MHT201 année 2010-2011

DM N° 1

Exercice 1. Soient $(A, B, R_1, R_2) \in (\mathbb{R}[X])^4$ quatre polynômes, tels que le degré de R_1 est strictement inférieur au degré de A, et que le degré de R_2 est strictement inférieur au degré de B.

1. Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de la division euclidienne de P par A soit R_1 et que le reste de la division euclidienne de P par B soit R_2, si et seulement si le PGCD de A et de B divise $R_1 - R_2$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Bézout).
2. Trouver un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division par $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ soit égal à $X^2 + X + 1$ et dont le reste de la division par$X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$ soit égal à $2X^2 - 3$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$.

1. A-t-on $\text{PGCD}(A, B) = 1 \iff \text{PGCD}(A + B, AB) = 1$?
2. A-t-on $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(A + B, AB)$?

Exercice 3.

1. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tel que $a_0 \neq 0$. Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une racine rationnelle de $P(X)$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $(p, q) = 1$. Montrer qu'on a $q | a_n$ et $p | a_0$.
2. Considérer le polynôme $P(X) = 4X^5 - 3X^3 - 7X^2 - 3X \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que ce polynôme admet trois racines dans le corps $\mathbb{Q}$. En déduire l'ensemble des solutions de $P(X) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. D'une manière générale, soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, on note par $\bar{z}$ son conjugué complexe.

1. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine complexe de l'équation $z^5 = 1$ telle que $\zeta \neq 1$. Montrer que les 4 solutions différentes dans $\mathbb{C}$ du polynôme $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ sont : $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$. En particulier, si z_0 est une racine de $f(X)$, on a $z_0 \bar{z_0} = 1$.
2. Montrer que le polynôme $f(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, en suivant les étapes suivantes :
   (a) Soient $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel, et $z_0 \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P. Montrer que $\bar{z_0}$ est également racine de $P(X)$.
   (b) Montrer qu'on ne peut pas décomposer $f(X)$ en un produit de deux facteurs de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) Montrer que le polynôme $f(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Notons $I = \{g(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid g(\zeta) = 0\} \subset \mathbb{Q}[X]$, qui est donc un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
   (a) (Question de cours) Montrer I est un idéal principal, en utilisant la division euclidienne.
   (b) Trouver un générateur de l'idéal I.