Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 “Algèbre 4”
Liste d'exercices 8

## Eléments algébriques

**Exercice 1.** Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ des corps tels que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

**Exercice 2.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\overline{z}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $z$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

**Exercice 3.** Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ et déterminer leur degré sur $\mathbb{Q}$ dans ce cas.

$$\mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} \oplus \sqrt{5}\mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} \oplus \sqrt[3]{2}\mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{C}$$

**Exercice 4.** Soit $p$ un nombre premier et soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de degré $p$. Montrer que si $M/\mathbb{K}$ est une sous-extension de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, alors $M = \mathbb{K}$ ou $M = \mathbb{L}$.

**Exercice 5.** Soit $\alpha = 2\cos 2\pi/7$. Utilisant le fait que $\omega = \exp 2i\pi/7$ est solution de $1 + \omega + \cdots + \omega^6 = 0$, montrer que $\alpha$ vérifie :

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extension intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\omega]$. Montrer que $[\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}[\alpha]] = 2$.

**Exercice 6.** Soit $P(X) = X^3 + X + 1$.

**1** Montrer que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

**2** Soit $\alpha$ une racine (dans $\mathbb{C}$) de $P(X)$. Montrer que l'on peut écrire $\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$ sous la forme $g(\alpha)$ avec $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $\leq 2$. Expliciter $g(X)$.

**Exercice 7.** Calculer $\mathrm{Irr}(\sqrt{X}, \mathbb{C}(X), Y)$.

**Exercice 8.** Calculer le degré de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}]$ sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 9.** Décrire un corps à 4 éléments. Existe-t-il un corps à 6 éléments ?

**Exercice 10.** Soit $p$ un nombre premier, $n \geq 1$, $q = p^n$.

**1** Soit $G$ un groupe abélien fini et $a, b \in G$ d'ordre $n_1$ et $n_2$. Montrer qu'il existe des factorisations :

$$n_1 = t_1 \alpha_1 \qquad n_2 = t_2 \alpha_2$$

avec $1 = \mathrm{pgcd}(t_1, t_2)$ et $t_1 t_2 = \mathrm{ppcm}(n_1, n_2)$. Montrer que l'ordre de $a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$ est $t_1 t_2$.

**2** En déduire que dans un groupe abélien fini il existe un élément d'ordre le ppcm de l'ordre de tous les éléments.

**3** En déduire que le groupe $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

**4** En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{F}_q$ tel que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[x]$.