Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 Structures Algébriques
Devoir maison 2

A rendre la semaine du 04 Avril.

Exercice 1. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X] \backslash \mathbb{Q}$.

1. Soit $D(X) := \mathrm{pgcd}(P(X), P'(X))$.
   a) Montrer que si $\deg D \geq 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = D(\alpha) = 0$. En déduire que α est une racine multiple de P.
   b) Montrer que $D(X) = 1$ si et seulement si $P(X)$ n'a que des racines simples.
2. Montrer que si $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ alors $P(X)$ n'a pas de racines complexes multiples.
3. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $P(X) := X^4 + 4aX + b$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine multiple de $P(X)$ alors $z^3 = -a$.
2. Montrer que $P(X)$ a une racine multiple α si et seulement si $b^3 = 27a^4$.
3. Calculer l'ordre de multiplicité de la racine α de $P(X)$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soient F, G et H trois sous-espaces de E.

1. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Longleftrightarrow F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
2. Montrer que
$$G \subseteq F \Longrightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

Exercice 4.
1. Factoriser le polynôme X^6+1 en produit des facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{X^6 + 1}$ en éléments simples à coefficients dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5. Soit $P(X) := X^n - 2011$, où n est un entier ≥ 1.

1. Trouver toutes les racines de P, et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ (*Indication :* on pourra commencer par chercher les racines du polynôme $X^n - 1$).
2. Montrer que l'on a l'égalité suivante
$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_k}{X - z_k},$$
où $a_k \in \mathbb{C}$, et $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de P.
3. Montrer que $a_k = \frac{z_k}{2011n}$, pour tout $k = 1, \ldots, n$.