Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 "Algèbre 4"
Liste d'exercices 5

Polynômes en plusieurs indéterminées

Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que l'anneau $A := \cup_{i\geq 0}\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_i]$ n'est pas noethérien.

Exercice 2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $U(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = U(X)^2 + V(X)^2$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ et $P_n(X) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. Le polynôme $P_n(X)$ a-t-il une racine double dans $\mathbb{C}$?

Exercice 4. Montrer que les polynômes homogènes symétriques de degré 1 sont de la forme as_1 avec $a \in A$, les polynômes homogènes symétriques de degré 2 sont de la forme $as_1^2 + bs_2$ avec $a, b \in A$ et que les polynômes homogènes symétriques de degré 3 sont de la forme $as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3$ avec $a, b, c \in A$.

Exercice 5. Exprimer les polynômes suivants à l'aide des polynômes symétriques élémentaires :

1 $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$.

2 $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$.

3 $X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2$.

Exercice 6. Soient x_1, x_2 et x_3 les racines de X^3-2X^2+X+3. Calculer $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

Exercice 7. Montrer que le discriminant de $X^3 + aX^2 + bX + c$ est $a^2b^2 + 18abc + -4a^3c - 4b^3 - 27c^2$. Calculer le discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$.

Exercice 8. Soient $n \geq 1, m \geq 1$ et $F(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, $G(X) = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k$.

1 Calculer $\mathrm{res}_{1;1}(a_1X + a_0; b_1X + b_0)$.

2 Montrer que $\mathrm{res}_{n;m+r}(F(X); G(X)) = a_n^r.\mathrm{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $\deg G(X) \leq m$.

3 Montrer que $\mathrm{res}_{n;m}(F(X) + X^rG(X); G(X)) = \mathrm{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $m + r \leq n$. En déduire que $\mathrm{res}_{n;m}(F(X) + G(X)H(X); G(X)) = \mathrm{res}_{n;m}(F(X); G(X))$ si $H(X) \in A[X]$ est tel que $\deg H(X) \leq n - m$.