Convexité

1 Définition

Définition 1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dite convexe sur I si*

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b).$$

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

Remarques :

1. La définition de convexité pour la fonction f traduit le fait que l'ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in I, y \geq f(x)\},$$
définit une partie convexe du plan $\mathbb{R}^2$.
2. La convexité de f signifie que le graphe représentatif de f est au-dessous de ses cordes.

2 Propriétés

Proposition 2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est convexe sur I.*
2. *On a*
$$\forall (a,b,c) \in I^3, a < b < c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$
3. *On a $\forall a \in I$, la fonction*
$$\begin{aligned} \Delta :\ & I - \{a\} \to \mathbb{R} \\ & x \quad \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \end{aligned}$$
est croissante.

Démonstration. On montre facilement que *2.* équivaut *3.*

On montre que *1.* implique *3.*. Soient $x, y \in I - \{a\}$, avec par exemple $a < x < y$. Alors $x = ta + (1-t)y$ avec $t \in [0,1]$ et on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{(t-1)f(a)+(1-t)f(y)}{(t-1)a+(1-t)y} = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Les autres cas se traitent de la même manière.

On montre que *3.* implique *1.*. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, on remarque qu'on a l'égalité

$$f(ta+(1-t)b) = \frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{ta+(1-t)b-a}(t-1)(a-b)+f(a),$$

et on conclut en utilisant la croissance de Δ puisque $ta+(1-t)b \leq b$. $\square$

Proposition 2.2. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.*
2. *Si f est dérivable sur I et f est convexe sur I alors le graphe représentatif de f est au-dessus de ses tangentes.*
3. *Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.*

Démonstration. Les deux premiers points se prouvent en utilisant **Proposition 2.1.***2.* et par passage à la limite. Le dernier point est une conséquence immédiate du premier. □

Théorème 2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b. Une fonction convexe sur I est continue sur $]a, b[$.*

3 Exercices

Exercice 3.1. *Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1 + t$. Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.*

Exercice 3.2. *Montrer qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.*

Exercice 3.3. *Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, montrer que $g \circ f$ est convexe. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln(f)$ est convexe, montrer que f est convexe.*

Exercice 3.4. *Étudier la convexité de la fonction $\frac{1}{e^{(1/x)}-2}$.*

Exercice 3.5. *Soit f convexe et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou que f est constante.*