Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 “Algèbre 4”
Liste d'exercices 10

Corps finis. Clôture algébrique

Exercice 1. Décrire un corps à 8 éléments. Décrire un anneau à 8 éléments qui n'est pas un corps.

Exercice 2. Existe-t-il un corps à 6 éléments ? Déterminer $\mathbb{F}_9 \cap \mathbb{F}_{27}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_3$.

Exercice 3. Soit $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irréductible et $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ une racine de $P(X)$. Montrer que toute racine $\beta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ de $P(X)$ est dans $\mathbb{F}_p[\alpha]$.

Exercice 4. Montrer que $\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

Exercice 5. Soit p un nombre premier, $q = p^r$ avec $r \geq 1$. On note $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$.

1 Montrez que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\zeta)$ où $< \zeta >= \mathbb{F}_q^\times$.

2 On note $\mathrm{Frob}_p : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ le morphisme de Frobenius en caractéristique p.

a) Montrez que Frob_p est un isomorphisme et que G est un groupe.

b) Montrez que l'ordre de Frob_p dans G est r.

c) Quel est le degré de $P(X) := \mathrm{Irr}(\zeta, \mathbb{F}_p, X)$? Montrez que $P(\ \mathrm{Frob}_p^i(\zeta)) = 0$ pour $1 \leq i \leq r-1$ et que card $\{\zeta, \dots, \ \mathrm{Frob}_p^{r-1}(\zeta)\}$ vaut r.

d) En déduire que $P(X) = (X-\zeta)(X - \ \mathrm{Frob}_p(\zeta)) \dots (X - \ \mathrm{Frob}_p^{r-1}(\zeta))$

3 Soit $\sigma \in G$.

a) Montrez que $\sigma|_{\mathbb{F}_p}$ est l'identité sur $\mathbb{F}_p$.

b) Montrez qu'il existe i avec $1 \leq i \leq r-1$ tel que $\sigma(\zeta) = \mathrm{Frob}_p^i(\zeta)$. En déduire que $\sigma = \mathrm{Frob}_p^i$.

c) Conclure que $G \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.