Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 “Algèbre 4”
Liste d'exercices 4

Polynômes

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit $P(X)$ un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ est 1 et celui de $P(X)$ par $X - b$ est -1 (avec $a \neq b$), quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 2. **1** Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

2 Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X)$. Montrer que $I_\alpha := \{Q(X) \in \mathbb{Q}[X] | Q(\alpha) = 0\}$ est un idéal non nul de $\mathbb{Q}[X]$, en déduire qu'il existe $P_\alpha(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I_\alpha = (P_\alpha)$. Montrer que $P_\alpha(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 4. Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1 Montrer que si $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X)$ de multiplicité strictement plus grande que $\frac{n}{2}$. Montrer que λ est rationnel.

Exercice 5. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = U(X)^2 + V(X)^2$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 7. Soit $P \in A[X] - \{0\}$ avec $n = \deg P$. Montrer qu'il existe des polynômes $Q_i \in A[X]$, $i = 1 \dots n$ tels que $P(X + Y) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(X) Y^j$. Montrer que si $A = \mathbb{C}$ alors $Q_j = P^{(j)}/j!$.