voisinage de b, alors les intégrales $\int_a^b |f(t)|dt$ et $\int_a^b |g(t)|dt$ sont de même nature.

Terminologie. $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$, $b \leq +\infty$. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b |f(t)|dt$ diverge on dit que **l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente**.

Exemples. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3) $\int_0^1 \log x dx$ est absolument convergente.

4) $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ sont semi-convergentes.

Remarque. $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$. Pour que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, il n'est ni nécéssaire ni suffisant que $f(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Proposition 3.2.6 *(théorème d'Abel) $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $g: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x > a$ g est bornée intégrable sur $[a,x]$, et $\sup\limits_{x>a} \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq M < +\infty$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.*

Exemple. $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f \searrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t) \sin t dt$ est convergente.

Exercice proposé. Convergence des intégrales $\int_0^1 x^\alpha (\text{Log} x)^\beta dx$ et $\int_1^{+\infty} x^\alpha (\text{Log} x)^\beta dx$.

3.3 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Définition 3.3.1 *E ensemble, $f :]a, b[\times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $b \leq +\infty$. On suppose que $\forall \lambda \in E$, $\int_a^b f(t, \lambda)dt$ converge. On dit que $\int_a^b f(t, \lambda)dt$* **converge uniformément par rapport à** *$\lambda \in E$ si pour $c \in]a, b[$, les limites $\lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t, \lambda)dt$ et $\lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t, \lambda)dt$ convergent uniformément par rapport à $\lambda \in E$ (c'est-à-dire: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\sup_{\lambda \in E} \left| \int_c^x f(t, \lambda)dt - \int_c^b f(t, \lambda)dt \right| \leq \epsilon, \ldots$).*

Proposition 3.3.2 *(critère de Cauchy) E ensemble, $f :]a, b[\times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\int_a^b f(t, \lambda)dt$ est uniformément convergente dans E si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $|a - x_i| < \eta$, $|b - y_i| < \eta$, $i = 1, 2$, impliquent $\sup_{\lambda \in E} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, \lambda)dt \right| \leq \epsilon$ et $\sup_{\lambda \in E} \left| \int_{y_1}^{y_2} f(t, \lambda)dt \right| \leq \epsilon$ (on a un critère semblable pour $f :]a, +\infty[\times E \longrightarrow \mathbb{C}$).*

Définition 3.3.3 *$\int_a^b f(t, \lambda)dt$ est dite* **absolument uniformément convergente pour** *$\lambda \in E$ si $\int_a^b |f(t, \lambda)|dt$ est uniformément convergente pour $\lambda \in E$.*

Proposition 3.3.4 *La convergence absolue uniforme entraine la convergence uniforme.*

Définition 3.3.5 *$\int_a^b f(t, \lambda)dt$ est dite* **normalement convergente** *s'il existe $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que:*

(i) $\int_a^b \varphi(t)dt$ converge;

(ii) $\forall (t, \lambda) \in]a, b[\times E$, $|f(t, \lambda)| \leq \varphi(t)$.

Proposition 3.3.6 *La convergence normale entraîne la convergence absolue uniforme.*

Proposition 3.3.7 *(théorème d'Abel) Soit $f : [a, +\infty[\times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante par rapport à t telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t, \lambda) = 0$ uniformément par rapport à $\lambda \in E$, et soit $g : [a, +\infty[\times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, $\forall \lambda \in E$, $t \longrightarrow g(t, \lambda)$ est bornée intégrable sur tout $[a, x]$, $x > a$, et $\sup_{\lambda \in E} \sup_{x > a} \left| \int_a^x g(t, \lambda)dt \right| \leq M < +\infty$. Alors $\int_a^b f(t, \lambda)g(t, \lambda)dt$ converge uniformément dans E.*

Proposition 3.3.8 *Soient $f_n, f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$, $b \leq +\infty$. On suppose que $\int_a^b f_n(t)dt$ converge uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$ et que $\forall x \in]a, b[$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, uniformément sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)ft$ converge et $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.*

Proposition 3.3.9 *Ω ouvert d'un espace métrique X, $f :]a,b[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ bornée intégrable sur tout $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$, $b \leq +\infty$. Si $\int_a^b f(t,\lambda)g(t)dt$ converge uniformément par rapport à $\lambda \in \Omega$, $\lambda \longrightarrow \int_a^b f(t,\lambda)g(t)dt$ est continue sur Ω.*

Proposition 3.3.10 *Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f :]a,b[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue ayant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$: $]a,b[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ bornée intégrable sur tout $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ $b \leq +\infty$. On suppose que $F(\lambda) = \int_a^b f(t,\lambda)g(t)dt$ est convergente pour tout $\lambda \in \Omega$ et que $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(t,\lambda)g(t)dt$ converge uniformément par rapport à $\lambda \in \Omega$. Alors F à une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ dans Ω continue donnée par $\frac{\partial F}{\partial \lambda_I}(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(t,\lambda)g(t)dt$.*

Exercice. $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\text{sin}t}{t}dt$. Par Abel, $F(\lambda)$ converge uniformément par rapport à $\lambda \in [0,+\infty[$. Donc F est continue sur $[0,+\infty[$ et $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sin}t}{t}dt$. Comme $\left|e^{-\lambda t}\text{sin}t\right| \leq e^{-\lambda_0 t}$ pour $\lambda \geq \lambda_0$, F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\text{sin}t dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}$. D'où $F(\lambda) = C - \text{Arctg}\lambda$, et comme $F(n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $C = \pi/2$ ce qui donne $F(\lambda) = \pi/2 - \text{Arctg}\lambda$ et en particulier $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sin}t}{t}dt = \pi/2$.

Chapitre 4

INTEGRALES CURVILIGNES

4.1 Formes différentielles de degré 1 à valeurs complexes

Notations. Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{C}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et soit dx_i l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{C})$ défini par $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$. Alors $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont $(dx_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base.

Définition 4.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On appelle* **forme différentielle continue de degré 1 dans** Ω *une application continue ω de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{C})$. En d'autres termes, ω est une telle forme si il existe des fonctions continues $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq p$, telles que $\omega = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)dx_i$. On dit que ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si les f_i sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

Exemple. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **différentielle extérieure de** f la forme différentielle de degré 1 $df = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Notation. Si $\omega = \sum f_i dx_i$, $h = \sum h_i e_i \in \mathbb{R}^p$, on notera $< \omega(x), h >= \sum h_i f_i(x)$.

Définition 4.1.2 *Soient Ω_1 ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ et ω une 1-forme différentielle sur Ω_2. On appelle* **image réciproque de** ω **par** φ *la 1-forme $\varphi^*(\omega)$ sur Ω_1 définie par $< \varphi^*(\omega)(x), h >=< \omega(\varphi(x)), d\varphi_x(h) >$. En d'autres termes, si $\omega = \sum_{i=1}^{q} f_i dx_i$, on a $\varphi^*(\omega) = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{q} (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Big) dx_j$.*

Proposition 4.1.3 *Dans les conditions de la définiton ci-dessus, on a:*
(i) $\omega \longrightarrow \varphi^*(\omega)$ *est linéaire.*
(ii) Si $\omega = df$ *alors* $\varphi^*(\omega) = d(f \circ \varphi)$.
(iii) $(\psi \circ \varphi)^*(\omega) = \varphi^*(\psi^*(\omega))$.

Terminologie. Une 1-forme $\omega = \sum f_i dx$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite **fermée** si, pour $i \neq j$, on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$; ω est dite **exacte** s'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\omega = dg$. Une forme exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est fermée, mais la réciproque est en général fause (par exemple $\frac{dx}{x+iy} + i\frac{dy}{x+iy}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$).

4.2 Intégrale curviligne d'une 1-forme

Terminologie. On appellera **chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans** Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$ un chemin continu $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ pour lequel il existe une subdivision (t_k) de $[a, b]$ telle que, $\forall k$, $\gamma_{|[t_k, t_{k+1}]}$ est $\mathcal{C}^1$.

Définition 4.2.1 *Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω.*
1) On appelle **longueur de** γ *le nombre*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^p (\gamma_i'(t))^2\Big)^{1/2} dt = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt.$$

2) Soit ω une 1-forme différentielle dans Ω. On appelle **intégrale de ω le long de γ** *le nombre*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega) = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma^*(\omega) = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\sum_{i=1}^p f_i(\gamma(t)\gamma'(t)\Big) dt$$

ou encore $\int_\gamma \omega = \int_a^b < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt.$

Remarque. La définition ci-dessus est indépendante de la subdivision convenable choisie et $\omega \longrightarrow \int_\gamma \omega$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Proposition 4.2.2 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^p$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^q$, $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *et ω une 1-forme sur Ω_2. Si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω_1 alors* $\int_{\varphi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \varphi^*(\omega)$.

Rappels. 1) $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \Omega$, $i = 1, 2$, sont dits **équivalents** si il existe $\varphi : [a_1, b_1] \longrightarrow [a_2, b_2]$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, **strictement croissante**, telle que $\gamma_2 \circ \varphi = \gamma_1$ (changement admissible de paramètre).
2) $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$. **Chemin opposé à** γ: $\overline{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \Omega$ définit par $\overline{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$.
3) γ_1 et γ_2 chemins consécutifs dans Ω (i.e. $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$). **Chemin composé de γ_1 et γ_2**: $\gamma_1\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ définit par $\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(a_1 + 2t(b_1 - a_1)), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(a_2 + (2t-1)(b_2 - a_2)), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$.

Proposition 4.2.3 *Soient γ, γ_1 et γ_2 des chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω et soit ω une 1−forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω.*

1) Si γ_1 et γ_2 sont équivalents, on a $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

2) $L(\gamma) = L(\overline{\gamma})$ et $\displaystyle\int_{\overline{\gamma}} \omega = -\int_{\gamma} \omega$.

3) Si γ_1 et γ_2 sont consécutifs, on a: $L(\gamma_1\gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ et $\displaystyle\int_{\gamma_1\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

Proposition 4.2.4 *(inégalité de la moyenne) Soient γ un chemin continu par morceaux et $\omega = \sum f_i dx_i$ une 1−forme. Alors*

$$\left|\int_\gamma \omega\right| \leq \sup_{x\in\gamma([a,b])} \left(\sum |f_i(x)|^2\right)^{1/2} L(\gamma).$$

4.3 La propriété de Poincarré

Le problème posé est le suivant: on sait que toute forme exacte est fermée et on sait aussi que en général la réciproque est fausse. On se demande alors si on peut trouver des conditions sur l'ouvert pour que cette réciproque soit vraie.

Remarque. $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\omega = df$. Alors pour tout chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω, on a $\displaystyle\int_\gamma df = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$. En particulier si γ est un chemin **fermé basé en** $\gamma(a)$ (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$) (on dit aussi un **lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux basé en** $\gamma(a)$) on a $\displaystyle\int_\gamma df = 0$ (cette remarque remontre que $\dfrac{dx + idy}{x + iy}$ est non exacte sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\}$ en prenant pour lacet $\gamma(t) = re^{it}$, $r \neq 0$).

Théorème 4.3.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$* **connexe par arc** *et ω une 1−formre différentielle $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $\forall \gamma_1$ et γ_2 chemins continus $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω ayant même origine et même extrémité, on a $\displaystyle\int_{\gamma_1} \gamma = \int_{\gamma_2} \omega$.

b) $\forall \gamma$ lacet continu $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω, on a $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.

c) ω est exacte dans Ω.

*De plus, si ces conditions sont satisfaites, $\forall a \in \Omega$ fixé, si γ_x est un chemin continu $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω d'origine a et d'extrémité x, la fonction $f(x) = \displaystyle\int_{\gamma_x} \omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω et $df = \omega$ (on dit que f*est une **primitive** de *ω).*

Terminologie: compact à bord orienté dans $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un compact K de $\mathbb{R}^2$ est **à bord orienté** s'il existe des lacets $(\Gamma_i)_{1\leq i\leq n}$ continus, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, tels que $\mathrm{Fr}(K) = \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ et si de plus:

(i) $\forall i,\ t \longmapsto \Gamma_i(t)$ est injective, exeption faite des extrémités, et les images des Γ_i sont deux à deux disjointes exeption faite, éventuellement, des extrémités.

(ii) $\forall i,\ \Gamma_i'(t) \neq 0$ et quand on parcourt Γ_i dans le sens des t croissants, on a à sa gauche les points intérieurs à K et à sa droite les points extérieurs à K.

Théorème 4.3.2 *(Formule de Green-Riemann) Soit K un compact à bord orienté Γ. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme différentielle dans un ouvert contenant K, on a*

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Théorème 4.3.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et ω une 1-forme différentielle dans Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) Pour tout rectangle planaire R aux côtés parallèles aux axes de coordonnées et contenu dans Ω on a $\int_{\partial R} \omega = 0$.

(ii) ω est localement exacte. Plus précisément, ω est exacte dans toute boule contenue dans Ω.

(iii) si ω est de classe $\mathcal{C}^1$ elle est fermée.

Proposition 4.3.4 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$. Si f_1 et f_2 sont deux primitives d'une 1-forme dans Ω alors $f_1 = f_2 + Cte$.*

Terminologie. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et γ_1 et γ_2 deux lacets continus $\mathcal{C}^1$ par morceaux basés en $a \in \Omega$ et suposons que $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow \Omega$. On dit que γ_1 et γ_2 sont **homopotes** s'il existe une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ telle que, $\forall \mu \in [0,1]$, $t \longrightarrow F(t,\mu)$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux basé en a et $F(t,0) = \gamma_1(t)$ et $F(t,1) = \gamma_2(t)$, $t \in [0,1]$.

Proposition 4.3.5 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et ω une 1-forme localement exacte dans Ω. Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.*

Définition 4.3.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que Ω* **a la propriété de Poincarré** *si toute 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω qui est fermée est exacte.*

Remarques. 1) Le théorème 4.3.3 montre que toute boule a la propriété de Poincarré.

2) Si Ω est connexe par arc et a la propriété de Poincarré et si ω est fermée alors, avec les notations du théorème 4.3.1, $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$ est une primitive de ω.

Proposition 4.3.7 *Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts ayant la propriété de Poincarré, si $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est connexe et non vide, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a la propriété de Poincarré.*

Définition 4.3.8 *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ est dit* **simplement connexe** *s'il est connexe par arc et si tout lacet basé en un point $a \in \Omega$ est homotope au lacet constant basé en a.*

Théorème 4.3.9 *Tout ouvert simplement connexe a la propriété de Poincarré.*

4.4 Indice d'un lacet dans $\mathbb{C}$

Notations complexes.

1) Si on pose $dz = dx + idy$ et $d\overline{z} = dx - idy$, pour toute 1−forme $\omega = Pdx + Qdy$ on a $\omega = Adz + Bd\overline{z}$ avec $A = \frac{1}{2}(P - iQ)$ et $B = \frac{1}{2}(P + iQ)$. En particulier, si $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, on a $\omega = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$ avec $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

2) De même, on peut noter la différentielle en notations complexe: si $z_0 = x_0 + iy_0$, et $h + ik \in \mathbb{C}$, on pose $df_{z_0}(h + ik) = df_{(x_0,y_0)}(h, k)$ de sorte que $df_{z_0}(h + ik) = (h + ik)\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + (h - ik)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

3) Avec de telles notations, la formule de Green−Riemann (théorème 4.3.2) s'écrit

$$\int_\Gamma Adz + Bd\overline{z} = 2i\int\int_K \left(\frac{\partial A}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)dxdy.$$

Définition 4.4.1 *Soit γ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. On appelle* **indice de γ par rapport à** *$a \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\gamma$ le nombre $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ que l'on note $I(\gamma, a)$.*

Proposition 4.4.2 *$I(\gamma, a)$ est un nombre entier.*

Proposition 4.4.3 *1) $I(\gamma, a)$ ne change pas lorsque l'on déforme continument γ sans passer par a.*

2) $I(\gamma, a)$ est constant dans chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\gamma$.

3) Si γ est le bord orienté d'un compact K de $\mathbb{C}$, pour $a \in \mathbb{C}\backslash K$, $I(\gamma, a) = 0$ et, pour $a \in \mathring{K}$, $I(\gamma, a) = 1$.

Proposition 4.4.4 *Soit γ un arc de Jordan (i.e. $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, γ injective sur $[a, b[$) fermé de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté positivement. Alors $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}\gamma$ a deux composantes connexes l'une bornée l'autre non. Dans la composante bornée $I(\gamma, a) = 1$ et dans la composante non bornée $I(\gamma, a) = 0$.*

Remarque. Calculer $I(\gamma, a)$ revient à trouver une fonction $f(t)$ telle que $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$ et alors $I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2i\pi}$.

Chapitre 5

INTEGRALE DE RIEMANN DANS $\mathbb{R}^p$

5.1 Fonctions en escalier

Notatons. On appelle **pavé de** $\mathbb{R}^p$ une partie P de $\mathbb{R}^p$ qui s'écrit $P = \prod_{i=1}^{p} I_i$ où I_i est un intervalle de $\mathbb{R}$. P est ouvert ssi, $\forall i$, I_i est ouvert. En particulier $\overset{\circ}{P}$ est un pavé ouvert. De même P est un pavé fermé ssi, $\forall i$, I_i est fermé, et, en particulier $\overline{P}$ est un pavé fermé. On appelle **volume d'un pavé** $P = \prod_{i=1}^{p} I_i$ le réel positif ou nul $V(P) = \prod_{i=1}^{p} |I_i|$ où $|I_i|$ désigne la longueur de I_i.

Proposition 5.1.1 *Soient P_i, $1 \leq i \leq n$ des pavés de $\mathbb{R}^p$. Alors il existe des pavés deux à deux disjoints R_j, $1 \leq j \leq N$, qui sont soit ouverts soit de volume nul tels que chacun des P_i soit réunion de certains des R_j.*

Proposition 5.1.2 *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^p$.* Si P est réunion de pavés R_j, $1 \leq j \leq N$, deux à deux disjoints alors $V(P) = \prod_{j=1}^{N} V(R_j)$.

Notation. Soit E une partie de $\mathbb{R}^p$. On notera χ_E la **fonction caractéristique de** E c'est-à-dire la fonction définie par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Supposons $E = \bigcup_i E_i$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors $\chi_E = \sum_i \chi_{E_i}$ et $\sum_i a_i \chi_{E_i} = 0$ ssi $\forall i$ $a_i = 0$ ou $E_i = \emptyset$.

Proposition 5.1.3 *Soient P_i des pavés non vides de $\mathbb{R}^p$. Alors $\sum a_i \chi_{E_i} = 0$ implique $\sum a_i V(P_i) =$* 0.

Corollaire 5.1.4 *Soient P_i et Q_j des pavés de $\mathbb{R}^p$.*
(i) $\sum a_i\chi_{P_i} = \sum b_j\chi_{Q_j}$ *implique* $\sum a_iV(P_i) = \sum b_jV(Q_j)$.
(ii) $\bigcup_i P_i = \bigcup_j Q_j$, *les P_i (resp. Q_j) étant deux à deux disjoints, implique* $\sum_i V(P_i) = \sum_j V(Q_j)$.

Définition 5.1.5 *1) Si $E \subset \mathbb{R}^p$ est réunion finie de pavés deux à deux disjoints, on appelle volume de E le nombre $V(E) = \sum_i V(P_i)$.*

2) On appelle **fonction en escalier sur** $\mathbb{R}^p$ *toute fonction f pouvant s'écrire $f = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{P_i}$ où $a_i \in \mathbb{R}$ et les P_i sont des pavés de $\mathbb{R}^p$. De plus, on appelle* **intégrale de** f **sur** $\mathbb{R}^p$ *le nombre $\int_{\mathbb{R}^p} f = \sum_{i=1}^n a_iV(P_i)$, nombre qui ne dépend pas de l'écriture particulière choisie de f.*

Proposition 5.1.6 *1) L'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p)$ des fonctions en escalier est une $\mathbb{R}$-algèbre stable par* sup *et* inf. *En particuler, si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^p)$, f^+, f^- et $|f|$ appartiennent à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p)$.*
2) $f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} f$ est une forme linéaire telle que $f \leq g$ implique $\int_{\mathbb{R}^p} f \leq \int_{\mathbb{R}^p} g$. En particulier $\left|\int_{\mathbb{R}^p} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}^p} |f|$.

5.2 Fonctions bornées intégrables au sens de Riemann sur un pavé

Définition 5.2.1 *Soient P un pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ et $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On appelle* **intégrale supérieure de** f **sur** P *le nombre*

$$\inf_{\substack{u\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^p)\\ u\geq f\\ u \text{ nulle sur } \mathbb{R}^p\setminus P}} \int_{\mathbb{R}^p} u,$$

et **intégrale inférieure de** f **sur** P *le nombre*

$$\sup_{\substack{u\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^p)\\ u\leq f\\ u \text{ nulle sur } \mathbb{R}^p\setminus P}} \int_{\mathbb{R}^p} u.$$

f est dite **intégrable au sens de Riemann sur** P *si son intégrale supérieure et son intégrale inférieure sont égales. Dans ce cas, ce nombre est appelé l'intégrale de f sur P et est noté $\int_P f$.*

Proposition 5.2.2 *Soit $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. f est intégrable ssi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists u, v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^p)$ nulles hors de P telles que $v \leq f \leq u$ et $\int_{\mathbb{R}^p} u - v \leq \epsilon$.*

Remarque. Toute fonction en escalier nulle hors de P est intégrable sur P.

Notation. L'ensemble des fonctions $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables sur P sera noté $\mathcal{R}(P)$.

Proposition 5.2.3 *$\mathcal{R}(P)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre stable par* sup *et* inf. *En particulier, $f \in \mathcal{R}(P)$ implique f^+, f^- et $|f|$ appartiennent à $\mathcal{R}(P)$. De plus, $f \longmapsto \int_P f$ est une forme linéaire positive (i.e. $f \leq g \Rightarrow \int_P f \leq \int_P g$ et $\left|\int_P f\right| \leq \int_P |f|$).*

Remarque. $|f| \in \mathcal{R}(P)$ **n'implique pas** $f \in \mathcal{R}(P)$.

Exemple: fonctions réglées. On appelle **fonction réglée sur** P une limite uniforme sur P de fonctions en escalier nulles hors de P. Toute fonction réglée est intégrable. En particulier toute fonction continue sur un pavé est intégrable.

Proposition 5.2.4 *Soient $Q \subset P$ deux pavés fermés. Si $f \in \mathcal{R}(P)$ alors $f_{|Q} \in \mathcal{R}(Q)$. D'autre part, si $g \in \mathcal{R}(Q)$ et si $\overline{g}$ désigne le prolongement à P de g par 0 alors $\overline{g} \in \mathcal{R}(P)$ et $\int_P \overline{g} = \int_Q g$.*

Théorème 5.2.5 *Soient P un pavé fermé et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle hors de P. Pour que pour tout pavé fermé Q $f_{|Q} \in \mathcal{R}(Q)$* **il suffit** *que f soit bornée et que l'ensemble Δ des points de discontinuité de f vérifie la propriété suivante: $\forall \epsilon > 0$, il existe des pavés Q_i, $1 \leq i \leq N$, tels que $\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ et $\sum_{i=1}^{N} V(Q_i) \leq \epsilon$.*

5.3 Foncton intégrable sur une partie, ensemble quarrable

Proposition 5.3.1 *Soient E une partie bornée de $\mathbb{R}^p$ et P et Q deux pavés tels que $E \subset P \cap Q$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\overline{f}$ le prolongement de f par zéro à $\mathbb{R}^p$. Alors $f \in \mathcal{R}(P)$ ssi $f \in \mathcal{R}(Q)$ et dans ce cas on a $\int_P \overline{f} = \int_Q \overline{f}$.*

Définition 5.3.2 *Soient E une partie bornée de $\mathbb{R}^p$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f* **est intégrable au sens de Riemann sur** *E si le prolongement $\overline{f}$ de f par zéro est intégrable sur tout pavé contenant E. Si P est un tel pavé, $\int_P \overline{f}$ ne dépend pas du pavé P choisit et s'appelle* **l'intégrale de** *f* **sur** *E que l'on note $\int_E f$. On note $\mathcal{R}(E)$ l'ensemble des fonctions bornées intégrables au sens de Riemann sur E. Si $\mathcal{R}(E)$ contient les constantes (i.e. si $\mathcal{R}(E)$ contient la fonction identiquement égale à 1), on dit que E est* **quarrable** *et on appelle* **volume de** *E le nombre $V(E) = \int_E 1$.*

Remarque. $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ **non quarrable**.

Proposition 5.3.3 *Soit E une partie bornée de $\mathbb{R}^p$.*
1) $\mathcal{R}(E)$ est une algèbre stable par sup *et* inf.
2) $f \longmapsto \int_E f$ est une forme linèaire positive sur $\mathcal{R}(E)$. En particulier, pour $f \in \mathcal{R}(E)$, $\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$.
3) Pour f et g dans $\mathcal{R}(E)$, on a

$$\left|\int_E fg\right| \le \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}\left(\int_E |g|^2\right)^{1/2}$$

*(***inégalité de Cauchy-Schwarz***).*
3) Pour f et g dans $\mathcal{R}(E)$, on a

$$\left(\int_E |f+g|^2\right)^{1/2} \le \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_E |g|^2\right)^{1/2}$$

*(***inégalité de Minkovski***).*

Proposition 5.3.4 *Pour que $E \subset \mathbb{R}^p$ soit quarrable, il suffit que, $\forall \epsilon > 0$, il existe des pavés Q_i, $1 \le i \le N$, tels que $\mathrm{Fr}(E) \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$ et $\sum_{i=1}^{N} V(Q_i) \le \epsilon$.*

Exercice. Soient $E \subset \mathbb{R}^p$ vérifiant la condition de la proposition 5.3.4 et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f \in \mathcal{R}(E)$.

Proposition 5.3.5 *Soient E_1 et E_2 deux parties bornées quarrables de $\mathbb{R}^p$. Alors:*
1) $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \backslash E_2$ et $E_2 \backslash E_1$ sont quarrables.
2) Soit $f : E_1 \cup E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors $f \in \mathcal{R}(E_1 \cup E_2) \Leftrightarrow f_{|E_1} \in \mathcal{R}(E_1)$ et $f_{|E_2} \in \mathcal{R}(E_2)$. De plus, dans ces conditions on a $\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1 \backslash E_2} f + \int_{E_2 \backslash E_1} f + \int_{E_1 \cap E_2} f$. En particulier, $V(E_1 \cup E_2) = V(E_1 \backslash E_2) + V(E_2 \backslash E_1) + V(E_1 \cap E_2)$.

5.4 Calcul d'intégrales multiples

Théorème 5.4.1 (**Théorème de Fubini**) *Soient P un pavé fermé de $\mathbb{R}^p$, Q un pavé fermé de $\mathbb{R}^q$ et $f \in \mathcal{R}(P \times Q)$. On suppose que $A = \{x \in P/y \longmapsto f(x,y) \notin \mathcal{R}(Q)\}$ est quarrable et de volume nul. Alors si $F : P \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et telle que, $\forall x \in P \backslash A$, $F(x) = \int_Q f(x,.)$, on a $F \in \mathcal{R}(P)$ et*

$$\int_{P\times Q} f = \int_P F = \int_P \Big(\int_Q f(x,y)dy\Big)dx.$$

Remarque. On peut naturellement échanger les rôles de x et y: si $\{y \in Q/x \longmapsto f(x,y) \notin \mathcal{R}(P)\}$ est quarrable et de volume nul alors

$$\int_{P\times Q} f = \int_Q \Big(\int_P f(x,y)dx\Big)dy.$$

Corollaire 5.4.2 *Soient $P = \prod_{i=1}^{p}[a_i, b_i]$ et $f \in \mathcal{R}(P)$. On suppose que:*

-l'ensemble $A_p = \{(x_1, \dots x_{p-1}) \in \prod_{i=1}^{p-1}[a_i, b_i]/x_p \longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \notin \mathcal{R}([a_p, b_p])\}$ est quarrable et de volume nul;

-$(x_1, \dots x_{p-1}) \longmapsto \int_{a_p}^{b_p} f(x_1, \dots x_p)dx_p$ étant prolongée en une fonction F_p bornée, l'ensemble $A_{p-1} = \{(x_1, \dots x_{p-2}) \in \prod_{i=1}^{p-2}[a_i, b_i]/x_{p-1} \longmapsto F_p(x_1, \dots x_{p-1}) \notin \mathcal{R}([a_{p-1}, b_{p-1}])\}$ est quarrable et de volume nul;

-et ainsi de suite par récurrence descendante sur les indices.

Alors

$$\int_P f = \int_{a_1}^{b_1} \Bigg[\int_{a_2}^{b_2} \Bigg[\dots \Bigg[\int_{a_p}^{b_p} f(x_1, \dots x_p)dx_p\Bigg] \dots\Bigg]dx_2\Bigg]dx_1.$$

Remarque. 1) Habituellement, on note $\int_P f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_p}^{b_p} f dx_p$.

2) On notera que les hypothèses du théorème 5.4.1 et du corollaire 5.4.2 sont satisfaites si par exemple f est continue.

Proposition 5.4.3 *Soient P un pavé fermé de $\mathbb{R}^p$ et Q un pavé fermé de $\mathbb{R}^q$. Soient $f \in \mathcal{R}(P)$ et $g \in \mathcal{R}(Q)$, et posons $F(x,y) = f(x)g(y)$. Alors $F \in \mathcal{R}(P \times Q)$ et $\int_{P\times Q} F = \Big(\int_P f\Big)\Big(\int_Q g\Big)$.*

Proposition 5.4.4 *Soit $E \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble borné quarrable. Soient φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ bornées telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$, et posons $\Delta = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} / \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Alors Δ est quarrable (dans $\mathbb{R}^{p+1}$) et si $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Delta)$ est bornée, on a $f \in \mathcal{R}(\Delta)$ et*

$$\int_\Delta f = \int_E \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

En particulier, $V(\Delta) = \int_E \varphi_2 - \varphi_1.$

Exemples. 1) $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 / 0 \leq y \leq x\}$. Alors $\int_\Delta (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^x (x^2+y^2)dy \Big) dx = 1/3$.

2) $E = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \subset [-R,+R]^3 = P$. Alors $V(E) = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2)dz = \frac{4\pi R^3}{3}$. De plus, si $f(x,y,z) = z^2$, on a

$$\int_E z^2 dxdydz = \int_{-R}^{+R} z^2 \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

5.5 Changement de variables

Théorème 5.5.1 *Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V. Soit E un ensemble quarrable tel que $\overline{E} \subset U$ Alors $\varphi(E)$ est quarrable et si $f \in \mathcal{R}(\varphi(E))$, on a $f \circ \varphi |\det J\varphi| \in \mathcal{R}(E)$ et* $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f \circ \varphi |\det J\varphi|$.

Remarque. Si $E = K$ est un compact quarrable, il suffit de supposer $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi_{|\overset{\circ}{K}}$ un difféomorphisme de l'intérieur de K sur son image (alors φ n'est pas nécéssairement un difféomorphisme de K sur $\varphi(K)$: $J\varphi$ peut s'annuler sur $\mathrm{Fr}(K)$).

Exemple: coordonnées polaires. $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta\}$, $\det J\varphi = r$. On prend par exemple $K = \{r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $r_1 \geq 0$. Alors φ est un difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}$ sur $C = \{r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}$ privé de $\{(x,0)/r_1 < x < r_2\}$. Si $f \in \mathcal{C}(\overline{C})$, on a donc

$$\int_C f = \int_{\varphi(K)} f = \int_K f r dr d\theta = \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \right) dr$$

5.6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition 5.6.1 *Soient K un compact quarrable de $\mathbb{R}^p$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $f : K \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors $F(y) = \int_K f(x, y)dx$ est continue sur Ω.*

Proposition 5.6.2 *Soient K un compact quarrable de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : K \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}(x, y) : K \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors $F(y) = \int_K f(x, y)dx$ est dérivable sur I et $F'(y) = \int_K \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$.*

Exemple. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : (x, z) \longmapsto f(x, z)$ de $K \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ (K compact quarrable dans $\mathbb{R}^p$) continue. Si, $\forall x \in K$, $z \longmapsto f(x, z)$ est holomorphe dans Ω, alors $F(z) = \int_K f(x, z)dx$ est holomorphe dans Ω.

Chapitre 6

FONCTIONS HOLOMORPHES

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une application de Ω dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est* **holomorphe en** z_0 *si la limite* $f'(z_0) = \lim\limits_{u \to 0, u \neq 0} \dfrac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u}$ *existe. f est dite* **holomorphe dans** Ω *si elle est holomorphe en tout point de Ω.*

Proposition 6.1.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. Les conditions suvantes sont équivalentes:*

(i) f est holomophe en z_0;

(ii) f est différentiable en z_0 et df_{z_O} est $\mathbb{C}$-linéaire;

*(iii) f est différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. En d'autres termes, si $f = P + iQ$, on a $\dfrac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$ (***conditions de Cauchy-Riemann***).

Si ces conditions sont satisfaites, on a $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Lemme 6.1.3 *L'application $\mathbb{R}$-linéaire $z \longmapsto Az + B\overline{z}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ssi $B = 0$.*

Exemples. La somme d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence. Plus généralement toute fonction analatique complexe (i.e. de variable complexe) est holomorphe.

Remarque. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si $\mathfrak{Re} f$ ou $\mathfrak{Im} f$ est constante alors f est constante.

Notations. Ω étant un ouvert de $\mathbb{C}$, on notera $H(\Omega)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des fonctons holomorphes sur Ω.

Théorème 6.1.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ une fonction holomorphe en tout point de Ω sauf peut être sur l'intersection de Ω avec une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées. Alors la 1-forme différentielle $f(z)dz$ est localement exacte dans Ω. En particulier:*

1) si Ω est simplement connexe il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $g'(z) = \frac{\partial g}{\partial z}(z) = f(z)$, $z \in \Omega$;

2) Si γ est un lacet homotope à un point dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Remarque. Si on ne suppose pas Ω simplement connexe, le 1) du théorème 6.1.4 peut être faux: par exemple si $\Omega = \mathbb{C}^*$, $1/z$ est holomorphe dans Ω et n'admet pas de primitive dans Ω. Le même exemple montre aussi que l'on ne peut pas retirer l'hypothèse faite sur γ dans le 2).

6.2 La formule de Cauchy et ses conséquences

6.2.1 La formule de Cauchy

Théorème 6.2.1 (**formule de Cauchy**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω et γ un lacet homotope à un point dans Ω. Pour tout $a \in \Omega \backslash Im\gamma$, on a*

$$I(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Exemple. Si D est un disque fermé dans $\mathbb{C}$ de bord orienté positivement ∂D et si f est holomorphe au voisinage de D alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \text{ appartient au disque ouvert } D\backslash\partial D, \\ 0 & \text{si } a \text{ n'appartient pas au disque } D. \end{cases}$$

Proposition 6.2.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact à bord orienté Γ contenu dans Ω, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et a un point de l'intérieur de K. Alors on a*

$$2i\pi f(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz - 2i\int\int_K \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)}{z-a}dxdy.$$

En particulier si f est holomorphe, $f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$.

Proposition 6.2.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$. Si f est bornée alors elle se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω.*

Remarque. La démonstration de cette proposition montre qu'il n'est pas nécéssaire que f soit bornée pour pouvoir conclure. Par exemple, si on pose pour $\epsilon > 0$ assez petit $M_f(\epsilon) = \sup_{|z-z_0|=\epsilon} |f(z)|$ il suffit de supposer que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n M_f(\epsilon_n) = 0$ pour une suite ϵ_n tendant vers zéro pour avoir la même conclusion. Ceci montre en particulier que pour que f soit non bornée il faut que, pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\epsilon M_f(\epsilon) \geq c > 0$.

Exercice. Soient $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et K un compact à bord orienté contenu dans Ω. Posons

$$F(z) = \frac{-1}{\pi} \int\int_K \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} dxdy, \ z \in \overset{\circ}{K}.$$

Alors $F \in \mathcal{C}^1\left(\overset{\circ}{K}\right)$ et $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z) = g(z)$, $z \in \overset{\circ}{K}$.

Indications: soient z_0 intérieur à K et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction valant 1 au voisinage de z_0 et nulle en dehors d'un disque centré en z_0 et contenu dans l'intérieur de K. On a donc

$$F(z) = \frac{-1}{\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\zeta) g(\zeta)}{\zeta - z} dxdy + \frac{-1}{\pi} \int\int_K \frac{(1 - \varphi(\zeta)) g(\zeta)}{\zeta - z} dxdy = F_1(z) + F_2(z).$$

Pour z voisin de z_0, F_2 est holomorphe. Par ailleurs, par changement de variables,

$$F_1(z) = \frac{-1}{\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\zeta + z) g(\zeta + z)}{\zeta} dxdy,$$

ce qui montre que F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\frac{\partial F_1}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{-1}{\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}(\varphi g)(\zeta + z)}{\zeta} dxdy = \frac{-1}{\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}(\varphi g)(\zeta)}{\zeta - z} dxdy.$$

La proposition 6.2.2 montre alors que $\frac{\partial F_1}{\partial \overline{z}}(z) = (\varphi g)(z) = g(z)$ pour z voisin de z_0.

6.2.2 Dévelopement en série entière d'une fonction holomorphe

Théorème 6.2.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f \in H(\Omega)$;

(ii) f est analytique dans Ω. Plus précisément, si f est une fonction holomorphe dans un disque $D = \{|z - z_0| < r_0\}$, $r_0 > 0$, alors on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, la série convergeant normalement dans tout disque $\{|z - z_0| \leq r < r_0\}$, les a_n étant donnés par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \ 0 < r < r_0.$$

Corollaire 6.2.5 (**inégalités de Cauchy**) *Soit f une fonction holomorphe dans $D = \{|z - z_0| < r_0\}$ et soit $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ son développement de Taylor (i.e. en série entière) dans D. Pour $0 < r < r_0$ posons $M(r) = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$. Alors, $\forall n$, on a $|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}$.*

Corollaire 6.2.6 (**Théorème de Liouville**) *Soit $f \in H(\mathbb{C})$. Si f est bornée alors elle est constante.*

Corollaire 6.2.7 (**Théorème de D'Alembert**) *Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de degré d alors P a d racines dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 6.2.8 *Si $f \in H(\Omega)$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω et les dérivées $\dfrac{\partial^n f}{\partial z^n}$ sont holomorphe dans Ω. De plus, si f est holomorphe au voisinage de $\{|z - z_0| \leq r_0\}$, on a*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\{|\zeta - z_0| = r_0\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \text{ pour } |z - z_0| < r_0.$$

Remarque. Toutes les propriétés connues pour les fonctions analytiques s'appliquent donc aux fonctions holomorphes. Par exemple:

Proposition 6.2.9 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$.*
*1) Si f est non nulle, l'ensemble des ses zéros est discret (**principe des zéros isolés**).*
2) Supposons Ω connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes:
-(i) $f = 0$;
-(ii) l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans Ω;
-(iii) il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.

6.2.3 Le théorème de Moréra

Théorème 6.2.10 (**Théorème de Moréra**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) pour tout lacet γ homotope à un point dans Ω on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$;
(ii) pour tout rectangle R contenu dans Ω on a $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$;
(iii) la 1-forme $f(z)dz$ est localement exacte;
(iv) $f \in H(\Omega)$.

Corollaire 6.2.11 *Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Si f est holomorphe en tout point de Ω sauf peut-être sur une droite alors $f \in H(\Omega)$.*

Corollaire 6.2.12 *Soit $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $H(\Omega)$. Si cette suite converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ alors $f \in H(\Omega)$.*

6.2.4 Propriété de la moyenne, principe du maximum

Théorème 6.2.13 (**Propriété de la moyenne**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $\{|z - z_0| \leq r_0\} \subset \Omega$. Alors $f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$.*

Remarque. On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ **vérifie la propriété de la moyenne** si pour tout disque fermé D contenu dans Ω de centre z et de rayon $r > 0$, on a $f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$. Si f vérifie la propriété de la moyenne, alors $\Re e f$ et $\Im m f$ aussi.

Théorème 6.2.14 (**Principe du maximum**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue ayant la propriété de la moyenne. S'il existe $a \in \Omega$ et $\epsilon > 0$ tel que pour $|z - a| < \epsilon$ on a $z \in \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(a)|$ alors f est constante au voisinage de a.*

Corollaire 6.2.15 *Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ une fonction ayant la propriété de la moyenne dans Ω. Soit $M = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. Alors:*
(a) $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$;
(b) S'il existe $a \in \Omega$ tel que $|f(a)| = M$ alors f est constante dans Ω.

6.2.5 Principe de symétrie et lemme de Schwarz

Proposition 6.2.16 (**Principe de symétrie de Schwarz**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$* **symétrique par rapport à** *$\mathbb{R}$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{\Im m z \geq 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{\Im m z \leq 0\}$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega^+) \cap H\left(\overset{\circ}{\widehat{\Omega^+}}\right)$ telle que $f_{|\Omega^+ \cap \mathbb{R}}$ soit réelle. Alors il existe une unique $\tilde{f} \in H(\Omega)$ telle que $\tilde{f}_{|\Omega^+} = f$. De plus, si $z \in \Omega^-$ on a $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$.*

Proposition 6.2.17 (**Lemme de Schwarz**) *Soit f une fonction holomorphe dans $D = \{|z| < 1\}$. Si $f(0) = 0$ et si $|f(z)| \leq 1$ dans D on a:*
(a) $\forall a \in D$, $|f(z)| \leq |z|$;
(b) si il existe $z_0 \neq 0$ dans D tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tel que $f(z) = \lambda z$, $z \in D$.

6.3 Développement de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne

Notation. Nous appellerons **série de Laurent dans la couronne** $C = \{0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, une série de fonctions de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ telle que la série entière $\sum_{0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge dans le disque $\{|z - z_0| < r_2\}$ et la série entière $\sum_{1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^n$ converge dans le disque $\{|z - z_0| < 1/r_1\}$. Ainsi la série de Laurent est une série de fonctions qui converge normalement dans toute couronne de la forme $\{r_1' \leq |z - z_0| \leq r_2'\}$ avec $r_1 < r_1' \leq r_2' < r_2$ et simplement dans C.

Théorème 6.3.1 *1) Soit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ la somme d'une série de Laurent dans une couronne $C = \{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Alors f est holomorphe dans C et si $r_1 < r < r_2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$.*

2) Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C = \{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Alors il existe une unique série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ dans C dont la somme est égale à f. On l'appelle **le développement en série de Laurent de** f **dans** C.

Remarque. Si f est holomorphe dans $C = \{r_1 < |z| < r_2\}$, le théorème précédent montre que $f = f_1 + f_2$ où f_1 est holomorphe dans le disque $\{|z - z_0| < r_2\}$ et f_2 est holomorphe dans $\{|z| > r_1\}$. De plus, cette décomposition est unique si on impose à f_2 de tendre vers zéro quand $|z| \longrightarrow +\infty$.

Proposition 6.3.2 *(**Inégalités de Cauchy**) Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C = \{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, et soit $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ son développement de Laurent. Pour $r_1 < r < r_2$, soit $M_f(r) = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}$.*

Terminologie. 1) Soit f une fonction holomorphe dans un disque pointé $C = \{0 < |z - z_0| < r_2\}$. Si f ne se prolonge pas holomorphiquement en z_0, on dit que f **a un point singulier isolé en** z_0. Soit alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ le développement de Laurent de f dans la couronne C.

a) S'il n'y a qu'un nombre fini de $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$ ou, ce qui revient au même, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^n f(z)$ soit bornée donc holomorphe en z_0, on dit que f **est méromorphe en** z_0 et que z_0 est **un pôle de** f. De plus, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f soit holomorphe en z_0 s'appelle **l'ordre du pôle** z_0.

b) S'il y a une infinité d'entiers $n < 0$ tels que $a_n \neq 0$ on dit que z_0 est un **point singulier essentiel de** f.

2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit A un sous-ensemble discret de Ω. Une fonction $f : \Omega \backslash A \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **méromorphe dans** Ω si elle est holomorphe dans $\Omega \backslash A$ et si elle est méromorphe au voisinage de tout point de A.

Remarque. 1) Soit f une fonction méromorphe dans Ω. Si f a un nombre fini de pôles z_i, $1 \leq i \leq n$, il existe des entiers p_i tels que $\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)^{p_i} f(z)$ est holomorphe dans Ω. En fait ce résultat est toujours vrai c'est-à-dire sans supposer les pôles de f en nombre fini.

2) Si $f \in H(\Omega)$ est non identiquement nulle dans une composante connexe de Ω, alors $1/f$ est méromorphe dans Ω.

Proposition 6.3.3 *Soit f une fonction holomorphe dans un disque pointé $\{0 < |z - z_0| < r\}$. Si z_0 est un point singulier essentiel de f alors, pour tout $\epsilon > 0$, l'image par f de $\{0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Remarque. On a en fait un résultat bien meilleur: cette image est égale soit à $\mathbb{C}$ soit à $\mathbb{C}$ privé d'un point (**théorème de Picard**).

6.4 Le théorème des résidus

Terminologie. Soit f une fonction holomorphe dans $C = \{0 < |z - z_0| < r\}$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ son dévelopement de Laurent dans C. On appelle **résidu de** f **en** z_0 le coefficient a_{-1} et on note $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

Proposition 6.4.1 *Soient $C = \{r_1 < |z| < r_2\}$, $f \in H(C)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ le développement de Laurent de f dans C. Alors pour tout lacet γ dans C on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = I(\gamma, 0)a_{-1}.$$

Théorème 6.4.2 (**théorème des résidus**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, z_i, $1 \leq i \leq n$ des points deux à deux distincts de Ω, $\Omega' = \Omega \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$ et $f \in H(\Omega')$. Soit γ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux homotope a un point dans Ω et tel que, $\forall i$, $z_i \notin \mathrm{Im}\gamma$. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} I(\gamma, z_i)\mathrm{Res}(f, z_i).$$

Remarque. Si Ω n'est pas simplement connexe, on ne peut pas enlever l'hypothèse faite sur γ dans le théorème 6.4.2. C'est par exemple le cas pour $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = 1/z$.

Théorème 6.4.3 (**théorème des résidus**) *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω sauf sur un sous-ensemble discret. Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord orienté Γ. On suppose que Γ ne contient aucun des points singuliers de f. Soient z_i, $1 \leq i \leq n$, les points singuliers de f contenus dans $\overset{\circ}{K}$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \mathrm{Res}(f, z_i).$$

Exemples. 1) Soit g une fonction holomorphe au voisinage de z_0 telle que $g(z_0) \neq 0$ de sorte que $g(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ avec $a_0 \neq 0$. Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, le développement de Laurent de f est $\sum a_n(z-z_0)^{n-k}$ et on a donc $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(z_0)$. En général, si f est méromorphe en z_0, et si z_0 est un pôle de f d'ordre k, on a $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)^{(k-1)}(z_0)$.

2) Soit f une fonction méromorphe en z_0 de sorte qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et g holomorphe au voisinage de z_0 tels que $f = (z-z_0)^k g(z)$. Alors on a $\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'}{g}$. Comme $\frac{g'}{g}$ est holomorphe en z_0, $\frac{f'}{f}$ a un pôle simple en z_0 et $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, z_0\Big) = k$. Ainsi:

(i) si $k = 0$, $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, z_0\Big) = 0$;

(ii) si $k > 0$, z_0 est un zéro de f et $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, z_0\Big)$ est l'ordre de multiplicité de ce zéro;

(ii) si $k < 0$, z_0 est un pôle de f et $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, z_0\Big)$ est l'opposé de l'ordre de ce pôle.

Proposition 6.4.4 (**théorème de Rouché**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe dans Ω et $a \in \mathbb{C}$. Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord orienté Γ. On suppose que f n'a pas de pôles sur Γ et que $a \notin f(\Gamma)$. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = Z - P$$

où Z est la somme des ordres de multiplicité des racines de l'équation $f(z) = a$ dans $\overset{\circ}{K}$ et P la somme des ordres des pôles de f dans $\overset{\circ}{K}$.

Corollaire 6.4.5 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans Ω* **non constante**, *$z_0 \in \Omega$ et $a = f(z_0)$. Soit k l'ordre du zéro z_0 de l'équation $f(z) - a = 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit il existe $\delta > 0$ tel que, pour $|a-b| < \delta$, l'équation $f(z) = b$ a exactement k racines dans $\{|z-z_0| < \epsilon\}$ qui sont deux à deux distinctes si $a \neq b$. En particulier, il existe un voisinage ouvert $V \subset \{|z-z_0| < \epsilon\}$ de z_0 et un voisinage ouvert W de a tels que $f(V) = W$ (on dit que f* **est ouverte**).

Corollaire 6.4.6 *Soient $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $a = f(z_0)$. Supposons $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $V \subset \Omega$ (resp. W) un voisinage ouvert de z_0 (resp. de a) tels que $W = f(V)$ et f est une bijection de V sur W. De plus si $g = f^{-1}$, g est holomorphe dans W.*

6.5 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

Lemme 6.5.1 *Soit g une fonction continue dans $\Omega = \{\Im\mathrm{m} z \geq 0\}$ telle que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} g(z) = 0$. Soit C_R le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans Ω. Alors pour $m \in \mathbb{R}_+^*$, on a*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} e^{imz} g(z) dz = 0.$$

Lemme 6.5.2 *Soit $f : D(z_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe en z_0, ce point étant un pôle simple de f. Soit $\gamma_{\alpha,r}$ un arc de cercle centré en z_0, de rayon $r < r_0$, de mesure angulaire α et orienté positivement. Alors*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_{\alpha,r}} f(z) dz = i\alpha \mathrm{Res}(f, z_0).$$

1) Integrales de fractions rationelles de la forme $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a poles non reels et telles que $d^\circ Q \geq d^\circ P + 2$.

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2i\pi \sum_{\Im\mathrm{m} a > 0} \mathrm{Res}(R, a) = 2i\pi \sum_{\Im\mathrm{m} a < 0} \mathrm{Res}(R, a).$$

Exemple. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)} = \frac{\pi}{200}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$.

2) Integrales de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$, $\alpha > 0$, f etant holomorphe au voisinage de $\{\Im\mathrm{m} z \geq 0\}$ sauf sur un ensemble fini $A \subset \{\Im\mathrm{m} z \geq 0\}$.

a) $A \subset \{\Im\mathrm{m} z > 0\}$ **et** $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$**.** Alors on a:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2i\pi \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, a).$$

b) $A \cap \mathbb{R}$ **formé de pôles simples de** f **et** $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$**.**

Si $A\cap\mathbb{R}=\{a_1,\ldots,a_n\}$, $a_1<\ldots<a_n$, on a:

$$\lim_{r\to+\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-r}^{a_1-\epsilon}f(x)e^{i\alpha x}dx+\sum_{j=1}^{n-1}\int_{a_j+\epsilon}^{a_{j+1}-\epsilon}f(x)e^{i\alpha x}dx+\int_{a_n+\epsilon}^{+r}f(x)e^{i\alpha x}dx\right\}=$$
$$=2i\pi\sum_{a\in A\cap\{\Im\mathrm{m} z>0\}}\mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z},a)+$$
$$+i\pi\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z},a_j).$$

Exemple. $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Remarque. Le même type d'intégrale avec $\alpha<0$ se traite en considérant les points singuliers de f dans $\{\Im\mathrm{m} z\leq 0\}$.

3) Integrales de la forme $\int_0^{+\infty}\frac{R(x)}{x^\alpha}dx$ ou R est une fraction rationnelle sans poles sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to+\infty}R(x)=0$ et $0<\alpha<1$.

On a:

$$\left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right)\int_0^{+\infty}\frac{R(x)}{x^\alpha}dx=2i\pi\sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+}\mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha},a\right).$$

Exemple. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x)}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, $0<\alpha<1$.

4) Integrales de la forme $\int_0^{2\pi}R(\sin t,\cos t)dt$ ou $R(u,v)$ est une fraction rationnelle sans poles sur $\{x^2+y^2=1\}$.

En posant $R_1(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{z-1/z}{2i},\frac{z+1/z}{2}\right)$, on a:

$$\int_0^{2\pi}R(\sin t,\cos t)dt=2i\pi\sum_{|a|<1}\mathrm{Res}(R_1,a).$$

Exemple. $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t}=2i\pi\sum\mathrm{Res}\left(\frac{2}{z^2+2iaz-1}\right)=\frac{2\pi}{(a^2-1)^{1/2}}$, $a>1$.

5) Integrales de la forme $\int_0^{+\infty}R(x)\log x\,dx$ ou R est une fraction rationnelle sans poles sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty}xR(x)=0$.

On a:

$$\int_0^{+\infty}R(x)\log x\,dx=-\frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+}\mathrm{Res}\Big(R(z)(\log z)^2,a\Big)\right),$$

et

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\Im\mathrm{m}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{Res}\Big(R(z)(\log z)^2, a\Big)\right).$$

Exemple. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^3)}dx = -\frac{1}{2}.$