Fonctions usuelles

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f_a(x) = \mathbf{e}^{x \operatorname{ch}(a)} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh}(a))$.

Exercice 2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$, montrer l'équivalence :

$$\ln(\frac{a+b}{4}) = \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab.$$

Exercice 3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{ch}(t) - 1 = \frac{2\operatorname{ch}(2t)+1}{2\operatorname{ch}(t)+1}$.
2. Calculer $\prod_{k=0}^{n}(2\operatorname{ch}(2^k x) - 1)$.

Exercice 4. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) & = 35/12 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) & = 25/12 \end{cases}$$

Exercice 5.
1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Trouver toutes les fonctions $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x.y) = g(x) + g(y).$$

Exercice 6. Résoudre les équations :

$$\operatorname{Argch}(2x) = \operatorname{Argsh}(x) \quad (1)$$
$$\operatorname{Argth}(x) = \operatorname{Argsh}(2x) \quad (2)$$

Exercice 7. Soient $x, h \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x + kh)$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(\frac{x}{2^k})$.

Exercice 8.
1. Montrer que pour $x \neq 0$ on a $\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes : $\operatorname{ch}(2\operatorname{Argth}(x))$, $\operatorname{th}(3\operatorname{Argth}(x))$ et $\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\operatorname{Argch}(x))$.

Exercice 10. 1. Soient $x, y \in \mathcal{D}_{\text{Argsh}}$, calculer $\text{Argsh}(x) + \text{Argsh}(y)$.

2. Soient $x, y \in \mathcal{D}_{\text{Argch}}$, calculer $\text{Argch}(x) + \text{Argch}(y)$.

Exercice 11. Soit :

$$f :]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$$

Déterminer $\mathbf{e}^f$, $\text{th}(\frac{f(x)}{2})$ et $\text{th}(f(x))$.

Exercice 12. Etudier la fonction $x \,\text{Arctan}(x - 1)$.

Exercice 13. 1. Simplifier les expressions : $\tan(\text{Arcsin}(x))$, $\cos(\text{Arctan}(x))$ et $\sin(\text{Arccos}(x))$.

2. Simplifier les expressions : $\cos(3\,\text{Arctan}(x))$ et $\cos(\frac{1}{2}\,\text{Arctan}(x))$.

Exercice 14. Résoudre les équations :

1. $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(\frac{1}{3}) + \text{Arccos}(\frac{1}{4})$.
2. $\text{Arcsin}(\tan(x)) = x$.

Exercice 15. 1. Calculer $A := \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8)$.

2. Soit $f(x) := \text{Arctan}(x - 3) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x + 3)$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] - \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Trouver toutes les solutions de $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 16. 1. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \text{sg}(x)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 17. Trouver l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(y) = \text{Arcsin}(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$.

Exercice 18. 1. Pour $x \in]0, 1[$ établir l'inégalité $\text{Arcsin}(x) > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Pour $x > 0$ établir l'inégalité $\text{Arctan}(x) > \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 19. Etudier la fonction $x^2\,\text{Arctan}(\frac{1}{1+x})$. En particulier faire l'étude aux bornes et l'étude des branches infinies.

Exercice 20. Montrer que la fonction $\mathbf{e}^{-x}\ln(1 + \mathbf{e}^x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 21. On définit :

$$\begin{aligned} f :]1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbf{e}^{\frac{1}{1-x}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 1.
2. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Quelle est la tangente en 1 à la courbe représentative de f ?
3. La fonction f' est-elle continue en 1 ?