Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d'exercices 7

## Espaces vectoriels

On notera $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Exercice 1.** Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

1. $\{(\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.
2. $\{(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.
3. $\{(\alpha+1, \beta, \beta+1, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 3.

**Exercice 2.** Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y-z = x+y+z = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - z^2 = 0\}$.

**Exercice 3.** Soients $e_1 := (2, 1),\ e_2 := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer

$$< e_1, e_2 >_{\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$$

**Exercice 4.** Comparer les espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{(1, 0), (2, 0)\}$.
2. $E := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $F := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$

**Exercice 5.** Soient $L, M$ et $N$ trois sous-espaces de $E$. A-t-on :

$$L \cap (M+N) = (L \cap M) + (L \cap N)$$