Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d'exercices 1

Polynômes

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1. A quelle condition nécessaire et suffisante un polynôme est-il nul ? A quelle condition nécessaire et suffisante deux polynômes sont-ils égaux ?

Exercice 2. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que

$$(P(X) + Q(X))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X)^k Q(X)^{n-k}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n(X) := (X+1)^n - (X-1)^n$ et $Q_n(X) := (X^2-1)^n$.

1. Calculer $P_n(1)$, $P_0(X)$, $P_1(X)$,$P_2(X)$.
2. Déterminer le degré de $P_n(X)$ et de $Q_n(X)$.
3. Déterminer le coefficient dominant et le terme dominant de $P_n(X)$ et de $Q_n(X)$.
4. Etudier la parité de $\varphi_{Q_n,\mathbb{R}}$.

Exercice 4. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si $k \in \mathbb{N}$, $X^k P(X) = 0 \iff P(X) = 0$.
2. Montrer que si $P(X)Q(X) = 0$ alors $P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$.

Exercice 5. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer les égalités suivantes :

- $\varphi_{P+Q,\mathbb{K}} = \varphi_{P,\mathbb{K}} + \varphi_{Q,\mathbb{K}}$
- $\varphi_{\lambda.P,\mathbb{K}} = \lambda.\varphi_{P,\mathbb{K}}$
- $\varphi_{PQ,\mathbb{K}} = \varphi_{P,\mathbb{K}} \cdot \varphi_{Q,\mathbb{K}}$
- $\varphi_{P \circ Q,\mathbb{K}} = \varphi_{P,\mathbb{K}} \circ \varphi_{Q,\mathbb{K}}$

Exercice 6. Soit Δ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & \Delta(P(X)) := P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\Delta(aP(X)+bQ(X)) = a\Delta(P(X))+b\Delta(Q(X))$.
2. Déterminer l'ensemble $\{P(X) \in \mathbb{R}[X] | \Delta(P(X)) = 0\}$.
3. Soient $H_0(X) := 1$ et pour $k \geq 1$ $H_k(X) = \frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calculer $\Delta(H_k(X))$.

Exercice 7. Soit $P(X) := a_0 + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\varphi_{P,\mathbb{K}}(\alpha) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}) + \dots + a_1)x + a_0$$

Combien faut-il d'opérations pour calculer ainsi $\varphi_{P,\mathbb{K}}(\alpha)$? Combien faut-il d'opérations pour calculer de manière naïve $\varphi_{P,\mathbb{K}}(\alpha)$?

Exercice 8. Soient $P(X) := \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $\omega_k := e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$.

1. Pour $0 \leq j \leq n$ calculer $\sum_{k=0}^{n} \omega_j^k$.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} P(\omega_k) = n + 1$.
3. En déduire que
$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$$

Exercice 9. On considère le polynôme $P(X) := X * (X + 1) \in \mathbb{F}_2[X]$. Montrer $\varphi_{P,\mathbb{F}2} : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ est la fonction nulle. Montrer que le polynôme $P(X)$ est non nul.