

Soient  $A$  un anneau commutatif (unitaire),  $p$  un nombre premier,  $n \in \mathbb{N}$  et  $q := p^n$ .

1. En général, l'ensemble des idéaux de  $A$  muni de l'addition est-il un groupe ?
2. Donner un exemple d'anneau non principal.
3. Donner des exemples d'anneaux non noethériens.
4. Combien y a-t-il de corps à  $p^2$  éléments ?
5. A quel groupe est isomorphe le groupe  $(\mathbb{F}_q, +)$  ?
6. Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Peut-il y avoir un nombre fini d'irréductibles sur  $\mathbb{K}[X]$  ?
7.  $\mathbb{F}_q$  est-il un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie ? Est-ce que tout  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie est un corps ?
8. Donner un générateur du groupe  $(\mathbb{F}_4^\times, \times)$ , du groupe  $(\mathbb{F}_8^\times, \times)$ .
9. Soit  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ , déterminer  $\text{pgcd}(P(X), P'(X))$  en fonction des racines de  $P(X)$ .
10. Donner des exemples d'extensions qui ne sont pas algébriques sur  $\mathbb{Q}$ .
11. Quel est le corps de décomposition sur  $\mathbb{Q}$  de  $\Phi_n(X)$  ?
12. Montrer que  $\overline{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$  est algébriquement clos.
13. Combien y a-t-il de polynômes irréductibles de degré 2 sur  $\mathbb{F}_q$  ?
14. Existe-t-il des polynômes irréductibles de degré arbitraire sur  $\mathbb{F}_p$  ?
15. A quelle condition sur  $n$  le groupe des automorphismes du groupe (respectivement de l'anneau)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est-il trivial ?
16. A quelle condition sur  $n$  le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{F}_q)$  est-il trivial ?