# Chapitre 5
# Fonctions usuelles

## 1 Rappels et compléments

**Définition 1.1.** *Soient $I$, $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction. Soit $a \in I$, on dit que $f$ est continue en $a$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (\forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

*On dit que $f$ est continue sur $I$ si $\forall a \in I$, $f$ est continue en $a$.*

Exemple : De l'inégalité $0 \leq \sin(x) \leq x$ on obtient la continuité de sin en 0, puis la continuité sur $\mathbb{R}$ à l'aide des formules de trigonométrie.

**Définition 1.2.** *Soient $I$, $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction. Soit $a \in I$, on dit que $f$ est dérivable en $a$ si*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

*existe dans $\mathbb{R}$, dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite. On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $\forall a \in I$, $f$ est dérivable en $a$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.*

**Exercice 1.1.** *La dérivabilité implique la continuité.*

**Proposition 1.1.** *Soient $I$, $J$, $K$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$, $g : J \to K$ des fonctions.*

1. *Si $f$ est continue en $a \in I$ et $g$ est continue en $f(a) \in J$ alors la composée $g \circ f$ est continue en $a$.*
2. *Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et $g$ est dérivable en $f(a) \in J$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en $a$ et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.*

**Remarque 1.1.** *Si $f$ est continue, alors $f$ est strictement monotone si et seulement si elle est injective. C'est une conséquence immédiate du TVI.*

Les deux résultats suivants sont fondamentaux dans toute la suite de ce cours.

**Proposition 1.2.** *Soient $I$, $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction* ***bijective****. On note $f^{-1} : J \to I$ la réciproque de $f$.*

1. *Si $f$ est continue sur $I$, alors $f^{-1}$ est continue.*
2. *Si $f$ est dérivable sur $I$ et $\forall a \in I$, $f'(a) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et*

$$\forall b \in J,\ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

**Proposition 1.3.** *Soient $I$, $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction* ***continue****. Soient $a_0 \in I$ et $b_0 \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{a_0}^{x} f(t)dt + b_0, \end{aligned}$$

*est l'unique primitive de $f$ ayant pour valeur $b_0$ en $a_0$.*

**Remarque 1.2.**
1. *La primitive $F$ d'une fonction continue est de classe au moins $\mathcal{C}^1$.*
2. *Deux primitives d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.*

## 2 Logarithmes et exponentielles

**Définition 2.1.** *On appelle logarithme népérien qu'on note* $\ln$ *l'unique primitive s'annulant en* $1$ *de la fonction continue*

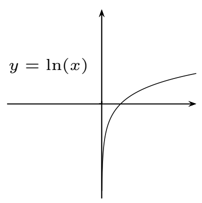
$$\begin{aligned} ]0,+\infty[ &\to ]0,+\infty[ \\ x &\mapsto \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

*En particulier $\forall x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.*

**Exercice 2.1.** *Montrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ à partir de la définition.*

**Proposition 2.1.** *On a les relations suivantes :*
1. $\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2, \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\forall x \in ]0,+\infty[, \ \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
3. $\forall x \in \ ]0,+\infty[, n \in \mathbb{Z}, \ \ln(x^n) = n\ln(x)$.
4. $\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2, \ \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.

**Proposition 2.2.** *L'ensemble de définition de* $\ln$ *est* $\mathcal{D}_{\ln} = ]0,+\infty[$*, la fonction* $\ln$ *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{\ln}$*, on a* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$. *On a* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$*, en particulier* $\ln$ *réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.




**Définition 2.2.** *On appelle exponentielle qu'on note* $\exp$ *la réciproque de la fonction* $\ln : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$.

**Proposition 2.3.** *L'ensemble de définition de* $\exp$ *est* $\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$*, la fonction* $\exp$ *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{\exp}$*, on a* $\exp'(x) = \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Remarque 2.1.** *On note souvent* $\boldsymbol{e}^x = \exp(x)$.

**Proposition 2.4.** *On a les relations suivantes :*

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{e}^{x+y} = \boldsymbol{e}^x \times \boldsymbol{e}^y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e}^{-x} = \frac{1}{\boldsymbol{e}^x}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{e}^{nx} = (\boldsymbol{e}^x)^n$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{e}^{x-y} = \frac{\boldsymbol{e}^x}{\boldsymbol{e}^y}$.

# 3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

## 3.1 Fonctions hyperboliques

**Définition 3.1.** *On définit la fonction cosinus hyperbolique notée* ***ch*** *par :*

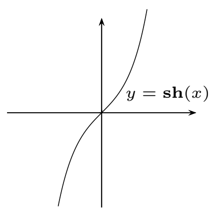
$$\begin{aligned} \boldsymbol{ch} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{\boldsymbol{e}^x + \boldsymbol{e}^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

*On définit la fonction sinus hyperbolique notée* ***sh*** *par :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{sh} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{\boldsymbol{e}^x - \boldsymbol{e}^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

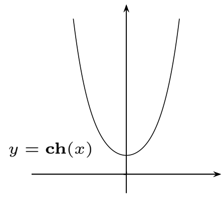
**Proposition 3.1.** *On a* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{sh}} = \mathbb{R}$, *la fonction* ***sh*** *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{sh}}$ *et on a* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{sh}'(x) = \boldsymbol{ch}(x)$. *De plus* ***sh*** *est impaire et on a* $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{sh}(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{sh}(x) = +\infty$. *La fonction* ***sh*** *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $sh'(x) = ch(x)$ | $+$ | $1$ | $+$ |
| $sh(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |




**Proposition 3.2.** *On a* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{ch}} = \mathbb{R}$, *la fonction* ***ch*** *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{ch}}$ *et on a* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{ch}'(x) = \boldsymbol{sh}(x)$. *De plus* ***ch*** *est paire et on a* $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{ch}(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{ch}(x) = +\infty$. *La fonction* ***ch*** *réalise une bijection de* $[0, +\infty[$ *sur* $[1, +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ch'(x) = sh(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $ch(x)$ | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |



**Proposition 3.3.** *On a les relations suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{sh}(x) + \boldsymbol{ch}(x) = \boldsymbol{e}^x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{ch}^2(x) - \boldsymbol{sh}^2(x) = 1$.

**Définition 3.2.** *On définit la fonction tangente hyperbolique qu'on note **th** par :*

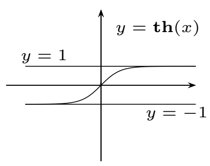
$$\begin{aligned} \boldsymbol{th} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{\boldsymbol{sh}(x)}{\boldsymbol{ch}(x)}. \end{aligned}$$

*On définit la fonction cotangente hyperbolique qu'on note **coth** par :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{coth} :\ & \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{\boldsymbol{ch}(x)}{\boldsymbol{sh}(x)}. \end{aligned}$$

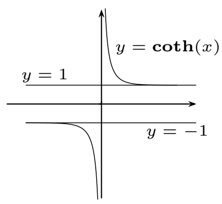
**Proposition 3.4.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{th}} = \mathbb{R}$, la fonction **th** est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{th}}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{th}'(x) = \frac{1}{\boldsymbol{ch}^2(x)} = 1 - \boldsymbol{th}^2(x)$. De plus **th** est impaire et on a $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{th}(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{th}(x) = 1$. La fonction **th** réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $th'(x)$ | $+$ | $1$ | $+$ |
| $th(x)$ | $-1$ ↗ | $0$ | ↗ $1$ |




**Proposition 3.5.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{coth}} = \mathbb{R} - \{0\}$, la fonction **coth** est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{coth}}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\boldsymbol{coth}'(x) = \frac{-1}{\boldsymbol{sh}^2(x)} = 1 - \boldsymbol{coth}^2(x)$. De plus **coth** est impaire et on a $\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{coth}(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{coth}(x) = 1$.*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $coth'(x)$ | $-$ | \|\| | $-$ |
| $coth(x)$ | $-1$ ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ $1$ |




## 3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

**Définition 3.3.** *On définit la fonction argument sinus hyperbolique notée **Argsh** : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme étant la réciproque de la fonction $\boldsymbol{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

**Proposition 3.6.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argsh}} = \mathbb{R}$, la fonction **Argsh** est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argsh}}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.*

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Argsh'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $Argsh(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Définition 3.4.** *On définit la fonction* argument cosinus hyperbolique *notée **Argch** : $[1, +\infty[ \to \mathbb{R}_+$ comme étant la réciproque de la fonction **ch** : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.*

**Proposition 3.7.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argch}} = [1, +\infty[$, la fonction **Argch** est continue sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argch}}$ et dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a $\forall x \in ]1, +\infty[$, $\boldsymbol{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.*

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $Argch'(x)$ | | $+$ | |
| $Argch(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Définition 3.5.** *On définit la fonction* argument tangente hyperbolique *notée **Argth** : $]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ comme étant la réciproque de la fonction **th** : $\mathbb{R} \to ]-1, 1[$.*

**Proposition 3.8.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argth}} = ]-1, 1[$, la fonction **Argth** est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Argth}}$ et on a $\forall x \in ]-1, 1[$, $\boldsymbol{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.*

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Argth'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $Argth(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Proposition 3.9.** *On a les expressions suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
2. $\forall x \in [1, +\infty[$, $\boldsymbol{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
3. $\forall x \in ]-1, 1[$, $\boldsymbol{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

**Remarque 3.1.**

1. *On n'a pas $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{Argch}(\boldsymbol{ch}(x)) = x$, par exemple $\boldsymbol{Argch}(\boldsymbol{ch}(-1)) = \boldsymbol{Argch}(\boldsymbol{ch}(1)) = 1 \neq -1$. Cela vient du fait que **ch** ne réalise pas une bijection de $\mathcal{D}_{\boldsymbol{ch}}$ sur son image mais seulement de $[0, +\infty[$ sur son image.*
2. *La fonction **ch** réalise aussi une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[1, +\infty[$, on peut donc définir sa réciproque sur ces intervalles qu'on note **argch** (avec une minuscule) qui n'est pas égale à **Argch** ! Le même phénomène se produira avec les fonctions circulaires, il faut donc prendre garde à ne pas laisser planer le doute sur la réciproque qu'on utilise.*

# 4 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

## 4.1 Fonctions circulaires

**Définition 4.1.** *On définit la fonction cosinus notée* cos *par :*

$$\begin{aligned} \cos :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

*On définit la fonction sinus notée* sin *par :*

$$\begin{aligned} \sin :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.** *On a $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$, la fonction* sin *est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\sin}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. On a $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$, la fonction* cos *est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\cos}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.*

**Définition 4.2.** *On définit la fonction tangente qu'on note* tan *par :*

$$\begin{aligned} \tan :\ & \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.** *On a $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$, la fonction* tan *est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$ et on a $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.*

## 4.2 Fonctions circulaires réciproques

**Définition 4.3.** *On définit la fonction arc sinus notée* ***Arcsin*** $: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *comme étant la réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

**Proposition 4.3.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Arcsin}} = [-1, 1]$, la fonction* ***Arcsin*** *est continue sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Arcsin}}$ et dérivable sur $]-1, 1[$ et on a $\forall x \in ]-1, 1[$, $\boldsymbol{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Arcsin'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | |
| $Arcsin(x)$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

**Définition 4.4.** *On définit la fonction arc cosinus notée* ***Arccos*** $: [-1, 1] \to [0, \pi]$ *comme étant la réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

**Proposition 4.4.** *On a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Arccos}} = [-1, 1]$, la fonction* ***Arccos*** *est continue sur $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Arccos}}$ et dérivable sur $]-1, 1[$ et on a $\forall x \in ]-1, 1[$, $\boldsymbol{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

**Définition 4.5.** *On définit la fonction arc tangente notée* $\boldsymbol{Arctan} : \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *comme étant la réciproque de la fonction* $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$.

**Proposition 4.5.** *On a* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{Arctan}} = \mathbb{R}$*, la fonction* ***Arctan*** *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**Remarque 4.1.** *Comme plus haut pour* ***ch*** *on n'a pas* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{Arcsin}(\sin(x)) = x$*. Par exemple* $\boldsymbol{Arcsin}(\sin(\frac{3\pi}{2})) = \boldsymbol{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$*. En revanche* $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\boldsymbol{Arcsin}(x)) = x$*. Attention donc quand vous composez* ***Arcsin*** *et* $\sin$ *aux intervalles dans lesquels se trouvent les réels. Le même phénomène se produit pour* $\cos$ *et* $\tan$.

# 5 Fonctions puissances et changements de bases

## 5.1 Exponentielles et logarithmes en bases différentes

**Définition 5.1.** *Soit* $a > 0$*, on appelle exponentielle en base* $a$*, notée* $\exp_a$*, par*

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to ]0, +\infty[ \\ x &\mapsto \boldsymbol{e}^{x\ln(a)}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.1.** *La fonction exponentielle du début du cours n'est que la fonction exponentielle en base* $e := \boldsymbol{e}^1$.

**Définition 5.2.** *On note pour* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$ , $a^x := \exp_a(x) = \boldsymbol{e}^{x\ln(a)}$.

**Proposition 5.1.** *Soient* $a, b > 0$ *on a les relations suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$ *et* $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{x+y} = a^x a^y$ *et* $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a^x)^y = a^{xy}$ *et* $(ab)^x = a^x b^x$.

**Proposition 5.2.** *Soit* $a > 0$*, on a* $\mathcal{D}_{\exp_a} = \mathbb{R}$*, la fonction* $\exp_a$ *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{\exp_a}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = \ln(a)a^x$*. En particulier la fonction* $\exp_a$ *est strictement croissante sur* $\mathcal{D}_{\exp_a}$ *pour* $a > 1$*, strictement décroissante sur* $\mathcal{D}_{\exp_a}$ *pour* $1 < a$ *et constante pour* $a = 1$.

**Définition 5.3.** *Soit* $a > 0$ *et* $a \neq 1$*, on définit la fonction logarithme en base* $a$ *notée* $\ln_a : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *comme étant la réciproque de* $\exp_a : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$.

## 5.2 Fonctions puissances et croissances comparées

**Définition 5.4.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on définit la fonction puissance* $\alpha$*, notée* $p_\alpha$*, par :*

$$\begin{aligned} p_\alpha : ]0, +\infty[ &\to ]0, +\infty[ \\ x &\mapsto x^\alpha = \boldsymbol{e}^{\alpha\ln(x)}. \end{aligned}$$

**Proposition 5.3.** *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a* $\mathcal{D}_{p_\alpha} = ]0, +\infty[$*, la fonction* $p_\alpha$ *est continue et dérivable sur* $\mathcal{D}_{p_\alpha}$ *et* $\forall x > 0, p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

1. *Si* $\alpha > 0$ *on a* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ *et* $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$. *On peut prolonger* $p_\alpha$ *par continuité en* $0$ *par* $p_\alpha(0) = 0$.
2. *Si* $\alpha < 0$ *on a* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ *et* $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$.

**Proposition 5.4.** *Soient* $\alpha, \beta > 0$, *on a les limites :*

1. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$ *et* $\lim_{x\to 0} x^\beta \ln(x) = 0$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\boldsymbol{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to -\infty} |x|^\beta \boldsymbol{e}^{\alpha x} = 0$.