Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d'exercices 11

Matrices et applications linéaires

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) := (2x - y + z, 3x + 2y - 3z)$$

1. Montrer que f est linéaire. Donner sa matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

2. On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$e'_1 := e_2 + e_3, \quad e'_2 := e_1 + e_3 \quad e'_3 := e_1 + e_2$$

Montrer que $\mathcal{B}' := \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3. Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}'$.

4. Déterminer $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que A est inversible si et seulement si pour $X \in \mathbb{R}^n$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

Exercice 3. Soit $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par

$$\phi(P(X)) := P(X + 1) - P(X)$$

1. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.

2. Déterminer $\ker(\phi)$.

Exercice 4. Soit $A := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}. Calculer A^2.

2. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation :

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5. Soit $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, résoudre $AX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. En déduire A^{-1}.

Exercice 6. 1. Soit $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculer A^2 et A^{-1}.

2. Soit $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer B^2 et B^{-1}.

Exercice 7. Soient $u_1 := (3, -7)$, $u_2 := (1, -2)$, $v_1 := (6, -7)$ et $v_2 := (-5, 6)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} := \{u_1, u_2\}$ et $\mathcal{B}' := \{v_1, v_2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de passage C de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer C^{-1}.
3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Mat}(f + g, \mathcal{B}')$.