

Idéaux premiers et maximaux, anneaux quotients

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit I un idéal de A , montrer les propriétés suivantes :

1. $I = A$ si et seulement si I contient un inversible.
2. L'anneau A est un corps si et seulement si $A \neq 0$ et les seuls idéaux de A sont (0) et A .

Exercice 2. Déterminer tous les idéaux de \mathbb{Z} .

Exercice 3. Soit A un anneau intègre dans lequel toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Montrer que A est un corps.

Exercice 4. Soit A un anneau distinct de $\{0\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i/ A est un corps.
- ii/ Tout morphisme (d'anneaux unitaires) de A dans un anneau non nul est injectif.

Exercice 5. Soit I un idéal de A , soit $\sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n \geq 0, x^n \in I\}$, le radical de I . Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A contenant I .

Exercice 6. Déterminer le radical de $18\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} . Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$, déterminer le radical de $n\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soient I et J deux idéaux de A . On note \sqrt{I} le radical de I . Montrer les propriétés suivantes :

- 1 Si $I \subseteq J$ alors $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.
- 2 $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- 3 $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- 4 $\sqrt{I} = (1)$ si et seulement si $I = (1)$.
- 5 $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$
- 6 Si I est premier, $\sqrt{I^n} = I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8. Montrer que le groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ peut être muni d'une structure d'anneau (commutatif).

Exercice 9. Soient I et J des idéaux de A , soit $p : A \rightarrow A/I$ la surjection canonique.

1 Montrer que $\bar{J} := p(J)$ est un idéal de A/I .

2 Montrer que l'on a une bijection entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I .

3 Montrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \simeq A/(I + J)$

Exercice 10. Soit B un sous-anneau de A et I un idéal de A

1 Montrer que $B \cap I$ est un idéal de B que $B + I := \{b + i, b \in B, i \in I\}$ est un anneau et que I en est un idéal.

2 Montrer que $B/(B \cap I) \simeq (B + I)/I$.

Exercice 11. Soit \mathfrak{a} , \mathfrak{b} et \mathfrak{c} des idéaux de A . Montrer que l'on a :

1 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$.

2 $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ et si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ alors $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.