Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d'exercices 6

Relation coefficients-racines. Décomposition en éléments simples.

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1. Soient $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$, $n = \deg P$. Montrer que

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2}(X-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples

1. $\frac{1}{(X-1)(X-2)}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\frac{X}{(X-1)^2(X-2)}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\frac{X^4+1}{X^2+X+1}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
4. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{(X-1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\frac{X^3}{X^3-1}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
6. $\frac{X^3}{X^5-1}$ sur $\mathbb{C}$.
7. $\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $\frac{3}{X^3+1}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
9. $\frac{X^3-2}{X^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient $(\beta_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que $(\sum_{i=1}^n \beta_i)^2 = (\sum_{i=1}^n \beta_i^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \beta_i\beta_j$.
2. Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les racines complexes de X^3-2X^2+X+1. Calculer $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$.

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer λ pour qu'une des racines de $X^3 - 7X - \lambda$ soit le double d'une autre.

Exercice 5. Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la somme de deux racines de $X^3 - 2X^2 - X + \lambda$ soit égale à 1.

Exercice 6. Soit

$$F(X) := \frac{1 + X + X^2 + X^3 + X^4}{X^2}$$

Résoudre $F(X) = 0$ en posant $Y = X + \frac{1}{X}$.