Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 "Algèbre 1"
Liste d'exercices 12

Sommes directes et révisions.

Exercice 1. Soient $F :=< (1,1,1),(1,1,-1) >$ et $G :=< 0,1,-1 >$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Exercice 2. Soient $u_1 := (1,2,1)$, $u_2 := (1,1,-1)$, $u_3 := (1,3,3)$, $v_1 := (2,3,-1)$, $v_2 := (1,2,2)$ et $v_3 := (1,1,-3)$. On note $U :=< u_1,u_2,u_3 >$ et $V :=< v_1,v_2,v_3 >$.

1. Extraire de $\{u_1,u_2,u_3\}$ et de $\{v_1,v_2,v_3\}$ des bases de U et V et déterminer $\dim U$ et $\dim V$.
2. Déterminer $\dim U+V$ et montrer que $U+V = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\dim U \cap V$ et donner une base de $U \cap V$.

Exercice 3. Soient $v_1 := (1,2,3,4)$, $v_2 := (1,1,1,3)$, $v_3 := (0,1,2,2)$, $v_4 := (1,0,-1,2)$ et $v_5 := (2,3,0,1)$. On note $F :=< v_1,v_2,v_3 >$ et $G :=< v_4,v_5 >$. Donner une base de F, G, $F \cap G$ et de $F+G$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 4. On considère les ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z+t = 0\}$$
$$G := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y = z+t = 0\}$$

1. Les ensembles F et G sont-ils des espaces vectoriels ?
2. Donner des bases de F, G, $F \cap G$ et $F+G$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 5. Calculer le rang de $A := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ et de $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B}_c := \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \text{f}: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1)+P(X-1)-2P(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire. Donner $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_c)$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathcal{B} := \{\sqrt{2}, X-\cos(2), (X+1)^2, X^3-\pi X^2+1\}$ est une base $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$. Déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ de deux manières différentes.

   On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \text{g}: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

5. Montrer que g est linéaire. Donner $\mathrm{Mat}(f \circ g, \mathcal{B}_c)$ et $\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}_c)$.