Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 "Algèbre 4"
Liste d'exercices 3

Idéaux premiers et maximaux, anneaux quotients

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit I un idéal de A. Montrer que I est premier si et seulement si A/I est intègre et que I est maximal si et seulement si A/I est un corps. L'idéal (X) de $\mathbb{Z}[X]$ est-il premier ? maximal ?

Exercice 2. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit $\mathfrak{p} \subset A$ (resp. $\mathfrak{q} \subset B$) un idéal premier.

1 Montrer que $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ est un idéal premier.

2 On suppose ici que ϕ est surjectif.

2-a Si $\mathfrak{p}$ contient Ker ϕ, prouver que $\phi(\mathfrak{p})$ est premier.

2-b Etablir une bijection entre les idéaux premiers de B et les idéaux premiers de A contenant Ker ϕ.

3 Si ϕ n'est pas surjectif, l'idéal de B engendré par $\phi(\mathfrak{p})$ est-il premier ? (on pourra considérer l'injection $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$).

Exercice 3. Soit A un anneau intègre. Montrer que le noyau du morphisme $\phi : \mathbb{Z} \to A$ définit par $\phi(n) = n.1_A$ est de la forme $p\mathbb{Z}$ pour p premier ou bien est (0). En déduire que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{Z}$ s'injecte dans A. En déduire qu'un corps contient soit un corps fini, soit un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit A un anneau, on note Spec(A) l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour I un idéal de A on définit $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Montrer qu'on a les propriétés suivantes :

1 $V(0) = \mathrm{Spec}\ A$.

2 Soient I et J des idéaux de A, on a $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

3 Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'idéaux de A, alors $\cap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, α un élément fixé de $\mathbb{K}$. On note I_α l'idéal de $\mathbb{K}[X, Y]$ engendré par $(X - \alpha Y)$.

1 Montrer que pour tout $P(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ il existe $Q(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y]$ et $R(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ tels que $P(X, Y) = (X - \alpha Y).Q(X, Y) + R(Y)$.

2 Soit Φ le morphisme :
$$\mathbb{K}[X,Y] \to \mathbb{K}[T]$$
qui est l'identité sur $\mathbb{K}$ et tel que $\Phi(X) = \alpha.T$ et $\Phi(Y) = T$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\ \Phi = I_\alpha$.

3 En déduire que $\mathbb{K}[X,Y]/I_\alpha \simeq \mathbb{K}[T]$ et que I_α est un idéal premier.

4 Déterminer un idéal maximal de $\mathbb{K}[X,Y]$ contenant I_α.

Exercice 6. **1** Soit A un anneau principal et soit I un idéal propre de A (c'est à dire $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$). Prouver que I est maximal si et seulement si I est premier.

2 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est principal. Quels sont les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 7. Soit A un anneau noethérien et B un anneau commutatif unitaire.

1 Montrer que pour tout idéal I de A, l'anneau A/I est noethérien.

2 Montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux surjectif alors B est noethérien.

3 Soit $f : A \to A$ un morphisme surjectif, montrer que f est un isomorphisme en considérant les idéaux $\mathrm{Ker}(f^n)$.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $A := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

1 Pour $\boldsymbol{z} := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ l'idéal $(X_1 - z_1, \dots, X_n - z_n)$. Montrer que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ est le noyau du morphisme d'évaluation en $\boldsymbol{z}$ (i.e. le morphisme qui à X_i associe z_i et vaut l'identité sur les éléments de $\mathbb{K}$).

2 En déduire que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$ est un idéal maximal et que $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}} = \mathfrak{m}_{\boldsymbol{z'}}$ si et seulement si $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z'}$.

3 Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tel que la composée des applications naturelles $\mathbb{K} \to A \to A/\mathfrak{m}$ soit un isomorphisme, montrer qu'il existe $\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\boldsymbol{z}}$.

Exercice 9. Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et $m \in \mathbb{Z}$. On note $\overline{P(X)}$ la réduction de $P(X)$ mod m (i.e. si $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $\overline{P(X)} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} X^i$).

1 Montrer qu'on a un isomorphisme :
$$\mathbb{Z}[X]/(m, P(X)) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[X])/(\overline{P(X)})$$

2 Si $m = p$ un nombre premier et que $\overline{P(X)}$ est irréductible alors l'idéal $(p, P(X))$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.