Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 "Algèbre 1"
Liste d'exercices 5

Multiplicité des racines

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $P(X) := a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$P(\alpha) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

1. Combien faut-il d'opérations pour calculer ainsi $P(\alpha)$? Combien faut-il d'opérations pour calculer de manière naïve $P(\alpha)$?

2. Montrer qu'on obtient aussi un algorithme de factorisation de $P(X)$ par $X - x$ si $P(x) = 0$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Trouver les racines de $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 3. Déterminer la multiplicité de i et $-i$ dans $X^4 + 2X^2 + 1$ de deux manières différentes.

Exercice 4. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et α une racine de $P(X)$. Rappeler pourquoi il existe $T(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)T(X)$. Montrer que $P'(\alpha) = T(\alpha)$

Exercice 5.

1. Factoriser en produits d'irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ les polynômes $X^6 + 1$ et $X^8 + X^4 + 1$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour que $X^8 + X^4 + 1$ divise $X^{24} + pX^{12} + q$.

Exercice 6. Soit $P(X) := (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Montrer que i est racine de $P(X)$.

2. En déduire une factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, $a \neq b \in \mathbb{C}$ et $A(X) := (X-a)^{2n} + (X-b)^{2n}$, $B(X) := (X-a)^2(X-b)^2$. Soit $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$.

1. Montrer qu'il existe $S(X) \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg S \leq 1$ tel que

$$R(X) - (a-b)^{2n} = (X-a)(X-b)S(X)$$

2. Montrer que $S(X) = 2n(b-a)^{2n-2}$.

Exercice 8. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que $\mathrm{pgcd}(P(X), P'(X)) = 1$ si et seulement si $P(X)$ n'a que des racines simples.

2. Montrer que si $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ alors $P(X)$ n'a pas de racines complexes multiples.