Université Bordeaux I - année 2010-2011
MHT201 “Algèbre 1”
Liste d’exercices 9

## Familles libres, génératrices

**Exercice 1.** La famille

$$\{(2,1,3,-1),(3,-1,2,0),(1,3,4,-2),(4,-3,-1,1)\}$$

est-elle libre sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 2.** Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré au plus 2.

1. Montrer que $1, X, X^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $1, 1+X, (1+X)^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 3.** Soient, dans $\mathbb{R}^4$, $u_1 := (1,2,0,1)$, $u_2 := (1,1,1,0)$, $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (1,3,0,1)$. Soient $U :=< u_1, u_2 >_{\mathbb{R}}$ et $V :=< v_1, v_2 >_{\mathbb{R}}$.

1. Déterminer la dimension de $U$ et de $V$.
2. Déterminer la dimension de $U+V$ et en donner une base.

**Exercice 4.** Soit $U := \{(a+b, a+c, b+c) \in \mathbb{R}^3, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que l’ensemble $U$ est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice de $U$ puis une base de $U$.

**Exercice 5.** Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2,-3,1)$ et $(2,-2,1)$.

1. Quelle est la dimension de $F$ ?
2. Les vecteurs $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent-ils à $F$ ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu’un vecteur $(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartienne à $F$.

**Exercice 6.** Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $U$ un sous-espace vectoriel de $V$. Montrer que $\dim U$ est finie et que

$$U = V \iff \dim U = \dim V$$

**Exercice 7.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$.
2. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre et card $(I) = \dim E$.
3. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice et card $(I) = \dim E$.