Université Bordeaux I - année 2009-2010
MHT511 "Algèbre 4"
Liste d'exercices 9

Polynômes cyclotomiques. Corps de décomposition

Exercice 1. Expliciter $\Phi_n(X)$ pour $1 \leq n \leq 10$.

Exercice 2. Soit $\zeta_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Quel est le degré de ζ_n sur $\mathbb{Q}$? Quel est le degré de $\cos(2\pi/n)$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3. Soit $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$ un polynôme unitaire dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont de valeur absolue bornée par 1.

1 Soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[T]$ unitaires de degré n dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont de valeur absolue bornée par 1. Montrer que $\mathcal{C}_n$ est fini.

2 Soit $P(T) \in \mathcal{C}_n$, $P(T) = (T-b_1)(T-b_2)\ldots(T-b_n)$ et soit h un entier plus grand que 1. Montrer que $P_h(X) := (T-b_1^h)(T-b_2^h)\ldots(T-b_n^h) \in \mathcal{C}_n$.

3 Soit A l'ensemble de toutes les racines de tous les polynômes de $\mathcal{C}_n$. Montrer que A est fini. Soit $a \in A$, montrer qu'il existe $h < k$ avec $a^h = a^k$. En déduire que a est soit nul soit une racine de l'unité.

4 Déterminer les facteurs irréductibles de $P(T)$.

Exercice 4. Montrez que $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ n'est pas un corps de décomposition de X^3-2 sur $\mathbb{Q}$. Quel est le corps de décomposition de ce polynôme sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 5. Soit $P(X) = X^3 - X + 1$.

1 Montrer que $P(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

2 Montrer que $P(X)$ possède une racine réelle et deux racines complexes.

3 Le discriminant d'un polynôme de la forme X^3+pX+q étant $-4p^3-27q^2$, calculer le discriminant de $P(X)$. Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de $P(X)$, montrer que $\sqrt{-23} \in \mathbb{L}$.

4 Montrer que $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = 6$ et que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{-23})$ où $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de $P(X)$.

Exercice 6. Comment exprimer un corps de décomposition en fonction des corps de rupture d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$? Soient n le degré de $P(X)$ et $\mathbb{L}$ un corps de décomposition, montrez que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] \leq n!$.

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ des extensions algébriques sur $\mathbb{K}$, soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible de degré m et $n := [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Si $1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$ montrez que $P(X)$ est un irréductible de $\mathbb{L}[X]$.