Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 "Algèbre 1"
Liste d'exercices 3

PGCD de polynômes

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1. Déterminer $\text{pgcd}(P(X), Q(X))$ dans chacun de ces cas :

1. $P(X) := X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q(X) := X^3 + X + 1$.
2. $P(X) := X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ et $Q(X) := X^3 - X^2 - X - 2$.
3. $P(X) := X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $Q(X) := X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Exercice 2. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$.

1. Rappeler pourquoi il existe $A(X), B(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$A(X)P(X) + B(X)Q(X) = \text{pgcd}(P(X), Q(X))$$
Qu'en est-il de la réciproque ?
2. Montrer qu'on peut choisir $A(X)$ de telle sorte que $\deg A(X) < \deg Q(X)$.

Exercice 3. 1. Trouver $A(X), B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$A(X)(X^3 + 1) + B(X)(X^2 + X + 1) = 1$$

2. Déterminer si on peut trouver $A(X), B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$A(X)X(X^2 + 1) + B(X)(X^2 + X) = 1$$

Exercice 4. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ et
$$P(X) = a \prod_{i \in I} p_i^{n_i} \qquad Q(X) = b \prod_{i \in I} p_i^{m_i}$$
les décompositions en produits de facteurs irréductibles de $P(X)$ et $Q(X)$.

1. Montrer que $P(X)$ divise $Q(X)$ si et seulement si $n_i \leq m_i, \forall i \in I$.
2. Montrer que
$$\text{pgcd}(P(X), Q(X)) = \prod_{i \in I} p_i^{\min\{n_i, m_i\}}$$

Exercice 5. Soit n un entier positif.

1. Déterminer $\text{pgcd}(X^n - 1, (X - 1)^n)$.
2. Trouver $A(X), B(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A(X)(X^3 - 1) + B(X)(X - 1)^3 = (X - 1)$.

Exercice 6. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si $P(X)$ et $Q(X)$ sont irréductibles, montrer qu'ils sont soit premiers entre eux, soit associés.

2. Montrer que $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de facteurs communs dans leurs décompositions en produits de facteurs premiers.

Exercice 7. Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux et n, m deux entiers non nuls.

1. Montrer que $P(X)^m$ et $Q(X)^n$ sont premiers entre eux.

2. Montrer que $P(X) + Q(X)$ et $P(X)Q(X)$ sont premiers entre eux.

3. Etudier les réciproques.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1. Déterminer $\text{pgcd}(X^n, (1-X)^n)$.

2. Montrer qu'il existe un unique couple $(P(X), Q(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant

$$(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$$

   avec $\deg P(X) < n$ et $\deg Q(X) < n$.

3. Montrer que $P(1-X) = Q(X)$ et que $Q(1-X) = P(X)$.

Exercice 9. Soit $P(X) := (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Montrer que i est racine de $P(X)$.

2. En déduire une factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.