Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d’exercices 10

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 3x + 5y$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (x - y, x + 2y)$.
3. $f : \mathcal{C}^\circ([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(g) := g(1/2)$.

Exercice 2. Soient F, G des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

$$f : \begin{array}{l} F \times G \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

Exercice 3. Soient E, F et G des espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires.

1. Montrer que $g \circ f$ est linéaire.
2. Montrer que
$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)) = f^{-1}(\ker(g))$$

Exercice 4. Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(g)$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel et $\phi : E \to E$ une application linéaire. Montrer que

$$\ker(\phi) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\} \Longrightarrow (x \notin \ker(\phi) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \ \phi^n(x) \neq 0)$$

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de E et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $f|_F$ est une application linéaire. Énoncer le théorème du rang pour $f|_F$.
2. Montrer que $F \subseteq f(F) \Rightarrow f(F) = F$.
3. Montrer que si f est injective $f(F) \subseteq F \Rightarrow f(F) = F$.

Exercice 7. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$\phi(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + x_2 - 4x_3;\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3;\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer une base et donner la dimension de $\ker(\phi)$.
3. Montrer que les vecteurs $f_1 := (1; 5; -5)$ et $f_2 := (0, 1, -2)$ forment une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\phi) \oplus \ker(\phi)$.
5. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice de ϕ^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soit $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par

$$\phi(P(X)) := P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.
3. Déterminer $\ker(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$.
4. Montrer $\mathcal{B} := \{1, X, \frac{X(X-1)}{2}, \frac{X(X-1)(X-2)}{6}\}$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soient E, F des espaces vectoriels et $\phi : E \to F$ une application linéaire. Soit $G \subseteq F$ un sous-espace vectoriel de F.

1. Montrer que $\phi^{-1}(G)$ est un sous-espace de E. En déduire que $\ker(\phi)$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que
$$\dim \phi^{-1}(G) \leq \dim \ker(\phi) + \dim G$$
et qu'on a égalité si et seulement si $G \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$.

Exercice 10. Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$$