Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d'exercices 2

Division euclidienne

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$ dans les cas suivants :

1. $P(X) := X^4 - X^3 + X - 2$ et $Q(X) := X^2 - 2X + 4$
2. $P(X) := X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) := X^2 - 1$
3. $P(X) := 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $Q(X) := X^3 + X + 2$
4. $P(X) := 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $Q(X) := X^2 + 2X + 3$
5. $P(X) := 6X^4 + 5X^3 - 2X^2 + 5X - 1$ et $Q(X) := 3X^3 - 2X^2 + X - 1$
6. $P(X) := X^5 - 7X^4 - X^3 - 9X + 9$ et $Q(X) := X^2 - 5X + 4$
7. $P(X) := X^4$ et $Q(X) := X^2 - 2X + 3$.

Exercice 2. Soient $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P(X) \geq 2$ et $a \neq b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ et $(X - a)$.
2. Sachant que le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ est 1 et que celui de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - b$ est -1 déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 3. Soient $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $a \neq b \in \mathbb{K}$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que si $(X - a)^n$ et $(X - b)^m$ divisent $P(X)$ alors $(X - a)^n(X - b)^m$ divise $P(X)$.

Exercice 4. Soient $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $a \neq b \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que $P(a) = P(b) = 0$ si et seulement si $(X - a)(X - b)$ divise $P(X)$.
2. Factoriser $X^2 + X + 1$ en un produit de polynômes de degré 1 .
3. Pour quelle valeur de $m \in \mathbb{N}$ le polynôme $(-X - 1)^m + X^m + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?
4. Pour quelle valeur de $m \in \mathbb{N}$ le polynôme $(X + 1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$. Calculer alors le quotient de ces deux polynômes.

Exercice 6. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que X^2+X+1 divise $P(X^3)+XQ(X^3)$, montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Etudier la réciproque.

Exercice 7. Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ telles que X^2+X+b divise X^4+aX-6.

Exercice 8. Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $X^2 + cX - 1$ divise $X^3 + aX + b$.